레이놀즈응력모형을 이용한 개수로 흐름의 3차원 수치모의

3-D Simulation of Open-Channel Flows by Reynolds Stress Model

○강형식[1] · 최성욱[2]

1.서론

$k-\varepsilon$모형은 등방성의 난류모형으로서 여러 공학적인 문제에 가장 많이 적용되는 모형이다. 그러나 $k-\varepsilon$ 모형은 레이놀즈응력이 속도경사와 비례한다는 난류점성 개념에 의존하고 있으므로 간단한 전단흐름 외의 복잡한 흐름을 정확히 예측할 수 없다. 또한 $k-\varepsilon$모형은 등방성 모형이므로 난류의 비등방성에 의해 발생되는 이차흐름을 예측할 수 없다. 난류의 비등방성은 세방향으로의 난류강도가 서로 다르게 나타나는 것을 의미하는데, 특히 바닥 경계와 자유수면 근처에서 난류의 비등방성이 더욱 강하게 발생한다. 즉, 바닥과 수면 근처에서 난류의 감쇠효과에 의하여 수직방향의 난류강도는 감소되고, 감소된 양만큼 흐름방향 및 횡방향으로의 난류강도가 증가하게 된다. 또한 바닥에 사련 혹은 사구 등의 하상형상이 존재할 경우 난류의 비등방성이 두드러질 것으로 예측된다. 이와 같이 개수로 흐름에서의 난류의 비등방성을 정확히 예측하기 위해서는 레이놀즈응력모형과 같은 비등방성 난류모형이 필요하다.

본 연구의 목적은 비등방성 난류모형인 레이놀즈응력모형을 이용하여 개수로의 흐름을 수치모의하는 것이다. Navier-Stokes 식을 시간 평균하여 개수로 흐름을 수치모의하기 위한 지배방정식을 구성하였다. 흐름을 등류상태로 가정하여 개수로 흐름에서의 삼차원 수직모형을 구성하고 평균유속 및 이차흐름 분포를 계산하였다. 계산된 결과를 등방성 모형인 $k-\varepsilon$ 모형과 비교하여 일반 개수로에서의 비등방성 효과에 의한 유속분포의 변화를 검토하였다.

2. 지배방정식

레이놀즈 수가 충분히 큰 경우 Navier-Stokes식을 시간평균하여 유도된 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{u_i' u_j'}\right) + g_i \tag{1}$$

여기서 $\overline{u}$는 시간 평균된 i-방향의 유속이며, ρ는 유체의 밀도, ν는 유체 점성, g_i는 중력가속도, 그리고 $-\overline{u_i' u_j'}$는 레이놀즈응력이다. 본 연구에서는 흐름을 등류상태로 가정하여 수치모의 하였다. 따라서 식(1)에서 흐름방향으로의 경사($\partial/\partial x$)는 모두 영이된다.

3. $k-\varepsilon$ 모형

$k-\varepsilon$ 모형은 2-방정식 난류모형 중 가장 많이 사용되어지고 있는 대표적인 모형으로서 여러 난류흐름에 그 적용성이 입증된바 있다. $k-\varepsilon$ 모형은 식(1)에 있는 레이놀즈응력을 다음과 같은 난류점성 개념을 이용하여 구할 수 있다.

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \tag{2}$$

---

1) 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정 (kanghs@yonsei.ac.kr)
2) 연세대학교 공과대학 사회환경시스템공학부 부교수 (schoi@yonsei.ac.kr)

여기서 ν_t는 난류동점성계수이다. 난류동점성계수 ν_t는 Prandtl-Kolmogorov 식($\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$)으로부터 구할 수 있다. Prandtl-Kolmogorov 식에서 C_μ(= 0.09)는 경험상수이며, k와 ε은 각각 시간평균된 난류운동에너지와 난류운동에너지 소산율을 나타내며, 이를 위하여 각각 다음과 같은 수송방정식을 해석한다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \varepsilon \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{4}$$

여기서 P_k는 난류생성항이며, σ_k(= 1.0), σ_ε(= 1.3), $C_{\varepsilon 1}$(= 1.44), $C_{\varepsilon 2}$(= 1.92)는 난류상수이다.

4. 레이놀즈응력모형

레이놀즈응력모형(RSM: Reynolds Stress Model)은 레이놀즈응력항을 난류점성 개념을 사용하지 않고 레이놀즈응력의 수송방정식을 직접 해석하여 구하므로 비등방성 난류흐름을 정확히 예측할 수 있는 장점이 있다. 레이놀즈응력의 수송방정식은 다음과 같다.

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} \tag{5}$$

여기서 R_{ij}는 레이놀즈응력(= $\overline{u_i' u_j'}$), P_{ij}는 전단에 의한 R_{ij}의 생성항, D_{ij}는 R_{ij}의 확산항, Π_{ij}는 압력-변형률 상관항, 그리고 ε_{ij}는 R_{ij}의 소멸항이다. 식(5)의 우변에 있는 각 항 중에서 유일하게 모델링이 필요 없는 항은 레이놀즈응력의 생성항(P_{ij})으로서 다음과 같다.

$$P_{ij} = -\left(-R_{ik}\frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_k} + R_{jk}\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_k}\right) \tag{6}$$

강형식과 최성욱(2002)은 일차원 개수로 흐름에서의 레이놀즈응력모형을 비교한 결과 식(5)의 우변에서 난류확산항에(D_{ij})에 대해서는 MH모형(Mellor와 Herring, 1973)이 기존의 실험결과와 가장 잘 일치하는 것으로 나타났다. 또한 압력-변형률 상관항(Π_{ij})은 SSG모형(Speziale 등, 1991), 레이놀즈응력의 소산률(ε_{ij})은 Hanjalic과 Launder(1972)가 제시한 모형이 다른 모형에 비하여 개수로 흐름에 가장 적합한 모형인 것으로 나타났다. 각각에 대한 모델링 식은 다음과 같다.

$$D_{ij} = C_s\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial R_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} = {} & \alpha_0\varepsilon b_{ij} + \alpha_1\varepsilon(b_{ik}b_{jk} - 1/3\, b_{mn}b_{nm}\delta_{ij}) + \alpha_2 k S_{ij} + \alpha_3 P b_{ij} \\ & + \alpha_4 k(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - 2/3\,\nabla t_{ij} b_{kl}S_{kl}) + \alpha_5 k(b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik})\end{aligned} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{9}$$

여기서 C_s와 α_0- α_5는 각각 난류상수를 나타내며, C_s = 0.11 · 2/3, α_0 = -3.4, α_1 = 4.2, α_2 = 0.3-1.3 $(b_{mn}b_{nm})^{0.5}$, α_3 = -1.8, α_4 = 1.25, α_5 = 0.4이다. 또한 식(8)에서 b_{ij}는 비등방 텐서(anisotropy tensor), S_{ij}는 변형률 텐서(rate of strain tensor), 그리고 W_{ij}는 회전 텐서(rotation tensor)를 나타낸다.

현재까지 개발된 대부분의 레이놀즈응력모형은 주로 내부흐름에 대해 개발되었다. 따라서 개수로 흐름을 수치모의 하기 위해서는 자유수면에서 발생되는 난류의 비등방성 효과를 고려해야 한다. 본 연구에서는 다음과 같이 Gibson과 Launder(1978)가 제시한 모형을 위의 식(8)과 같은 압력-변형률 상관항 모형에 포함시켜 수치모의 하였다.

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} = {} & C_{fs1}\frac{\varepsilon}{k}(R_{mn}\delta_{ij} - 3/2 \cdot R_{ni}\delta_{nj} - 3/2 \cdot R_{nj}\delta_{ni})f_{fs} \\ & + C_{fs2}(\Pi_{mn,2}\delta_{ij} - 3/2 \cdot \Pi_{in,2}\delta_{nj} - 3/2 \cdot \Pi_{nj,2}\delta_{ni})f_{fs}\end{aligned} \tag{10}$$

여기서 C_{fs1}(= 0.5)와 C_{fs2}(= 0.1)은 난류상수이며, f_{fs}는 감쇠함수로서 다음과 같다.

$$f_{fs}=\left(\frac{L}{z_{fs}^{-1}+c_f L}\right)^2 \tag{11}$$

여기서 z_{fs}는 자유수면에서부터의 거리, L은 난류의 길이 스케일을 나타낸다.

5. 수치모의

개발된 수치모형을 이용하여 그림 1과 같은 개수로 흐름에서의 유속분포 및 이차흐름 분포를 계산하였다. 수치모의 조건은 Nezu와 Rodi(1986)의 실험결과를 이용하였다. Nezu와 Rodi(1986)는 LDA를 이용하여 수심(H) 0.1 m, 폭(B) 0.6 m, 경사(So) 0.000123인 개수로 흐름에서의 평균유속 및 난류량을 측정하였다. 수치모의에서는 수로의 좌·우측이 대칭이므로 폭을 0.3 m까지만 계산하였다.

그림 2는 $\overline{u}_{\max}$로 무차원화된 주흐름방향으로의 평균유속 분포를 나타낸 것이다. 비등방 난류모형인 레이놀즈응력모형에 의한 계산결과를 살펴보면 바닥과 측벽 근처에서 등속선이 편향된 모습(bulge)을 보여주고 있다. 그러나 등방성 모형인 $k-\varepsilon$모형에 의한 유속 분포를 살펴보면 등속선이 편향된 현상이 나타나지 않는다. 등속선의 편향은 이차흐름 현상에 기인하며, 이차흐름은 난류의 비등방성에 의해 발생하게 된다(Nezu와 Nakagawa, 1993). 즉, 이와 같은 등속선의 편향은 $\overline{v'^2}-\overline{w'^2}$의 크기에 따라 발생하게 되는데, $k-\varepsilon$모형과 같은 등방성 난류모형은 $\overline{v'^2}-\overline{w'^2}$의 값이 영이므로 이와 같은 편향 형상을 모의 할 수 없다.

그림 3은 레이놀즈응력모형을 이용하여 계산된 이차흐름의 분포를 보여준다. 그림 3을 살펴보면 측벽과 수면근처에서 이차흐름이 가장 크게 발생하며, 전반적인 분포가 실제 흐름현상과 유사한 형태를 나타내는 것을 볼 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 레이놀즈응력모형을 이용하여 개수로 흐름을 수치모의 하였다. 흐름을 등류상태로 가정하여 삼차원의 수직모형을 구성하고 개수로 흐름에서의 평균 유속 분포를 계산하였다. 계산된 결과를 등방성 난류모형인 $k-\varepsilon$모형과 비교하여 개수로 흐름에서의 난류의 비등방성 효과를 검토하였다.

일반 개수로에서 주흐름방향으로의 평균유속 분포를 계산한 결과 레이놀즈응력모형은 이차흐름에 의한 등속선의 편향을 잘 모의하는 것으로 나타났다. 또한 레이놀즈응력모형에 의한 이차흐름 분포 역시 실제 현상과 유사한 형태를 보이는 것으로 나타났다. 그러나 $k-\varepsilon$모형은 등방성 모형이므로 등속선의 편향 형상 및 이차흐름 분포를 모의하지 못하였다.

감사의 글

본 연구는 환경부의 "차세대 핵심환경기술개발사업(Eco-Technopia 21)" 지원에 의해 수행되었으며 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

강형식, 최성욱 (2002). "개수로 흐름에서 레이놀즈응력 모형의 비교." 대한토목학회논문집, 22(1-B), 21-32.

Gibson, M.M. and Launder, B.E. (1978). Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 86, 491-511.

Hanjalic, K. and Launder, B.E. (1972). "A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows." *Journal of Fluid Mechanics*, 52, 609-638.

Mellor, G.L. and Herring, H.J. (1973). "A survey of mean turbulent field closure." *AIAA Journal*, 11, 590-599.

Nezu, I. and Nakagawa, H. (1993). *Turbulence in open channle flows.* IAHR Monograph, A.A.Balkema, Rotterdam.

Nezu, I. and Rodi, W. (1986). "Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer.' *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 112(5), 335-355.

Speziale, C.G., Sarkar, S., and Gatski, T. (1991). "Modeling the pressure strain correlation of turbulence an invariant dynamical systems approach." *Journal of Fluid Mechanics*, 227, 245-272.

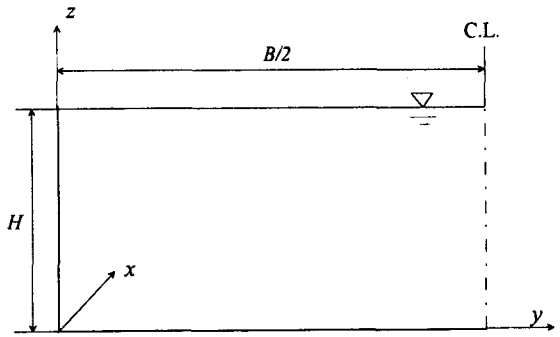
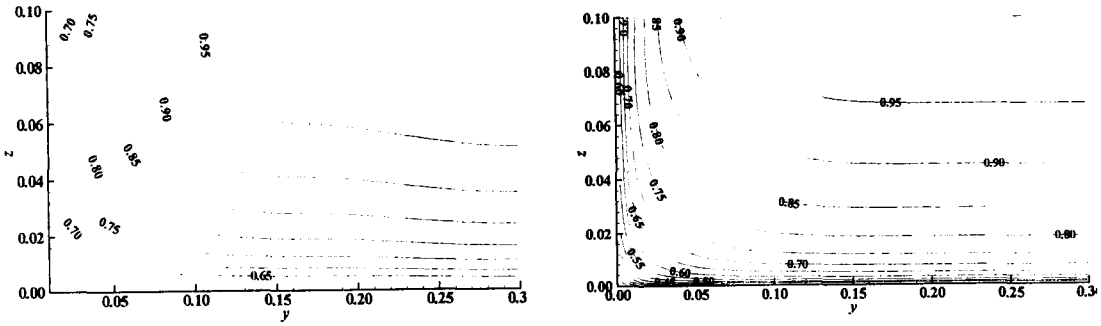


그림 1. 직사각형 개수로



(a) 레이놀즈응력 모형 (b) $k-\epsilon$모형

그림 2. $\overline{u}/\overline{u}_{max}$의 분포

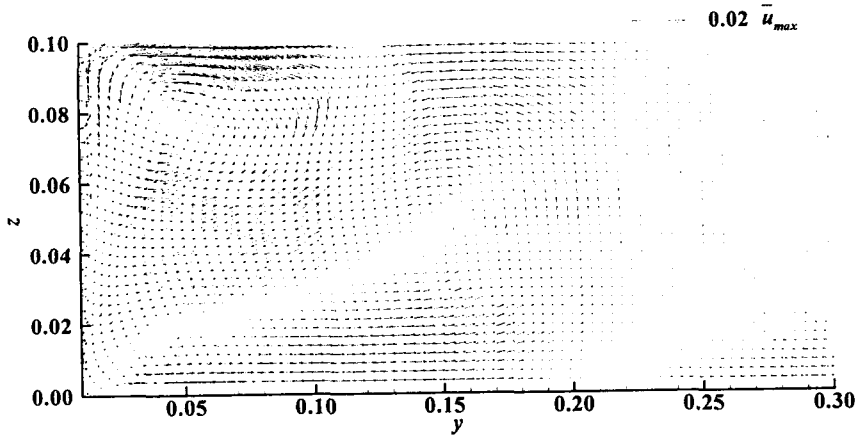


그림 3. 개수로 흐름에서의 이차흐름