

도시형 순환 열차에서 운전 최적제어 시스템에 관한 연구  
**A study of the train traffic optimal control system  
in a circular metro line**

홍효식 \*                      유광균 \*                      송문석\*  
Hong, Hyo Sik                Ryu, Kwang Gyun                Song, Noon suck

ABSTRACT

This paper is implemented a control algorithm in order to be stable and minimized to entire train traffic system at delayed case. Signaling system is described with algebraic equations given for train headway, Discrete-event simulation principles are reviewed and a demonstration block signaling model using the technique is implemented. Train congestion at station entrance for short headway operation is demonstrated and the propagation of delays along a platform of trains from any imposed delay to the leading train is also shown. A rail way signaling system is by nature a distributed operation with event triggered at discrete intervals. Although the train kinematic variables of position, velocity, and acceleration are continually changing, the changes are triggered when the trains pass over section boundaries and arrive at signals and route switches. This paper deals with linear-modeling, stability and optimal control for the traffic on such metro line of the model is reconstructed in order to adapt the circuits. This paper propose optimal control laws with state feedback ensuring the stability of the modeled system for circuits. Simulation results show the benefit to be expected from an efficient traffic control.

The main results are summarized as follows:

1. In this paper we develop a linear model describing the traffic for both loop lines, two state space equations have been analyzed. The first one is adapted to the situation where a complete nominal time schedule is available while second one is adapted when only the nominal time interval between trains is known, in both cases we show the unstability of the traffic when the proceeding train is delayed following properties.
    - They are easily implemented at low cost on existing lines.
    - They ensure the exponential stability of loop system.
  2. These control laws have been tested on a traffic simulation software taking into the non-linearities and the physical constraints on a metro line.
- By means of simulation, the efficiency of the proposed optimal control laws are shown.

1. 서론

대부분의 도시형 철도는 주어진 선로에 다수의 열차들이 정해진 계획에 의해 빈번한 운행 횟수로 운행되고 있다. 주어진 선로의 형태를 보면 시점과 종점이 일치하는 순환형과 시점과 종점이 다른 비순환형이 있는데 순환형을 closed loop line 이라 하고 비순환형을 open loop line 이라 한다. 어떤 형이든 운행중인 어느 열차가 어떤 이유로 지연이 발생한다면 이 지연은 점점 더 깊이 누적되어 결국엔 운행계획 중 후속 어느 열차가 운행을 중단하는 경우가 발생된다. 열차의 운행을 이러한 지연으로부터 효과적으로 제어하여 효율적으로 열차를 운행하는 연구가 계속되고 있다. 본 연구에서는 열차 지연 상황이 발생하였을 때 이것이 전 운송시스템에 미치는 영향을 최소화하고 안정시키기 위한 제어 알고리즘을 구현하였다. 그런데 열차의 운전상 가장 중요한 것은 안전성의 확보이다. 그러나 최대수송력을 발휘하기 위한 한계는 보안의 확보 즉 안전성 측면으로부터 제한을 받게 된다. 열차운전은 열차와 열차사이의 시간 간격(운전시격)을 될 수 있는 한 단축하여 안전, 정확, 신속하게 최대 수송력을 발휘할 수 있도록 하는 것이 운전의 효율성을 높이는 것이다. 이 경우에 열차와 열차의 운행 시간 간격, 즉 어느 지점을 열차가 통과한 후에 다음 열차가 통과 할 때까지 안전을 확보할 수 있는 최단 시간을 열차운전의 최소간격이라고 말하며, 최소간격은 열차상호간의 간격을 규제하며 일반적으로 정차되는 곳에서 지연이 발생하는 경우가 많다. 승객들의 승·하차로 인해 발생하는 지연이 후속열차의 정시 운전을 방해하는 경우이다. 고밀도로 운전되어야 하는 도시형 철도의 운전 성격으로 미루어 보면 한 열차의 지연이 후속열차의 지연으로

\* 한국철도대학 교수 정희원

이러한 모델들은 제어 목적이 어떤 역에서 출발하는 출발시간의 연속에 관한 것이지 자체 시스템의 평가에 대한 것이 아니었다. 전체 시스템의 평가에 관한 것은 V. Van Brousegem의 논문[2]에 표현되어져 있다. Brousegem이 제안한 모델특성은 열차의 가속속도와 같은 문제는 고려하지 않고, 열차의 출발시각과 도착시각 그리고 일정한 비율로 도착하는 승객의 수만을 고려한 모델로 매우 안정적인 알고리즘이다. 본 연구는 Brousegem이 제안한 순환형 모델을 구현하여 시스템모델을 제안하고 최적제어법칙을 구한 후 경부선 구간에서의 최소운전시격을 제어대상으로 하여 시뮬레이션 한 후 결과를 분석하였다. 정상상태 제어 목표는 완전한 공칭 시간 계획표(complete nominal time schedule) 또는 연속적으로 운행되어지는 두 열차사이의 운행 시간 간격으로 할 수 있다.

여기서 이 논문은 공칭시간 및 시 편차(시간격)를 제어목표로 두고 시스템 모델링 하였으며 또한 운전 제어 형태는 이동 폐색으로 하고 운전 시격의 단축을 위한 제어 시스템을 대수식으로 표현하고, 이를 서울-수원간 지하철 1호선에 적용을 하여 최소 공칭 운전 시격을 제어목표로 하여 열차 운전 제어 시스템을 구현 하였다.

## 2. 열차 운전 모델

### 2.1 선로

순환형 선로에서의 1번째 플랫폼에서의 열차의 출발시간은 그 이전역 즉 N번째에서의 출발시간에 영향을 받는다. 순환형 선로인 경우에서 두종단역인 A, B 사이에 두 방향으로 구성되어져 있는 선로를 고려하면, 한 방향면인 AB사이에는 플랫폼은  $[1], [2], [3], \dots, [N]$  으로 될 것이며 다른 방향면인 BA 사이의 플랫폼은  $[N1], [N1+1], \dots, [2], [1]$ 이 될 것이다. 이 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같이 된다.

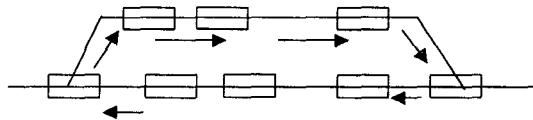


그림 2.1 순환형 선로 플랫폼 배치도

A와 B 사이의 역들을 coupling하면  $([2], [2N1-2]), ([3], [2N1-3]) \dots \cdot ([N1-1], [N1+1])$ 으로 될 수 있다. 그래서 위첨자를 열차순번, 아래 첨자를 플랫폼순번으로 한다면 연속적인 두 열차는  $i$ 와  $i+1$ 이 되고  $1 \leq i \leq M$ 이며 이는  $M$ 열차 뒤에는 1번 열차임을 의미하며, 연속적인 두 플랫폼은  $k$ 와  $k+1$ 로 표기할 수 있다. 여기서  $1 \leq k \leq N$ 이며  $N$  플랫폼뒤에는 1번째 플랫폼이 있음을 의미한다.

그림 2.1에서 만약  $M$ 번의 열차들이 주기적으로 ABA를 순환 운행하는 경우에는  $(2N1-2)$ 개의 플랫폼을 갖는 순환형 선로로 해석되어 질 수 있고 만약  $M$ 번의 열차들이 AB만 운행한다면 이는  $N$ 개의 플랫폼을 운행하는 비 순환선로로 해석된다.

### 2.2. 열차 운전 시격 조정

열차 운전시격 조정(Traffic regulation)의 개념은 철도 노선을 운행중인 열차들의 속도와 정차시간을 적절히 제어하여 철도운송 시스템의 전체적인 운용효율을 높이기 위한 것으로, 철도 운행제어에서는 일반적으로 다음 두 가지 제어목표를 가장 중요하게 고려한다.

첫째, 열차는 계획된 운전계획표에 맞게 운행되어야 한다. 이것은 전체적인 시스템이 정상상태를 유지하는 경우 중요한 제어목표가 된다.

둘째, 운행중인 열차들은 균등한 간격을 유지하며 운행하여야 한다. 이것은 전체적인 시스템이 사고 또는 다른 이유로 운행지연 상황이 누적되고 있을 때에 중요한 제어목표가 된다.

이런 제어 목표를 최적화하기 위하여 선형 제어를 이용한 열차 운전시격 조정방법은 시스템을 선형적으로 모델링하고, 모델링 된 시스템을 바탕으로 하여 운행제어 방법을 고안해 내는 방법이다. 선형제어를 이용한 방법의 일례로 브로이젠크(Brousegem)의 방법을 살펴보면, 브로이젠크는 이산 사건적인 방법을 이용하여 도시 철도 시스템을 수학적으로 모델링하였으며, 구현하기 쉬운 제어 알고리즘을 통해 안전성을 보장하는 시스템을 설계한 것으로, 시스템을 설계하기 전에 시스템 환경의 안정성과 선형성에 관계하는 몇 가지 가정을 하였으며, 그러한 가정을 바탕으로 열차의 출발시간, 운행시간, 정차시간 및 승객의 도착율등의 변수

를 정의하고 그 사이의 관계식을 수립하였다. 그리고 수립된 관계식을 이용하여 운행상태, 제어입력, 외란 항의 벡터로 이루어진 일차적 조건식을 세워, 주어진 조건식 아래에서 열차들이 운행계획표에 맞추어 운행할 수 있도록 제어 입력 벡터를 최적화 하였다.

선형제어방법은 제어 알고리즘이 간단하고 시스템이 이상적으로 동작하는 경우 최적화된 제어 성능을 보인다는 장점이 있다. 단일된 모델을 구현하였다.

이 장에서는 각 플랫폼에서 출발하는 서로 다른 열차들의 출발시간에 관한 수학적 모델을 순환형의 특성을 감안하여 유도한다[2].

즉 열차 순번은 위첨자, 플랫폼 순번은 아래첨자로 되는  $t_{ki}$  는 플랫폼  $k$ 에서 열차  $i$ 의 출발시간으로 표현할 수 있다.

그러므로 연속되는 플랫폼  $k$ 와  $k+1$ 에서 열차  $i$ 의 출발시간은 다음과 같다.

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i \quad (2.1)$$

여기에서  $r_{ik}$ 는 플랫폼  $k$ 에서  $k+1$ 번째까지의 열차의 운행 시간이고  $s_{ik+1}$ 는 열차  $i$ 가 플랫폼  $k+1$ 에서의 정차시간을 나타낸다. 식(2.1)을 설명하면 플랫폼  $k+1$ 에서 열차  $i$ 의 출발시간  $t_{k+1}^i$ 는 플랫폼  $k$ 에서 열차  $i$ 의 출발시간  $t_{ki}$ 에다가 플랫폼  $k+1$ 까지의 운행시간에 플랫폼  $k+1$ 에서 열차  $i$ 가 정차한 시간을 합한 시간이 된다.

여기서 운행시간인  $r$ 과 정차 시간인  $s$ 에 관해 다음과 같이 가정을 한다.

가정 1. 다음과 같은 변수들은 상수이다.

(열차의 운행 대수, 최적 운전시격, 승객의 빈도수)

가정 2. 운행시간인  $r$ 은 승객의 수에 영향을 받지 않는다.

가정 3. 정차시간인  $s$ 는 그 플랫폼에서 기다리는 승객의 수에 선형적으로 비례한다.

가정 4. 그 플랫폼에서 기다리는 승객의 수는 전 열차의 출발시간과 이번 열차의 도착시간의 운전시격에 선형적으로 비례한다.

위 가정에서 가정 2,3,4를 통하여 보다 복잡한 경우를 간단화 할 수 있다. 예를 들어 열차에 시승한 승객의 수에 기인하는 부하로 인한 열차운행시간 등에 대한 고려이다.

그러나 위의 가정 1-4에 의해 복잡하게 고려되어야 할 것들은 무시해도 좋다고 연구되어졌다[2].

위 가정 1과 2를 통하여 운행시간(running time)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$r_k^i = R_k + u_k^i + W1_k^i \quad (2.2)$$

여기에서  $R_k$ 는 플랫폼  $k$ 에서  $k+1$ 까지의 공칭 운행시간이며,  $u_{ik}$ 는 열차  $i$ 의 플랫폼  $k$ 부터  $k+1$ 까지의 운행시간을 증가 시키거나 감소시키기 위한 제어 행위로 인한 시간이며  $W1_{ik}$ 는 외란 항이다.

가정 1,3,4로부터 정차시간 (stay time)  $S_{k+1}^i$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$S_{k+1}^i = S + C_{k+1} (t_{k+1}^i - t_{k+1}^{i-1}) + W2_{k+1}^i \quad (2.3)$$

여기에서  $S$ 는 승객이 열차에 탑승하지 않는다 해도 문이 열리고 닫힐 때까지의 그 시간인 어느 플랫폼에서나 주어지는 공칭 정차시간이며  $C_{k+1}$ 은 연속적으로 운행되는 두 열차간의 출발사이의 시간 간격으로 인해 야기되는 지연상수이며,  $W2_{ik+1}$ 는 외란항이다.

식(2.2)와 (2.3)에 의해  $S$ ,  $R_k$ 와  $C_k$ 는 계산되어 질 수 있는 파라메타들임을 알 수 있다.

$C_k$ 는 어느 플랫폼에서  $t_{ki}$  와  $S_{ik}$ 를 여러 번 관찰하여 식(2.3)에 의해 얻어질 수 있다. 이에 의하면  $C_k$ 의 범위는 대략 0.01에서 0.05사이에 있다.

식(2.2)와 (2.3)을 사용하면 식(2.1)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(1 - C_{k+1}) t_{k+1}^i = t_k^i - C_{k+1} t_{k+1}^{i-1} + S + R_k + u_k^i + W_k^i \quad (2.4)$$

여기에서  $W_k^i = W1_k^i + W2_k^i$ 이다.

열차들의 출발시간 사이의 관계는 이 논문에서 중요하게 사용된다. 실제 열차간의 시격 즉  $(t_k^i - t_k^{i-1})$ 은 다음 식을 만족한다.

$$t_k^i - t_k^{i-1} \geq \delta \geq 0 \quad (2.5)$$

여기에서  $\delta$ 는 어느 한 플랫폼에서 연속운행되는 두 열차간의 출발시간에서 최소시간 간격을 의미한다.

위 식(2.4)에서  $u_k$ 는 강제로 주어진 제어 항목이다.

Brousege이 제안한 모든 플랫폼에서의 지연상수의 범위가 0.01에서 0.05사이에 있다고 하고 모든 플랫폼에서 다 같은 값을 갖는다고 가정하였으나 본 논문에서는 일단 지연상수  $C_k$ 를 모든 플랫폼에서 같은 경우와 다른 경우를 검토한다.

### 3. 공칭 정상상태 및 시편차 최적 제어

#### 3.1 공칭 상태 열차운전

연속적으로 운행되는 열차들 사이의 일정한 공칭 시간 간격으로 결정되어지는 운행 조건들을 고려해 보면, 이러한 일정한 공칭 시간 간격을 운전시격(head way)라고 하며  $H$ 라 한다. 공칭 운전은 이러한 공칭운전 시격을 바탕으로 운전되는데 이를 수식화 시키면 다음과 같으며 이러한 공칭 운전 시격은 공칭 출발시간으로부터 이루어 진다. 만약  $T_k^i$ 가 platform[k]에서 열차[i]의 공칭시간이라면 식(3.1)을 얻을 수 있다.

여기서  $H$ 는 공칭 운전 시격이다

$$T_k^i - T_k^{i-1} = H \quad (3.1)$$

그러므로 식(2.4)에 의하면 공칭 출발 시간은 제어항목과 외란 항목이 없는 기본적인 관계를 만족하여야 한다. 이를 식으로 나타내면 식(3.2)가 된다.

$$T_{k+1}^i = T_k^i + CH + S + R_k^i \quad (3.2)$$

여기서  $X_k^i$ 를 실제시간과의 차이를 나타낸다면 다음과 같이 된다.

$$X_k^i = t_k^i - T_k^i \quad (3.3)$$

식(3.3)에서  $t_k^i$ 는 실제 출발시간이고  $T_k^i$ 는 공칭출발시간이다.

$$(1-C)X_{k+1}^i + CX_{k+1}^{i-1} = X_k^i + u_k^i + W_k^i \quad (3.4)$$

식(2.4)와 식(3.2)에서 위와 같은 식을 얻을 수 있다.

여기에서 [i]열차와 [i-1]열차 사이의 실제 시간의 차이와 공칭 운전시격 간의 차이는 식(3.5)가 된다.

$$y_k^i = (t_k^i - t_k^{i-1}) - H \quad (3.5)$$

식(2.4)로부터 식(3.5)를 대입하면 식(3.6)을 얻는다.

$$(1-C)y_{k+1}^i + Cy_{k+1}^{i-1} = y_k^i = \delta u_k^i + \delta W_k^i \quad (3.6)$$

식(3.6)에서  $\delta u_k^i = u_k^i - u_k^{i-1}$  이고  $\delta W_k^i = W_k^i - W_k^{i-1}$  이다.

식(3.4)와 (3.6)은 비슷하게 구성되어 있으며 동등한 것을 나타낸다. 식(3.4)는 출발시간에 의해 표현되어진 식이며 식(3.6)은 시간 간격에 의해 표현되어진 식이다. 식(3.4)는 식(3.6)이 시간가격의 레귤레이션에 사용될 때 그 운행되는 열차의 공칭시간을 위한 레퍼런스로 사용되어질 수 있다. 최소 운전 시격이 정해지면 식(2.4)처럼 지연 요소로 인해 지연이 발생되고 이는 식(3.6)으로 표현되어질 수 있다. 주어진 비순환형 선로에서 열차의 대수가 주어지면 다음과 같이 식이 성립한다.

$$MH = \sum_{k=1}^N R_k + N(S + CH) \quad (3.7)$$

어떤 주어진 선로에 열차의 대수가 정해져 있다면 식(3.7)을 만족하는 운전시격은 유일하다. 이러한 운전시격을 자연적 운전시격이라 한다. 시스템 모델링을 위하여 다음과 같이 매트릭스를 정의한다.

$In$ 은  $N \times N$  unity matrix,  $D1(a)$ 는  $N \times M$  matrix,  $D2(a, b)$ 는  $N \times M$  matrix,  $S_N$ 은  $N \times N$  permutation Matrix이며 특성 다항식은 다음과 같이 된다.

$$P(\lambda) = \lambda^{N-M} (\lambda - a)^M - b^M \quad (3.8)$$

### 3.2 공칭 열차 운전 최적제어

이 장에서는 식(3.4)에 의한  $X_k^i$  즉, 실제 출발시간과 공칭 출발시간과의 차의 집합으로 표현되는 상태 공간 방정식을 유도한다. 순환 형에서 초기조건으로 첫 번째 열차(i=0)는 모든 k 플랫폼에서 지연이 없으며 첫 번째 platform(k=0)에서는 모든 열차가 지연이 없음을 가정한다.

여기에서 식(3.4)를 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$(1 - C_{k+1})X_{k+1}^i + C_{k+1}X_{k+1}^{i-1} = X_k^i + u_k^i + W_k^i \quad (3.9)$$

여기에서  $k \geq 0$  이고  $i \geq 1$ 이다.

임의의 platform k에서 i열차들의 시편차 벡터를  $X_k^i$ 라 하면  $X_k^s = [X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^i, \dots, X_k^I]^T$ 이며, 제어나 외란이 없으면 식(3.9)은 다음과 같이 된다.

$$X_{k+1}^s = A_k^s \cdot X_k^s \quad (3.10)$$

여기서,  $A_k^s$ 는

$$A_k^s = \begin{bmatrix} 1 - C_{k-1} & 0 & & 0 \\ C_{k-1} & 1 - C_{k-1} & & \\ & & & \\ & & & 0 \\ 0 & & & C_{k-1} & 1 - C_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{1 - C_{k+1}} > 1$  을 갖는 lower triangular matrix이다.

식(4.10)는 stationary가 아니기 때문에 안정성을 판별할 수가 없다. 임의의 platform k에서 i 열차의

시편차의 Mean-square 값을  $T_k = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (X_k^i)^2$  이라고 정의하면 정상적인 운행일때는 이 Mean-square 값은 0이 된다. 모든  $C_k > 0$ 에 대해 임의의 주어진 플랫폼에서  $T_k > 0$ 이면  $T_k$ 는 열차가 진행함에 따라 커진다. 즉  $T_{k+1} > T_k$  ( $k \geq 1$ ). 이는 이 시스템이 불안정함을 나타낸다. 상태방정식은  $x_{k+1} = A_k x_k + u_k$  인 상태를 갖는 식(3.9)로 나타낼 수 있다. 순환형 선로인 경우에는 비순환형 선로에 비해 첫 번째 역에서의 열차가 그 전역 즉 n 번째 역으로부터 발생하는 시간항목을 갖는다는 것이다. 여기에서 예를 들어 n=5 즉 플랫폼이 5개이고 열차가 3개인 경우에 상태 벡터를 구하기 위해서 연속적인 회로 i와 i+1을 다음과 같이 고려할 수 있다.

{ X13, X23, X33, X42, X51 } 시편차 집합을 설정하면 마지막 3개요소인 X33, X42, X51은 2개의 index 즉 열차와 platform의 index의 합이 같음을 알 수 있으며 처음 2개의 요소는 열차 3과 관련 있음을 알 수 있다.

여기에서 식(3.9)에 의해 이 5개의 요소가 생성됨을 알 수 있다. 회로 i를 고려해 보면 { X53, X13, X22, X32, X41 }의 state 집합을 만들 수 있다. 여기에서 state vector를 (N-M)요소 까지는 열차[M]에 관련되고 그 나머지 (M) 요소는 열차와 플랫폼의 순번의 일치된 항으로 규정되어 질 수 있음을 알 수 있다.

이러한 관계를 상태공간 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$X_{j+1} = A X_j + B[u_j + W_j] \quad (3.11)$$

여기에서 A는 3.1절에서 정의된 기호를 사용하면 다음과 같이 된다.

$$A = D_2 \left( \frac{1}{1-c}, \frac{-c}{1-c} \right) \quad (3.12a)$$

$$B = D_i \left( \frac{-1}{1-c} \right) \quad (3.12b)$$

그러므로 상태벡터, 제어벡터, 외란벡터들은 다음과 같이 된다.

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i-N}^M \\ X_{i-N+1}^M \\ \vdots \\ X_{i-M+1}^M \\ X_{i-M+1}^{M-1} \\ \vdots \\ X_{i-1}^1 \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} U_{i-M}^M \\ U_{i-M+1}^{M-1} \\ \vdots \\ U_{i-1}^1 \end{bmatrix} \quad W_i = \begin{bmatrix} W_{i-M}^M \\ W_{i-M+1}^{M-1} \\ \vdots \\ W_{i-1}^1 \end{bmatrix}$$

상태공간 시스템의 안정성을 판별하기 위하여 첫번째로  $c=0$  으로 가정하자. 이 경우는 어떤 플랫폼에서 연속적으로 운행되는 열차의 출발시간차이가 시편차에 영향을 끼치지 않는 경우이다. 그러며, A에 대한 특성 방정식은 식(4.13)와 같게 된다.

$$\lambda^{N-M} (\lambda - 1)^M = 0 \quad (3.13)$$

식(3.13)에서 A에 대한 고유치는 0과 1이 된다. 이 식에서부터 A는 지수 함수적으로 안정적임을 알 수 있다. 이것은 경계로 되어지는 외란에 대해서 안정성을 보장할 수 없음을 나타낸다. 보다 일반적인 경우  $c>0$ 에서 A의 고유치를 구해보면 A의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\lambda^{N-M} \left( \lambda - \frac{1}{1-c} \right)^M - \left( \frac{-c}{1-c} \right)^M = 0 \quad (3.14)$$

고유치 값 중 하나는 1이 틀림없다. M의 홀수 값과 짝수 값은  $1 < \frac{1}{1-c} < \lambda_1$  을 대입함으로써 근사치 영역에 가깝게 있음을 증명할 수 있다. 이 결과로 인해 시스템은 불안정함을 알 수 있으며 이 시스템을 안정화하기 위하여 최적 제어를 적용한다. 열차 운전 최적 제어는 발산되어지는 대상을 반영하는 성능지수(performance index)를 최소화하는 것으로 설계되어진다. 식(3.11)인 동적방정식을 보면 선형임을 알 수 있고 이는 LQ 문제에서 quadratic 순변을 선택할 수 있음을 알 수 있다. 어떤 주어진 단계인 즉  $X_j$ 에서 다음과 같은 성능지수를 설정한다.

$$J_I = X_{j+1}^T P X_{j+1} + (X_{j+1} - S_N X_j)^T Q (X_{j+1} - Q X_j) + u_j^T u_j \quad (3.15)$$

$S_N$  은  $N \times N$  permutation Matrix이고 P, Q는 각각 양수로 설계된 매개변수들이다.

식(3.15)를 살펴보면 처음 두 항은 연속적인 두 열차간의 공칭 시간계획에 관하여 차이를 의미하는 시편차를 규정한다. 세 번째 항은 제어항을 의미한다.

선형시스템인 식(3.11)에서의 식(3.15)에서의  $X_j$ 는 선형이다.

플랫폼 k에서 열차 j에 적용되어지는 제어는 매우 간단하게 평가되어질 수 있으며 매우 쉽게 적용되어질 수 있다. 즉 제어항은 식(3.16)로 풀면된다.

$$u_k^i = -g x_k^i - f x_{k+1}^{i-1} \quad (3.16)$$

식(3.16)은 다음과 같은 2가지 편차에 의한 선형결합 관계임을 나타낸다.

가중 계수(-g)를 갖는 열차  $X_{ki}$ 의 시편차와 가중 계수(-f)를 갖는 앞 플랫폼에서의 후속열차의 시편차이다.

### 3.3 공칭 열차 운전 최적제어 동작

식(3.15)에 의하여 상태 제환을 갖는 순환형 시스템은 다음 식과 같이 된다.

$$X_{j+1} = AX_j + BW_j \quad (3.17)$$

여기서  $\bar{A} = D_2 \left[ \frac{(1-c)^2}{(p+q)+(1-c)^2}, \frac{q-c(1-c)}{(p+q)+(1-c)^2} \right]$  이다.

여기서  $q > c(1-c)$ 인 경우에 만약  $p=0$ 이면  $\bar{A}$ 의 고유치 중 하나는 1일 것이며 나머지는 단위 원 안에 있을 것이다.

만약  $p > 0$ 이면  $\bar{A}$ 의 모든 고유치는 단위 원 안에 존재할 것이다.  $p > 0$ 이며  $q > c(1-c)$ 인 경우에 식 (4.17)의 순환형 선로의 시스템은 지수 함수적으로 안정함을 알 수 있다. 그러나  $p=0$ 인 경우에는 지수 함수적으로 안정하지 않다. 그 시스템의 고유치 중 하나가 1이기 때문이다. 만약 외란이 없는 경우에는 이 해는 공칭 시편차에 수렴하고 이는 공칭 운전계획과 시편차가 없다는 것을 의미한다.

### 3.4 시편차 열차 운전

식(3.6)을 상태 공간 방정식으로 쓰면 다음과 같다.

$$(1-C)Y_{k+1}^i + C \cdot Y_{k+1}^{i-1} = Y_k^i + \delta u_k^i + \delta w_k^i \quad (3.18)$$

변수  $Y_k^i$ 에 관해 표현하면

$$Y_{j+1} = AY_j + B(\Delta u_j + \Delta W_j) \quad (3.19)$$

여기에서 A와 B는 식(3.12)에서 정의된 다음의 식과 같다.

$$A = D_2 \left( \frac{1}{1-C}, \frac{-C}{1-C} \right) \quad B = D_1 \left( \frac{1}{1-C} \right)$$

식(3.4)에서의  $Y_j$ 의 N개의 요소인  $Y_{k+1}^i$  각각은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_{k+1}^i &= C(t_{k+1}^i - t_{k+1}^{i-1} - H) \\ &= -CH + t_{k+1}^i - t_k^i - S - R_k - u_k^i - w_k^i \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\bar{u}_{j-1}$  과  $\bar{w}_{j-1}$ 의 정의를 사용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$b_1^T Y_j + b_2^T [\bar{u}_{j-1} + \bar{w}_{j-1}] = MH - \sum_{i=1}^N R_k - NS - NCH \quad (3.21)$$

식(3.21)의 어떤 j에 대하여  $(Y_j, \bar{u}_{j-1}, \bar{w}_{j-1})$ 은 다음식을 만족한다.

$$b_1^T Y_j + b_2^T [\bar{u}_{j-1} + \bar{w}_{j-1}] = 0 \quad (3.22)$$

만약  $(Y_j, \bar{u}_{j-1}, \bar{w}_{j-1})$ 가 식(3.21)을 만족한다면 식(3.19)는 식(3.22)에 의해서  $(Y_j, \bar{u}_{j-1}, \bar{w}_{j-1})$ 값을 얻을 수 있다. 만약  $\Delta U_j = \Delta W_j = 0$  이라면 다음과 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{j+1} \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ U_{j-1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

식(3.23)의 상태정렬의 고유치를 조사하면,

· A : C > 0인 경우에 적어도 하나의 고유치가 단위 원 밖에 근접하게 존재할 것이다.

· SN : N개의 고유치가 단위 원 위에 존재할 것이다.

만약  $\lambda$  1을 고유치라 하고 [V1T V2T]T 고유치 벡터를 가정하면

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b_1^T & b_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & o \\ o & S_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ & = b_1^T A u_1 + b_2^T S_N u_2 = \lambda_1 [b_1^T + b_2^T u_2] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$A^T b_1 = b_1$  그리고  $S_N^T b_2 = b_2$  이므로  $(\lambda_1 - 1)(b_1^T u_1 + b_2^T u_2) = 0$  이 된다.

그러므로  $\lambda_1 \neq 1$  이면  $b_1^T u_1 + b_2^T u_2 = 0$  이 된다.

이것은 고유치가 1이 아닌 고유치에 관련되는 고유치 벡터들은

$b_1^T Y_j + b_2^T (u_{j-1} + W_{j-1}) = 0$  을 만족한다.

여기서  $b_1 = [ \underset{N-M}{c}, \quad c, (c-1), \quad \underset{M}{(c-1)} ]^T$

$b_2 = [1, \dots, 1]^T$  이다.

이것은 식(3.22)을 만족하는 고유치 벡터는 적어도 하나의 고유치가 단위원 밖에 근접해 있음을 나타내는 것을 의미하며  $C > 0$  인 경우에 식(3.23)의 제곱은 식(3.24)를 만족하며  $\|Y_{j+1}\| > \|Y_j\|$  임을 알 수 있다. 이 결과는 식(3.23)가 불안정함을 나타낸다.

### 3.5 시편차 열차 운전 최적제어

앞 3.2절에서 언급된 것처럼 열차 운전 최적 제어 설계는 quadratic performance index를 최소화하기 위한 문제이다. 이 장에서 식(3.19)와 식(3.20)으로 표현되는 system의 performance index를

$$J_2 = Y_{j-1}^T \cdot Q Y_{j+1} + \bar{u}_j^T \cdot \bar{u}_j \quad (3.25)$$

라 하면 (여기서 Q는 제 3.4절에서 식(3.14)에 언급된 Q와 같다) 결과로 얻어지는 제어는  $Y_j$ 와  $\bar{u}_{j-1}$ 에서 선형이 되며 다음과 같다.

$$\Delta u_j = K_1 Y_{j+1} + K_2 \bar{u}_j \quad (3.26)$$

여기에서  $K_1$ 과  $K_2$ 는 다음과 같고,

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g & f & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 & & & & & f \\ f & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 & & & & & h \\ h & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \frac{q-c}{q+(1-c)^2}, g = \frac{-q}{q+(1-c)^2}, h = \frac{(1-c)^2}{q+(1-c)^2} \text{ 이다.}$$

Platform k에서 열차 i에 적용되는 제어 행위는 다음과 같이 적용된다.

$$u_k^i = (1+b)u_k^{i-1} + gY_k^i + fY_{k+1}^{i-1} \quad (3.27)$$



식(3.27)을 살펴보면 다음과 같은 선형적 결합임을 알 수 있다.

- ①  $U_{k-1}$  : platform k에서 선행열차 (i-1)에 적용된 제어 vector
- ②  $Y_k$  : platform k에서 열차[i]와 열차[i-1] 사이의 시편차의 차이
- ③  $Y_{k+1}$  : platform (k+1)에서 열차 [i-2]와 [i-1] 사이의 시편차의 차이

### 3.6 시편차 열차 운전 최적제어 동작

식(3.26)에서의 제어항은 식(3.14)에서  $P=0$ 일때와 동등하다. 즉 운전시격만을 위한 제어 조정의 목적으로 되는 것이다.

$$y_k^i = t_k^i - t_k^{i-1} - H = X_k^i - X_k^{i-1} \quad (3.28)$$

이때 식(3.4)와 (3.27)을 사용하면 제어항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_k^i = \frac{q}{q + (1-c)^2} (x_k^{i-1} - x_k^i) \quad (3.29)$$

이 제어항목은  $p=0$ 일때 control law이다.

만약  $q > (c(1-c))$ 이라면  $P=0$ 이면  $X_{j+1} = AX_j + BW_j$  인 시스템의  $A$ 의 고유치가 하나가 1이면 다른 고유치들은 단위원안에 근접해 있음을 알 수 있고, 만약  $p > 0$ 인 경우에는  $A$ 의 모든 고유치들이 단위원안에 근접해 있음을 알 수 있으므로 이러한 제어에서 외란이 없는 경우 즉  $q > c(1-c)$ 인 경우에는 모든  $X_k^i$ 는 일정하게 유지되며 정상상태도 그 시스템이 수렴됨을 알 수 있다. 이는 공칭시격인 H와 무관함을 알 수 있다. 즉, 시격조정제어는 공칭시간과는 무관함을 나타낸다.

## 4 장 시뮬레이션

### 4.1 공칭 운전 시격 제어 시뮬레이션

공칭 최소 운전시격 H를 제어목표로 하여 시뮬레이션을 하였다. 시뮬레이션의 간략화를 위하여 열차대수를 4대, 역수를 5개로 하여 이산치 접근을 구현하였다. 시뮬레이션에 나타나는 값들의 각각의 역에서 출발하는 시간을 나타낸다. 이 장에서 언급되는 내용은 앞장에서 언급되었던 열차 운전 제어 시스템의 제어 입력에 대하여 온라인으로 수정될 수 있는 열차 운행계획의 회복에 있다. 역순서로 여섯번째 역은 첫 번째 역과 동일한 역이다. 시뮬레이션 조건은 다음과 같다. C(자연계수)값은 0.01에서 0.05 사이의 값으로 임의로 설정하였다. 최소 정차시간은 1초로하고 종단역에서도 같은 정차시간을 설정하였다. 각 역마다 운행시간을 2분 30초로 하였다. 공칭 운전시격 H를 34초로 하였다.

#### 4.1.1 제어입력이 없는 경우의 시뮬레이션

그림 4.1에서 보여진 것은 공칭운행표이다. 열차 4대가 공칭운전시격에 따라 운행되어지는 것을 알 수 있다.

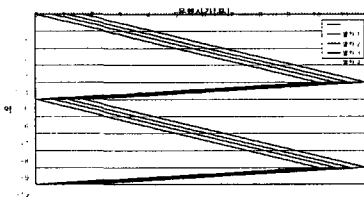


그림 4.1 공칭 운전 시격에 의한 운행(H=34)

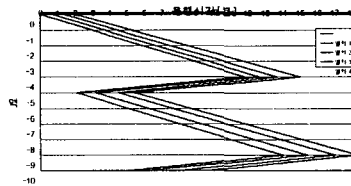


그림 4.2 Control 입력이 없을 때 열차운행 (작은 외란 발생,  $C_k=0.02$ )

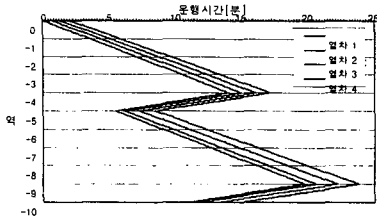


그림 4.3 control 입력이 없을 때 열차운행  
(큰 외란 발생,  $C_k=0.05$ )

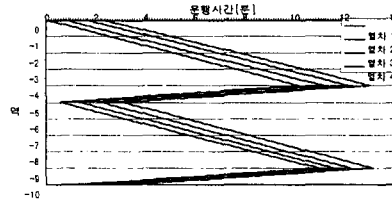


그림 4.4  $C_k=0.02$ 인 경우 최적제어를 갖는 열차운행

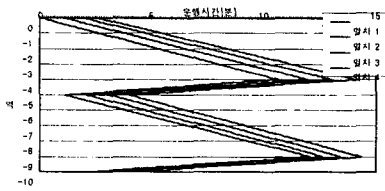


그림 4.5  $C_k=0.05$ 인 경우 최적제어를 갖는 열차운행

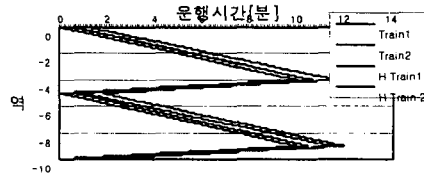


그림 4.6 공칭 운전 대 최적제어 운전

#### 4.1.2 제어입력 시뮬레이션

제어입력이 없는 경우에서 정의된 시스템에  $p=q=1$ 인 제어입력을 추가한 경우에는 그림 4.4, 4.5, 4.6와 같은 결과를 얻을 수 있다. 이러한 시뮬레이션으로 인해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- 1) 열차운행 제어 시스템으로 인해 공칭 운전 시격을 제어 대상으로하여 운전할 수 있으며 이러한 제어는 온라인 상에서 가능하다. 이러한 점으로 인해서 경제적인 운행 방법이 된다.
- 2) 이러한 온라인 운전제어의 열차 운전 성능지수는 기존의 방법인 종단역에서의 시간 여유분을 갖는 시스템보다 더욱 효율적임을 알 수 있다. 이는 열차운행 시스템에서 선로용량을 증가시킨다.

#### 4.2 시편차 제어 시뮬레이션

시스템 성능지수  $J_2 = Y_{j+1}^T \cdot QY_{j+1} + \bar{u}_j^T \cdot \bar{u}_j$  라 하면 제어입력  $u_k^i$ 는 다음과 같이 된다.

$$u_k^i = (1+b)u_k^{i-1} + gY_k^i + fY_{k+1}^i$$

운전시격만을 위한 제어조정을 목적으로 하면

$$Y_k^i = t_k^i - t_k^{i-1} - H = X_k^i - X_k^{i-1} \quad \text{가 되므로}$$

$X_{j+1} = AX_j + BW_j$  을 시스템 상태방정식으로 하여 시뮬레이션 결과 그림 4.7을 얻을 수 있다. 이는 Control입력이 있는 경우에는 공칭과 무관하며 열차 출발시각에 수렴됨을 알 수 있다.

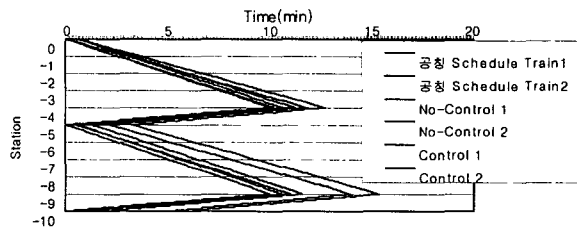


그림 4.7 시편차 제어 입력을 갖는 경우의 열차

#### 5. 결론

본 논문은 운송개선에 관한 열차 운행 시스템의 여러 가지 조건 중 최소 운전시격, 지연시 발생되는

불안정성에 대한 제어 및 열차 운행 계획에 관한 정리 알고리즘에 관한 것이다.

지하철 선로에서 순환형 선로에 적용되는 선형적 모델을 제시하였고, 공칭 최소 운전시격을 제어목표로 하여 최적 제어 법칙을 제시한 선형적 모델에 적용하였다.

이 논문에선 2개의 상태공간 방정식을 제시하였는데 하나는 공칭 운전시격에 관한 것이고 다른 하나는 연속된 두 열차간의 운전시격에 관한 것이다. 아울러 본 논문에서는 최소 공칭 운전시격을 구하기 위하여 선형 대수 방정식을 도입하여 이를 서울-수원간 전철구간에 적용시켰다.

본 연구의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

1) 열차의 지연으로 인해 열차 운행 시스템은 불안정함을 보였다. 선행열차의 지연으로 인해 후속 열차의 지연 시간이 누적되어 나타났다. 이러한 불안정으로 되는 요소를 제어하기 위하여 선형 모델링을 통한 최적 제어 법칙을 사용한 결과 공칭 운전 시격에 수렴하는 운행시간을 나타낼 수 있었다.

2) 최적 제어 법칙을 사용하면 온라인 상에서 즉시 응답 가능하므로 실제 지연이 야기되는 상황에서도 즉시 사용 가능하다. 또한 주어진 선형 모델은 비순환선로에서나 순환형 선로에서나 공히 적용될 수 있음을 보였다. 온라인상 구축되므로 시스템의 설치, 구현상 경제적 이익을 얻을 수 있다.

앞으로 열차가 지연이 발생하여도 최소 공칭 운전시격으로 정상상태로 가능한 빨리 운행되기 위해서 열차 운행제어에 관한 비선형성 연구뿐만 아니라 열차 운행계획표의 정리에 관해서도 연구가 필요하다.

#### 참고문헌

- [1] Van. Breusegem, V.Campion G., Bastin G. "Simulation and Control of the Traffic of Metro lines", Proc. European Simulation Multiconference, Conference on Simulation in Traffic Control, Nice, June, 1988.
- [2] Van. Breusegem, V.Campion, G., Bastin G. "Traffic modelling and state feedback Control for metro lines", Technical Report for IFAC, June, 1989.
- [3] B.Melliff, C.J. Goodman and R.I.M. Arthurton, "Simulator for studying operational and power-supply conditions in rapid transit railways", IEE Proceedings, April, 1978. Vol.125, no.4, pp298-303.
- [4] E. R. Peterson and R. Merchant, "Scheduling of trains in a linear railway system", INFOR Journal, August 1981, vol. 19, no.3, pp246-258.