

아치의 곡률면의 자유진동 해석과 P-M상관도

The Effect of Initial Combined Load on the Lateral Free Vibration on the Aarch and P-M Interaction Curve

전교영*
Jeun, Kyo-Young

김성남**
Kim, Sung-Nam

김종현***
Kim, Jong-Hun

강영종****
Kang, Young-Jong

ABSTRACT

The effect of initial combined load on the lateral free vibration of arches is investigated. For the analysis, P-M interaction curves for the arches are obtained. The arches are circular arches which have constant cross-section and simply supported. Also, the arches are subjected both radial uniform distributed load which results in an axial compression on the cross-section and end moments that cause uniform bending action at the same time. All analysis are performed by finite element method based on Kang and Yoo's curved beam theory.

1. 서론

아치는 구조적 효율성 및 형상의 아름다움으로 인하여 고대에서부터 널리 사용되어져온 구조물이다. 아치 형상은 비단 교량뿐만 아니라 주요 터널, 파리의 에펠탑 기단부등 그 적용성이 매우 크다. 이는 아치 구조형태의 효율성 및 부드러운 곡선미로 인하여 보는 이로 하여금 편안한 느낌을 줄 수 있기 때문이다. 이렇듯 아치는 구조적 역할에 충실하면서 동시에 조형성을 만족시킬 수 있는 최적의 형태이다. 아치는 부재 중간에 작용하는 횡하중을 주로 축방향 압축력으로 지점까지 전달되도록 고안된 구조이다. 이러한 구조에서는 직선형태의 단순지지된 주형이나 트러스에 비하여 휨모멘트가 크게 감소되게 된다. 다시 말하자면 아치는 외력을 부재의 압축력으로 저항하게 되므로 구조적으로 면내강성은 매우 크지만 면외강성은 상대적으로 작다. 따라서 아치부재 해석 시 면외좌굴 성능이 중요한 변수로 작용하게 된다. 즉, 면외좌굴 성능이 반드시 고려되어야 한다. 이러한 아치의 면외좌굴 거동은 휨-비틀 거동을 말하는데, 아치의 휨-비틀 거동은 직선보에서의 경우와는 달리 축력, 휨모멘트, 비틀모멘트가 서로 개별적으로 작용하는 것이 아니라 coupling되어 작용하게 되므로 매우 복잡해진다. 특히 동적거동에 있어서는 이러한 단면력들의 coupling으로 인해 더욱 복잡한 관성력이 만들어지게 된다. 다시 말하자면 초기 곡률을 가지는 아치는 비틀과 뒹(warping)으로 인해 구조물의 진동특성이 직선보와는 다른 양상을 보이게 된다. 일반적으로 구조물의 동적해석은 Modal analysis를 통해 대상 구조물의 동적특성을 좌우하는 고유진동수를 산정하고 그 고유진동수에서의 자유진동모드를 결정하는 과정을 선행적으로 갖게 된다. 본 연구에서는 등단면을 가지는 circular 아치에 대한 자유진동 해석을 수행하였다. 보통의 자유진동해석과는 달리 등분포 하중과 모멘트를 동시에 아치에 재하한 상태에서 자유진동 해석을 수행하였다. 또한 아치에 대한 P-M상관도가 작성되어졌다. 좌굴해석과 자유진동 해

* 롯데건설(주) 기술연구소 연구원, 비회원

** 고려대학교 토목환경공학과 박사과정, 비회원

*** 고려대학교 토목환경공학과 연구조교수, 정회원

**** 고려대학교 토목환경공학과 부교수, 정회원

석은 유한요소 해석프로그램을 사용하여 수행되어졌다.

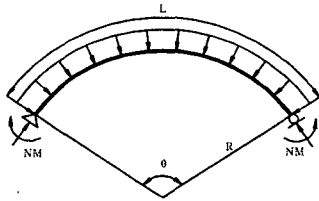


Fig.1 등분포 압축 & 부모멘트

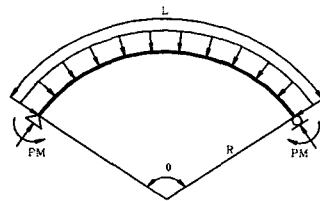


Fig.2 등분포 압축 & 정모멘트

2.2 P-M상관도

본 연구에서는 아치에 등분포 압축력과 모멘트가 동시에 가해질 때 곡률면의 거동을 알아보는 것이다. 이 두 개의 하중은 서로 독립적이지 않고 상호작용으로 부재의 거동에 영향을 미치게 된다. 이에 아치의 P-M상관곡선을 구해 본다.

2.2.1 직선보의 P-M상관도

아치의 P-M상관도 작성에 앞서 직선보의 P-M상관도를 작성해 본다. 유한요소 해석에 의해 직선보의 P-M상관도를 작성하고, 이를 이론식에 의한 P-M상관도와 비교해 본다. 직선보의 P-M상관 곡선은 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$\left(\frac{M}{M_{cr}} \right) = \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) \left(1 - \frac{P}{P_z} \right)$$

P_y : Column flexural resistance

P_z : Column torsional resistance

위의 식에서 보듯이 직선보의 P-M상관 곡선은 P_y/P_z 의 비에 따라 달라지게 된다. P_y, P_z 는 단면에 따라 변하게 되므로 직선보의 P-M상관 곡선은 단면의 형상에 따라 변하게 된다. $P_y/P_z=K$ 라 놓을 때 단면의 변화에 따른 P-M상관 곡선은 Fig. 3과 같다.

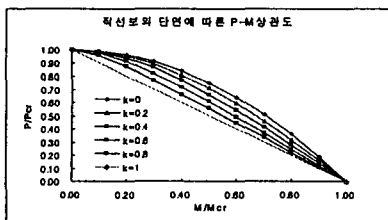


Fig.3 단면변화에 따른 P-M상관도

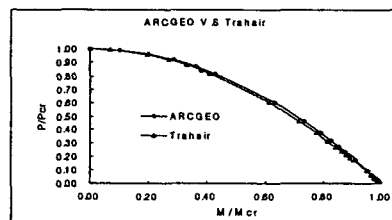


Fig.4 ARCGEO와 이론식의 비교

그래프에서 M_{cr} 은 모멘트만 작용할 때의 좌굴모멘트이고 P_{cr} 은 축력만 작용할 때의 좌굴하중이다. 그러므로 그래프의 종축과 횡축은 각각의 좌굴 하중에 대해 가해진 하중, P와 M의 비로써 나타내었다. 따라서 가해지는 $P/P_{cr}, M/M_{cr}$ 의 최대값은 1이 된다. 위의 그래프에서 보듯이 k가 커질수록 직선에 가까운 형태가 된다. 또한 본 연구에서 사용되어진 유한요소해석 프로그램인(ARCGEO가 아치의 P-M상관도를 정확하게 그려낼 수 있는지의 여부를 판단하기 위하여, 직선보를 모델링 하여 Trahair 식에 의한 P-M상관도와 비교하여 본다. 해석 결과는 Fig. 4에서 보듯이 모멘트비(M/M_{cr})비가 증가할수록 축력비(P/P_{cr})는 감소하는 경향을 보이며, Trahair의 이론식에 의한 P-M상관도와 ARCGEO로써 구한 P-M상관도가 거의 일치함을 알 수 있다. 따라서 ARCGEO는 축력과 모멘트가 동시에 작용할 때 두 하중의 상관관계를 잘 반영하고 있다고 할 수 있다. 이에 본 연구에서는 ARCGEO를 사용하여 아치의 P-M상관도를 그리기로 한다.

2.2.2 아치의 P-M상관도

본 장에서는 ARCGEO를 사용하여 아치의 P-M상관도를 작성한다. 내부 중심각의 크기를 변화시켜 아치의 P-M상관도를 작성함으로써 곡률이 P-M상관 곡선에 미치는 영향에 대하여 알아본다. 제한된 하중의 조건에 따라 P-M상관도를 작성하였다.

2.2.2.1 등분포 압축 & 부모멘트

등분포 압축과 부모멘트가 작용할 때 아치의 P-M상관도이다.

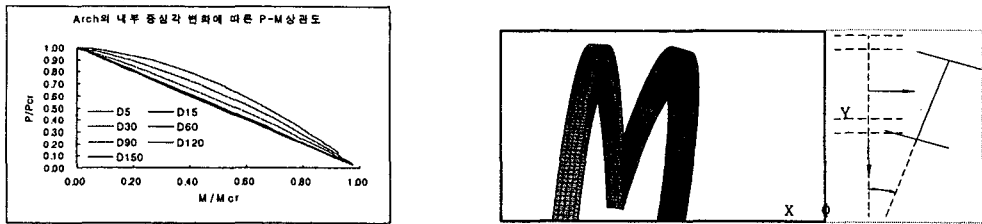


Fig.5 내부 중심각의 변화에 따른 P-M상관도(P-PM) Fig.6 곡률면의 좌굴형상(P-PM)

위의 그래프에서 보듯이 모멘트비(M/Mcr)비가 증가할수록 이에 따라서 축력비(P/Pcr)는 감소하는 경향을 보인다. 또한 내부 중심각의 크기가 커질수록 P-M상관 곡선은 완만한 곡선의 형태에서 점점 직선에 가까운 형태로 바뀌게 된다. 이는 직선보에서 단면의 형상에 따른 변화양상과 비슷하다. 즉 직선보에서는 k값에 따라 P-M상관 곡선이 변화하게 되지만, 아치에서는 내부 중심각의 크기에 따라 P-M상관 곡선이 변하게 된다. 아치에서 좌굴이 일어날 때 Fig. 6에서 보듯이 곡률면의 방향으로 횡방향 변위(y)와 z축에 대한 비틀림(ϕ)가 생긴다. 이때 비틀림은 단면의 도심을 중심으로 횡방향 변위가 발생하는 방향으로 일어나게 된다. 단면의 변형 형상은 Fig. 6에서와 같다. 이러한 형상은 상부 플랜지와 하부 플랜지에 발생하게 되는 응력분포 양상이 다르기 때문에 발생하게 된다. 아치에 유발되는 응력 분포도를 그려보면 Fig. 7과 같다.

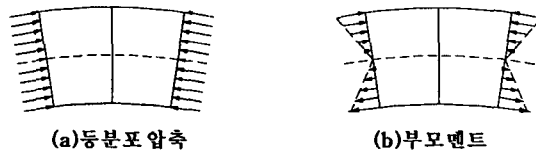


Fig.7 단면의 응력분포

등분포 압축은 아치 단면 전체에 균등한 축력을 발생하는 경우로 Fig. 7(a)에서와 같은 응력분포를 보이게 된다. 그러나 부모멘트에서는 응력이 단면 전체에 균등하게 작용하지 않는다. 단면의 도심을 중심으로 상부 플랜지 쪽에는 압축력이 하부 플랜지에는 인장력이 작용하게 된다. 그러므로 이 두 하중이 동시에 작용하게 되면 상부 플랜지에는 축력에 의한 압축력 이외에 부모멘트에 의한 압축력이 더해지게 되어 압축력이 증가하게 되는 반면에 하부 플랜지는 축력에 의한 압축력이 부모멘트에 의한 인장력에 의해서 상쇄되게 되게 된다. 결과적으로 상부 플랜지는 하부 플랜지보다 항상 더 큰 압축력을 받게 된다. 이와 같은 응력 분포 때문에 좌굴 형상은 Fig. 8과 같게 되고, 모멘트비의 증가에 따라 상부 플랜지에 더해지는 축력이 증가하기 때문에 축력비는 작아지는 경향을 보이게 된다.

2.2.2.2 등분포 압축 & 정모멘트

등분포 하중과 정모멘트가 아치에 작용할 때이다. Fig. 8에서 보듯이 모멘트비(M/Mcr)비가 증가할수록 이에 따라서 축력비(P/Pcr)는 오히려 증가하는 경향을 보인다. 또한 내부 중심각의 크기가 커질수록 축력비(P/Pcr)의 증가가 훨씬 커진다. 이는 직선보나 부모멘트를 받는 아치의 변화양상과는 아주 다르다. 또한 좌굴 형상도 달라지게 된다. 부모멘트를 받을 때와 마찬가지로 Fig. 9에서 보듯이 곡률면의 방향으로 횡방향 변위(y)와 z축에 대한 비틀림(ϕ)가 생긴다. 그러나 비틀림의 방향은 반대다. 비틀림은 단면의 도심을 중심으로 횡방향 변위가 발생하는 방향과 반대 방향으로 일어나게 된다.

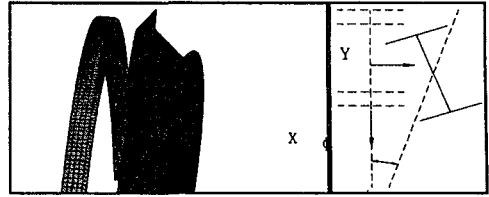
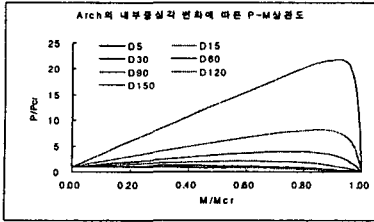


Fig.8 내부 중심각의 변화에 따른 P-M상관도(P-NM) Fig.9 곡률면의 좌굴형상(P-NM)
 이는 상부 플랜지와 하부 플랜지에 발생하게 되는 응력분포 양상이 부모멘트를 받을 때의 경우와는 다르기 때문이다. 아치에 작용하게 되는 응력 분포도를 그려보면 아래의 Fig. 10과 같다.



Fig.10 단면의 응력분포

(a)는 등분포 하중의 경우이고, (b)는 정모멘트가 작용할 때의 응력 분포 양상이다. 정모멘트에서는 단면의 도심을 중심으로 상부 플랜지 쪽에는 인장력이 하부 플랜지에는 압축력이 작용하게 된다. 그러므로 이 두 하중이 동시에 작용하게 되면 상부 플랜지에는 축력에 의한 압축력이 정모멘트에 의한 인장력에 의해 상쇄되게 되는 반면에 하부 플랜지는 축력에 의한 압축력이 정모멘트에 의한 압축력이 더해지게 된다. 결과적으로 하부 플랜지는 상부 플랜지보다 항상 더 큰 압축력을 받게 된다. 이와 같은 응력 분포 때문에 좌굴 형상은 그림과 같게 되고, 모멘트비의 증가에 따라 상부 플랜지는 압축력에서 인장력을 받게 되고 하부 플랜지는 압축력이 더해져서 응력이 증가하게 된다. 다시 말하면, 축력이 정모멘트에 의해 상쇄되므로 축력비가 클수록 이를 상쇄하기 위해서는 더 큰 모멘트가 필요하게 된다. 따라서 모멘트비가 증가할수록 축력비가 증가하는 경향을 보이게 된다.

2.3 아치의 자유진동 해석

2.3.1 등분포 압축 & 부모멘트

먼저 일정한 내부 중심각에서 축력비의 변화에 따른 진동수의 양상을 알아본다. 초기 축력을 재하한 후 부모멘트를 좌굴모멘트의 일정 비율만큼 증가시키면서 진동수의 변화양상을 나타내었다.

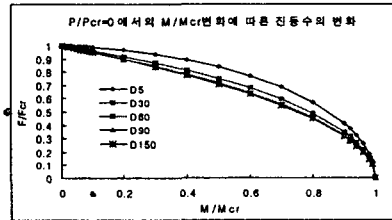
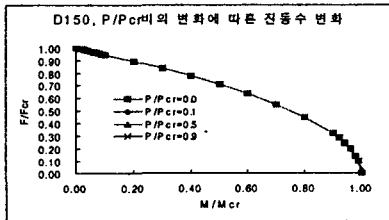


Fig. 11 축력비에 따른 진동수 변화(D150,P-PM) Fig. 12 모멘트비에 따른 진동수 변화(P-PM)
 Fig. 11의 그래프는 내부 중심각이 150°인 경우이다. 그래프의 횡축은 좌굴모멘트에 대한 가해진 모멘트의 비(M/Mcr)이고 종축은 모멘트가 0일 때의 고유진동수에 대한 모멘트 재하시의 고유진동수의 비(F/Fcr)이다. 위의 그림에서 보듯이 초기 축력비에 상관없이 모멘트비의 증가에 따라 진동수가 감소하는 경향을 보이고 있다. 또한 내부 중심각의 크기와는 상관없이 진동수의 변화양상은 같음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 12는 아치 내부 중심각의 변화에 따른 진동수의 변화이다. 초기 축력비에 상관없이 진동수의 변화양상이 모두 동일하므로 P/Pcr의 비율 '0'으로 하여 진동수의 변화양상을 나타내었다. 모멘트비의 증가에 따라 고유 진동수는 감소한다. 또한 내부 중심각의 크기에 따라 진동수의 변화

양상에 약간의 차이를 보이기도 하지만 내부 중심각이 30° 이상이 되면 거의 차이를 보이지 않는다. 다음은 아치의 진동모드를 나타낸 것이다. 아치의 자유 진동시 최대변위가 발생하게 되는 부분은 정점부이다. 따라서 정점부에서 곡률면의 방향의 변위를 '1'로 놓고 비틀림 변위를 이에 대한 상대적인 값으로 표현하면, 곡률면의 방향에 대한 Z-축의 상대적인 변위는 Fig. 13과 같다.

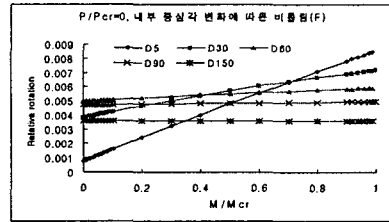
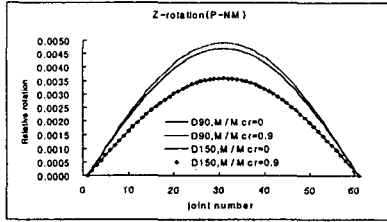


Fig.13 Z-축 상대변위(P-NM)

Fig.14 내부 중심각에 따른 최대비틀림(P-NM)

Fig. 13의 그래프에서, 내부 중심각에 상관없이 모두 비틀림 값이 양(陽)의 값을 갖는다. 이는 단면이 곡률면의 방향의 변위가 발생하는 방향으로 도심을 중심으로 회전하였다는 것을 의미한다. 또한 내부 중심각이 150° 인 경우에는 모멘트비에 관계없이 비틀림의 크기가 일정하지만 90° 인 경우는 모멘트비에 따라 비틀림의 값에서 차이를 보이고 있다. 즉, 가해진 모멘트비가 클수록 단면이 더 많이 비틀어지게 되는 경향을 보이고 있다. 이에 아치의 정점부에서의 비틀림 양상에 대하여 알아본다. Fig. 14의 그래프는 축력비가 $P/P_{cr} = 0$ 일 때 내부 중심각의 변화에 따른 비틀림각의 변화양상을 나타낸 것이다. 내부 중심각의 크기가 작은 경우(60° 이하)에는 모멘트비가 증가함에 따라 비틀림은 선형적으로 증가하고 있다. 그러나 90° 이상인 경우에는 모멘트비에 관계없이 비틀림의 정도가 일정하다. 또한 내부 중심각이 커질수록 발생하는 최대 비틀림이 작아진다. 중심각이 커질수록 좌굴이 일어날 때 단면의 일부가 변형을 일으키기 보다는 구조물 전체가 움직이는 강제운동을 하게 되기 때문이다.

2.3.2 등분포 압축 & 정모멘트

초기 축력을 재하한 후 정모멘트를 좌굴모멘트의 일정 비율만큼 증가시키면서 진동수의 변화양상을 나타내었다. 내부 중심각이 90° 인 경우와 150° 인 경우이다. Fig.15, 16에서 보듯이 모멘트비가 증가할수록 진동수의 비가 커지고 있다. 또한 축력비가 커질수록 진동수의 비는 훨씬 증가한다.

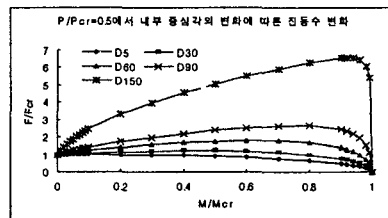
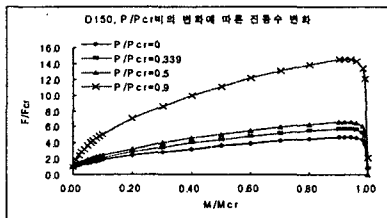


Fig.15 축력비에 따른 진동수 변화(D150,P-PM)

Fig.16 내부 중심각에 따른 진동수 변화(P-PM)

Fig. 15는 내부 중심각의 변화에 따른 진동수의 변화이다. 앞에서 살펴보았 듯이 축력비에 따라 진동수의 변화 양상이 달라지므로 축력비를 $P/P_{cr} = 0.5$ 로 일정하게 고정시키고 내부 중심각의 크기를 변화시켜 진동수의 변화추이를 나타내면 Fig. 16과 같다. 아치의 내부 중심각이 커질수록 모멘트비의 증가에 따라 진동수의 비는 증가하게 된다. 이는 축력비의 경우와 비슷한 경향을 보이고 있다. 앞의 경우와 마찬가지로 곡률면의 방향의 최대변위 '1'에 대한 상대적인 값으로 단면의 비틀림의 정도를 나타내면 Fig. 17과 같다. 그래프는 내부 중심각이 90° 인 경우이다. 부모멘트가 작용할 때와는 달리 모멘트비가 증가함에 따라 비틀림 값이 양(陽)의 값에서 음(陰)의 값으로 부호가 바뀌고 있다. 이는 단면이 비틀리는 방향이 바뀐다는 것을 의미한다. 즉, 단면이 모멘트비가 작을 때는 곡률면의 방향의 변위가 발생하는 방향으로 도심을 중심으로 회전하지만 모멘트비가 커짐에 따라 곡률면의 방향의 변위가 발생하는 방향과 반대로 비틀리게 되는 것이다. 이는 하부 플랜지가 상부 플랜지 보다 압축력을

더 크게 받기 때문이다.

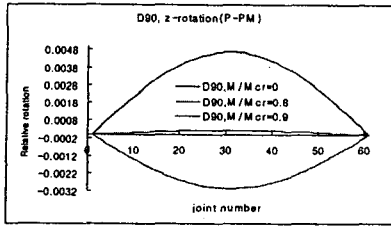


Fig.17 Z-축 상대모드(D90,P-PM)

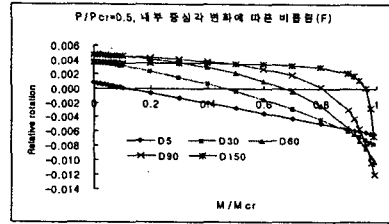


Fig.18 내부중심각에 따른 최대 비틀림(P-PM)

다음은 아치의 정점부에서의 비틀림 양상에 대하여 알아본다. Fig. 18의 그래프는 축력비를 0.5로 고정하고 내부 중심각의 변화에 따른 비틀림 각의 변화양상을 나타낸 것이다. 내부 중심각이 작을 때는 비틀림 각이 선형으로 감소하지만 중심각이 커질수록 곡선형태로 감소하게 된다. 또 중심각의 크기가 커질수록 단면의 회전 방향이 바뀌는 모멘트비가 커지고 있다. 그리고 이 경우 역시 중심각이 커질수록 단면의 일부가 변형을 일으키기 보다는 구조물 전체가 움직이는 강체운동을 하고 있다.

3. 결론

본 연구는 아치의 P-M상관도와 아치에 초기하중이 가해졌을 때 아치의 곡률면의 진동수의 변화양상에 관한 것이다. 초기하중은 모멘트와 축력으로서 아치에 동시에 재하되게 되며, 모멘트의 작용 방향에 따라 두 가지의 하중 조건으로 나뉜다. 곡률면의 좌굴에 대한 아치의 P-M상관도 작성하여는 직선보의 P-M상관도와 비교하였으며, 곡률면의 자유진동 해석은 아치의 내부 중심각의 크기를 변수로 하여 가해진 초기 하중의 크기에 따라 곡률면의 진동수의 변화양상을 알아보았다.

3.1 아치의 P-M상관도

직선보의 경우와는 다른 양상의 P-M상관곡선의 형태를 보이게 된다. 다시 말하면, 직선보의 P-M상관도는 단면의 형상에 따라 변하게 되는데 반하여 아치는 내부 중심각의 크기에 따라 다른 형태의 P-M상관도를 가지게 된다. 하중 조건에 따라 두 가지의 경우로 나누어 결론을 내린다.

첫째, 등분포 압축과 부모멘트 작용 시, 축력과 모멘트가 동시에 작용함으로 인하여 어느 한 하중이 증가하게 되면 다른 하중은 그 만큼 감소하게 된다. 다시 말하면, 축력비(P/Pcr)가 증가하게 되면 모멘트비(M/Mcr)는 감소하게 되고 모멘트비(M/Mcr)가 증가하게 되면 축력비(P/Pcr)가 감소하는 경향을 보이게 된다. 둘째, 등분포 압축과 정모멘트 작용 시, 축력과 모멘트가 동시에 작용할 때, 어느 한 하중이 증가하게 되면 다른 하중은 증가하게 된다. 다시 말하면, 축력비(P/Pcr)가 증가하게 되면 모멘트비(M/Mcr)도 증가하게 되고 모멘트비(M/Mcr)가 증가하게 되면 축력비(P/Pcr)가 증가하는 경향을 보이게 된다.

3.2 아치의 자유진동 해석

초기하중이 재하된 경우 아치의 곡률면의 진동수는 변화하게 된다. 왜냐하면 초기하중으로 인해 곡률면의 강성의 증감이 발생하기 때문이다. 하중 조건에 따라 두 가지의 경우로 나누어 결론을 내리면 다음과 같다. 첫째, 등분포 압축과 부모멘트 작용 시, 작용하는 하중비가 커질수록 진동수는 고유진동수에 비해 작아진다. 즉, 일정한 축력비에서 모멘트비가 증가함에 따라 진동수비는 감소한다. 둘째, 등분포 압축과 정모멘트 작용 시, 작용하는 하중비가 커질수록 진동수는 고유진동수에 비해 커진다. 즉, 일정한 축력비에서 모멘트비가 증가함에 따라 진동수비는 증가한다.

참고문헌

1. 염웅준(2002), "기하강성을 고려한 아치 구조물의 횡자유진동", 공학석사 학위논문, 고려대학교.
2. 임남형(1995), "1축대칭 박판 아치의 좌굴", 공학석사 학위논문, 고려대학교.
3. N.S. Trahair, "Flexural-Torsional Buckling of Structures", Chapman & Hall, London, 1993