Korean Society of Surveying, Geodesy, Photogrammetry, and Cartography 2003 / Busan / Korea

3차원 위치측설의 원리와 응용

Principles and Applications of 3-Dimensional Position Setting Out

이창경[1], 김창우[2]

[1] 군산대학교 토목환경공학부 교수
[2] 국립지리원 지도과 기사

1. 연구배경 및 목적

대개 지형측량에서는 눈에 보이는 대상물의 위치는 기준점과 측점간의 경사거리와 수평각 및 연직각을 측정하고 전방교회법이나 후방교회법의 원리를 적용하여 정해진다. 반면에 노선측량에서는 설계된 노선 중심점을 현장에 측설하는 일이 주요한 업무의 하나이다. 국내외에서 개발된 노선측량용 프로그램(예: SurveyPro, 태양도기(주))을 보면, 위치가 정해진 지점을 현장에 측설할 때 평면위치만을 고려하여 시행착오법으로 수행되도록 만들어 졌다. 즉, 측량기사에게 노선중심점의 설계좌표와 추정지점(ToTal station 사용시 반사경 세운 지점)의 평면상 좌표차를 극좌표(거리와 수평각), 또는 평면직각좌표법(임의 축방향과 그 직각방향)으로 계산한 정보를 제공하여 반사겨의 위치를 보정하는 과정을 필요한 오차범위내에 반사경이 위치할 때까지 반복한다. 반면에, 도로중심말뚝의 표고는 수준측량에 의해 정해진다.

한편, 대형 플랜트나 선박 등에서 그 구조물의 중심축 단면이나, 그 단면의 기울기, 중심축 단면과 임의단면의 교차선상의 점 측설에 있어서는, 위에서 기술한 평면위치와 높이를 분리하여 측설하는 방법은 적용하기 난감하다. 본 연구에서는 외
구조물의 외벽이 평평하지 않아, 외벽의 모서리점 좌표로부터 구조물의 중심축 단면의 기울기와 중심축과 임의 단면이 교차하는 직선상의 점 측설에 대한 기하학적 원리식를 유도하고, 이를 선박 측량에 적용한 결과를 분석하여, 일반측량장비(Total Station)에 의한 3차원 측설의 편리를 도모하고자 하는데 그 목적이 있다.

2. 3차원 공간상의 직선 및 평면방정식

2.1 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$과 점 $P_2(x_2, y_2, z_2)$를 잇는 직선상의 점 $P(x, y, z)$

<그림 1>에서 두점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$과 점 $P_2(x_2, y_2, z_2)$를 잇는 직선상의 점 $P(x, y, z)$의 좌표는 k를 상수라 하면 다음 식(1)과 같다.

$$\begin{aligned} x &= x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + k(z_2 - z_1) \end{aligned} \qquad \text{.......(1)}$$

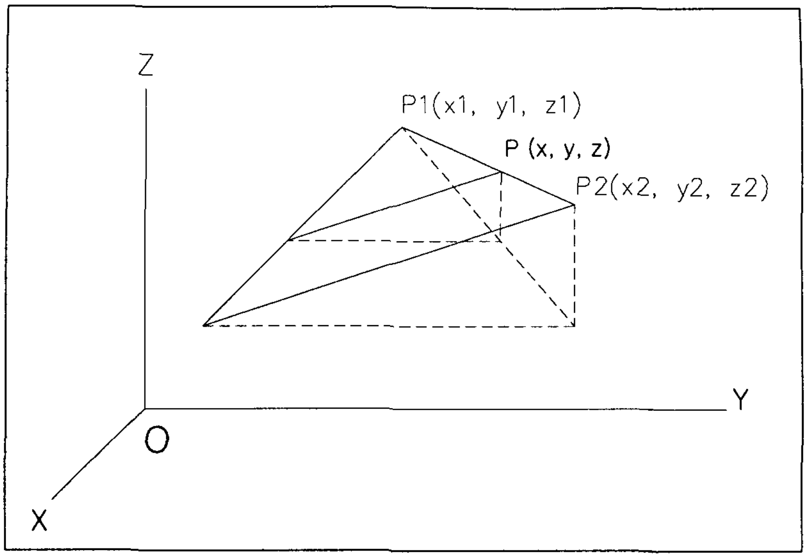


그림 1. 두 점을 잇는 직선상의 점 ㅔ

2.2 두 직선(r_1과 r_2)이 만나서 이루는 교각(ϕ)

<그림 2>에서 평면 삼각형 $\triangle OP_1P_2$에 Cosine 법칙을 적용하면

$$\cos\phi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} \qquad \text{......(2)}$$

이고, 직선 r_1의 방향수(direction number)를 $[a_1, b_1, c_1]$, 직선 r_2의 방향수를 $[a_2, b_2, c_2]$ 라 하면,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \\ r_2^2 &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \\ d^2 &= (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2 \end{aligned} \qquad \text{......(3)}$$

이므로 식(2)는

$$\cos\phi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \text{......(4)}$$

이 된다. 이때에 직선 r1과 직선 r2가 서로 직각이라면, cos ϕ = 0이다. 즉, 식(4)에서

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \qquad \text{......(5)}$$

가 되어야 한다.

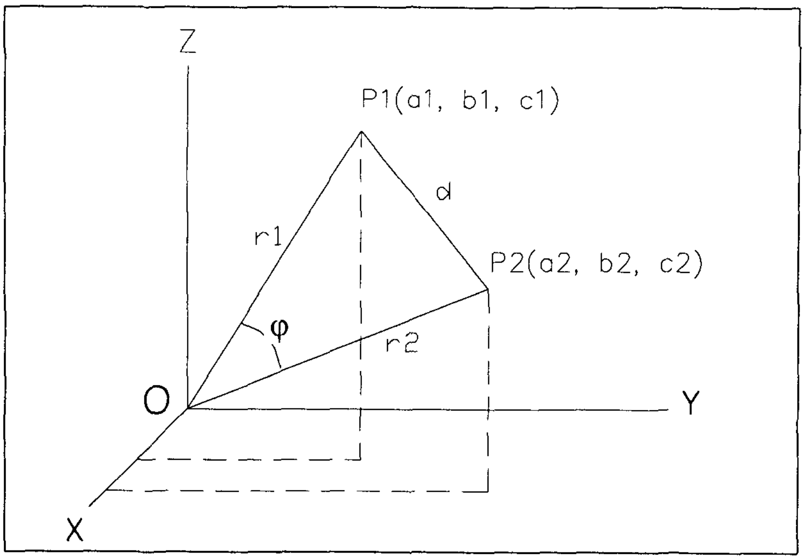


그림 2. 두 직선의 교각

2.3 평면의 식

<그림 3>에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$과 점 P(x, y, z)가 평면RS상에 있을 때, 두 점을 잇는 직선 P_0P의 방향수는 [$x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$]이다. 또한, 직선 L[A, B, C]가 점 P_0을 지나며, 직선 P_0P에 직각이라면, 식(5)로부터

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \qquad (6)$$

이 된다. 이를 평면의 점방향 형태식(Point direction form of the equation of a plane) 이라 한다. 이를 정리하면 다음과 같이 평면의 일반식을 얻을 수 있다.

$$Ax+By+Cz+D = 0 \qquad (7)$$

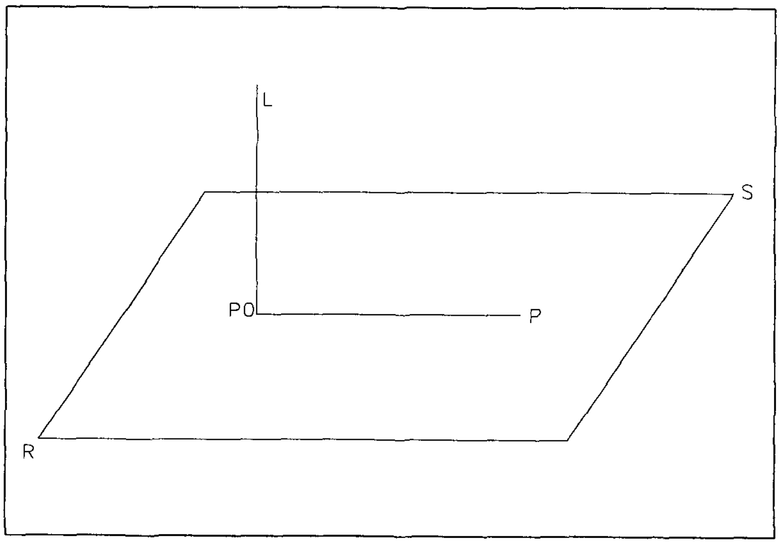


그림 3. 임의 직선과 직각인 평면

3. 3차원 위치측설에 적용

3.1 단면의 식 결정

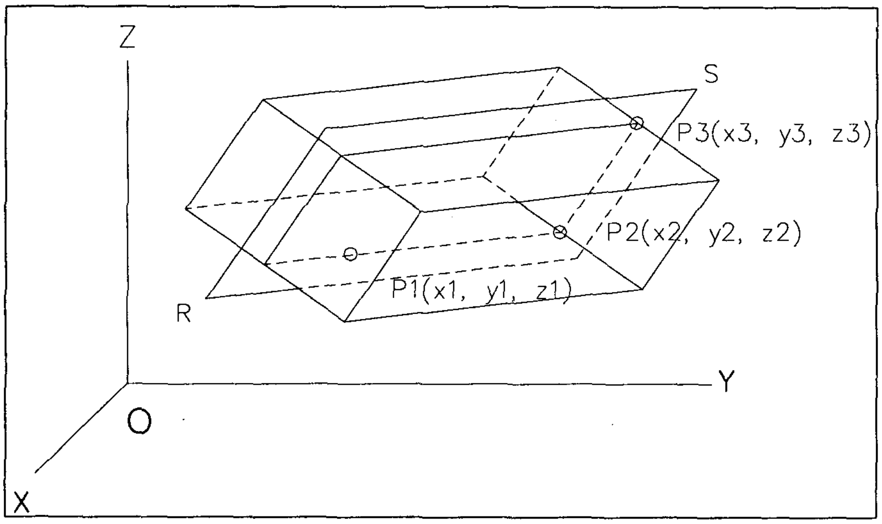
<그림 4>에서 구조물의 중심축 단면RS 지나는 3점(P_1, P_2, P_3)의 좌표를 측정하였다면, 이 좌표로부터 단면RS의 일반식을 유도할 수 있다. 즉, 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$는 모두 한 단면RS상에 있으므로, 이 3점은 식(6)을 만족시켜야 한다. 따라서, 다음과 같은 평면방정식 3개를 얻을 수 있다.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0$$

$$A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2) = 0$$

$$A(x-x_3)+B(y-y_3)+C(z-z_3) = 0 \qquad \text{......(8)}$$

윗 식(8), 식(9), 식(10)은 3원 1차 선형방정식이고, 이 식들에 포함된 미지수는 3개이므로, 이 3개의 연립방정식으로부터 미지수 A, B, C를 구할 수 있다. 즉, 3점이 지나는 평면의 식을 구할 수 있다. 만일, 동일 단면상에 있는 4점 이상의 점을 측정하였다면, 평면방정식의 계수 A, B, C를 최소제곱법에 의해 구할 수 있다.



<그림 4> 중심축 단면상의 3점을 지나는 평면

3.2 단면과 단면의 교차선 연장방법

<그림 5>에서 구조물의 중심축 단면RS를 나타내는 지점이 P1, P2, P3와 같이 배치되어 있고, 그 물체의 이면에는 중심축의 단면을 알 수 없을 때, 이를 단면TU상에 표시하는 방법을 고려하고자 한다. 단<그림 5>에서 구조물의 중심축 단면RS와 단면TU가 교차하는 직선상의 한 점을Q5(x_5, y_5, z_5)라 하자. 이 지점을 측설하고자 할 때, 그 지점의 위치를 정하는 방법은 Total Station에 의해 좌표법으로 그 점이라 추정되는 공간상의 한 점의 좌표 x_5', y_5', z_5'를 구하고, 이 좌표와 측설하고자 하는 좌표의 차이를 구하여 시행착오법으로 정확한 위치를 찾아가는 방법이 있을 것이나, 구조물의 규모가 큰 경우 이 방법이 적합하지 않다.

이에 대한 대안으로, 임의 단면TU상에 중심축 단면RS의 좌우에 점 Q4(x_4, y_4, z_4),

점 Q6(x_6, y_6, z_6)을 측정하여 표기하고, 이 두 점을 잇는 직선과 중심축 단면RS의 교점을 Q5(x_5, y_5, z_5)라 하면, 두 점을 지나는 직선의 식 (1)로 부터 다음과 같은 연립방정식이 성립한다.

$$x_5 = x_4 + k(x_6 - x_4)$$
$$y_5 = y_4 + k(y_6 - y_4)$$
$$z_5 = z_4 + k(z_6 - z_4) \qquad \text{.........}(9)$$

이 점 Q5(x_5, y_5, z_5)는 중심축 단면RS상에 있으므로, 평면의 식 (5)를 만족시켜야 한다.

$$A\{x_4+k(x_6-x_4)\}+B\{y_4+k(y_6-y_4)\}+C\{z_4+k(z_6-z_4)\}+D = 0 \quad \text{......}(10)$$

윗 식 (10)에서 k를 구하면,

$$k=\frac{-(Ax_1+By_{1+Cz_1}+D)}{A(x_2-x_1)+B(y_2-y_{1)}+C(z_2-Z_{1)}} \quad \text{.........}(11)$$

즉, 윗 식(11)에서 k를 구하면, 식(9)로부터 Q5(x_5, y_5, z_5)의 좌표를 구할 수 있고, 점 Q4와 Q5간의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{Q_4Q_5}=\sqrt{(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2+(z_5-z_4)^2} \quad \text{.........}(12)$$

즉, Q4로부터 Q5까지 그은 직선에서 점 Q4로부터 윗 식(12)의 거리만큼 떨어진 지점이 점 Q5이다. 이와같은 과정을 단면TU상 다른 지점에서 실시하여 중심축 단면과 단면TU가 교차하는 지점을, 이 두 덤을 이으면, 이 직선은 중심축 단면RS상와 단면TU의 교차선상의 직선이 된다.

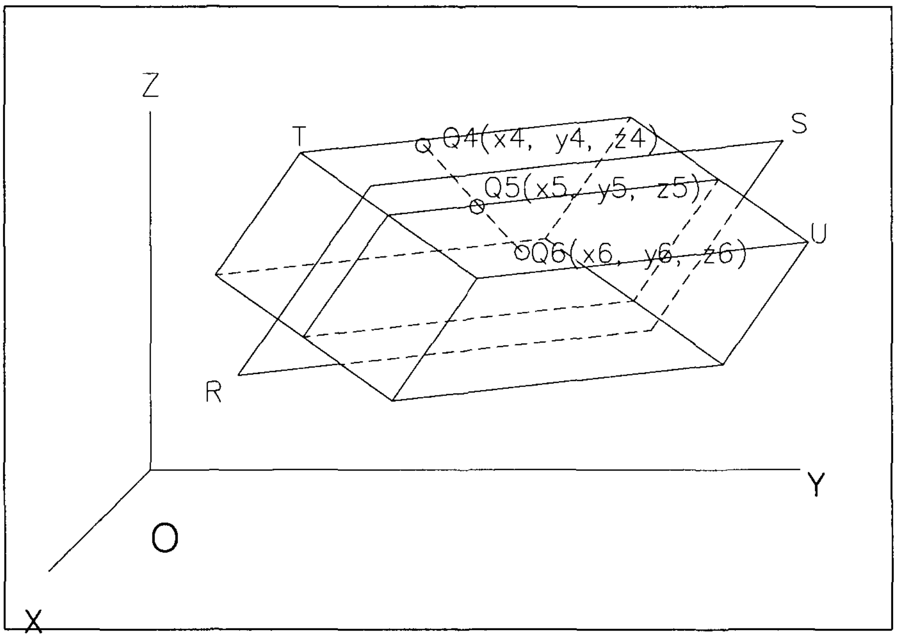


그림 5. 평면TU상의 두 점을 지나는 직선과 중심축 단면RS의 교차점

4. 결 론

본 연구에서 기하학적 원리에 따라 제안한 중심축 단면의 평면방정식 계수 결정법과 이 구조물의 중심축 단면과 임의 단면의 교차선상의 점 측설법은 선박이나, 대형 구조물의 내부측량에 유용하게 사용될 수 있다. 또한, 노선 중심점의 3차원 설치에 이용하면, 측설의 정확도를 높힐 수 있고, 소요시간을 단축할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

이창경,(2002년) "해양수산부 해양조사선 바다로 1호의 정밀좌표측량 보고서", 삼원기업(주).
(주) 태양도기, (2002년), " Survey Pro 사용 설명서"
Thurman S. Peterson, (1979), "Calculus with Analytical Geometry", Happer & Row.