

댐 · 제방 붕괴류 해석을 위한 2차원 유한체적모형 개발

○한건연*, 김지성**, 최규현**

1. 서론

지금까지의 수치모형은 불연속적인 천이류 흐름을 해석하기에 계산의 정확도 면에서 문제를 보이고 있으며, 기법의 안정성 면에서도 불연속적인 해의 구간에서 수치진동이 발생하는 등 비현실적인 계산결과를 나타내고 있다. 따라서 본 연구의 목적은 유한체적기법을 사용하여 불연속적인 하천 천이류를 안정적으로 해석할 수 있는 고정확도 수치모형의 개발과 범람홍수가 제내지 마른 하도로 전파되는 경우의 해석상 어려움을 해결함으로써, 주하도의 해석에서부터 제내지까지의 모형 적용성을 검토함에 있다. 이를 위해 가중평균흐름을 (Weighted Average Flux) 기법을 사용한 유한체적모형을 개발하고자 하였고, 개발된 모형은 1차원 불연속 흐름의 경우와 2차원 댐 붕괴파의 경우에 대해서 모의함으로서 모형의 적용성을 입증하였다.

2. 지배방정식

불연속적인 흐름을 해석하기 위하여 보존변수로 이루어진 2차원 천수방정식을 벡터형태로 나타내면 식 (1)과 같다.

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (1)$$

여기서 U 는 보존변수들로 이루어진 물리적 벡터이며, $F(U)$, $G(U)$, $S(U)$ 는 x, y 방향의 흐름율과 생성/소멸 벡터항으로 식 (2)와 같다.

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2(gh^2) \\ huv \end{bmatrix}, G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + 1/2(gh^2) \end{bmatrix}, S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_f) \\ gh(S_{0y} - S_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 $u(x, y, t)$ 와 $v(x, y, t)$ 는 각각 x, y 방향의 유속, g 는 중력가속도, $h(x, y, t)$ 는 수심이며, S_0 와 S_f 는 식 (3)으로 계산된다.

$$S_{0x} = -\partial z_b / \partial x \quad S_{0y} = -\partial z_b / \partial y \quad (3)$$

$$S_{fx} = n^2 u \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3} \quad S_{fy} = n^2 v \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3}$$

유한체적기법은 흐름을 지배하는 미분방정식들을 근사적으로 체적 적분한 것으로, 다각형 격자의 경계를 통해 출입하는 흐름율과 흐름변수들 간의 보존방정식들로 이루어진다.

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV + \int_{\partial Q} H \cdot n dQ = \int_V S dV \quad (4)$$

여기서 Q 는 유한체적의 표면이며, dV 와 dQ 는 각각 미소 체적과 미소 표면으로 정의한다. H 는 유한체적의 표면 Q 의 경계면에 수직방향 흐름을 벡터 F, G 의 텐서로 정의되며, n 은 경계면 바깥 방향으로의 단위 법선벡터이다.

* 경북대학교 토목공학과 교수

** 경북대학교 토목공학과 박사과정

이처럼 지배방정식이 이산화되고나면 유한체적이 불연속적인 초기값을 가짐으로서 Riemann 문제가 발생 되고, 이는 HLL 근사해법으로 Riemann 해를 구하였으며, 유한체적의 경계면을 통해 전달되는 흐름율의 계산에는 WAF 기법을 사용하였다. WAF 기법은 인접한 두 격자의 정보를 모두 사용하여 가중 평균된 값을 두 격자 사이의 흐름율로 산정하는 시간·공간적으로 이차의 정확도를 가지는 기법이다.

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{WAF} = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(U(x, t)) dx dt \quad (5)$$

일반적으로 이차 이상의 고정확도의 수치기법에서는 파의 불연속적인 면에서 수치진동이 발생하므로, 이러한 불연속면에서는 고정확도의 기법보다 불연속성을 잘 모의할 수 있는 고훈상도 수치기법이 유리하다. 이는 임의 시간에서 총 변동량이 시간과 함께 증가하지 않는다는 TVD 기법으로 만족되며, 제한함수를 도입하는 것으로 만족시킬 수 있다.

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|, \quad TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (6)$$

3. 생성항의 처리기법

일반적으로 하상경사의 변동을 포함한 천수방정식을, 흐름율을 차분하는 기법에 근거한 고정확도 수치기법에 적용하면, 실제와는 다르게 바람직하지 않은 결과가 얻어질 수도 있다(Nujic, 1995). 또한 하상경사 항을 포함하는 식 (1)을 split 기법으로 해석할 경우, 동차방정식으로부터 계산된 값의 오차가 분리된 상미분방정식의 결과에 큰 영향을 미치게 되며, 또한 두 방정식의 해석에 서로 다른 수치기법을 사용하기 때문에 정확한 해를 찾는다는 것은 더욱 어려워진다(Leveque, 1998). 따라서 본 연구에서는 LeVeque(1998)가 제안한 Quasi-steady wave propagation 알고리즘을 사용하여 하상경사의 변동항을 해석하였고, 마찰경사의 영향을 반영하기 위해서 일반적으로 많이 사용되는 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 천수 방정식을 풀이하였다.

Quasi-steady wave propagation 알고리즘은 각 격자에 불연속적인 값 U_i^- , U_i^+ 를 도입하는 것이다.

$$\frac{1}{2}(U_i^- + U_i^+) = U_i, \quad \frac{F(U_i^+) - F(U_i^-)}{\Delta x} = S(U_i) \quad (7)$$

첫 번째 조건은 자료의 재구성 후에도 격자의 평균값이 변하지 않게 하기 위한 것이며, 두 번째 조건은 자료의 재구성으로 생성항의 영향을 완전히 반영하게 위함으로 하상경사가 흐름에 미치는 영향이 시간미분항과 무관한 정상상태로 간주됨을 뜻한다. 이러한 유사 정상상태의 가정으로부터 식을 분리하여 먼저 계산된 식의 계산결과를 다음 식을 풀기 위해서 다시 사용하는 split 기법이 필요하지 않게 된다. 이러한 알고리즘을 1차원 천수방정식에 적용해 보면 유사 정상상태 가정으로부터 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} (hu)_x &= 0 \\ (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x &= gh(S_0) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)로부터, 질량 흐름율 hu 의 공간에서의 변화는 없으며 이 값을 m_i 라는 상수로 치환하면 하상경사가 수심 h 의 재구성에만 영향을 미치게 됨을 알 수 있으며, 식 (7)의 첫 번째 조건으로부터 $h_i^\pm = h_i \pm \delta_i$ 로 두고 $S_0 = -\Delta z_i / \Delta x$ 로 치환하면 식 (9)와 같이 차분될 수 있다.

$$m_i^2 \left(\frac{1}{h_i + \delta_i} - \frac{1}{h_i - \delta_i} \right) + gh(2\delta_i + \Delta z_i) = 0 \quad (9)$$

식 (9)는 δ_i 의 삼차 방정식이 되어, Newton-Raphson 방법으로 계산될 수 있으며, Newton-Raphson 반복법의 초기값으로 유동이 거의 없는 경우를 사용하면, m_i 또한 0에 가까운 값을 가지게 되며 결국 δ_i 의 초기가정치는 다음과 같다.

$$\delta_i^1 = \frac{-\Delta z_i}{2} \quad (10)$$

2차원 천수방정식에도 같은 과정으로 하상경사의 영향이 흐름변수에 반영된다. 마지막으로 경계조건은 파의 반사로 계산영역 내에서 경계의 영향을 반영하는 반사경계조건과 경계의 영향을 전혀 고려하지 않는 무반사경계조건을 사용하였으며, 계산시간 간격은 모든 계산영역에서 CFL 조건을 만족하도록 구성하였다.

4. 모형의 적용

4.1 1차원 댐 붕괴파 해석

초기조건으로 댐 좌측의 수심은 1.0m, 우측의 수심은 0.1m이며, 좌측의 초기유속은 2.5m/s이고 우측의 초기유속은 0.0m/s이며, 전체 계산 영역은 50m이고 댐은 10m 지점에 위치한다. 7.0초가 지났을 때의 계산결과를 출력하였으며, 댐의 붕괴는 순간적(붕괴시간 0.0초)으로 발생하는 것으로 가정하였다. 계산 결과를 비교하기 위하여 MUSCL 기법의 결과와 비교하였고, TVD 제한자로는 SUPERBEE 제한자를 사용하였다.

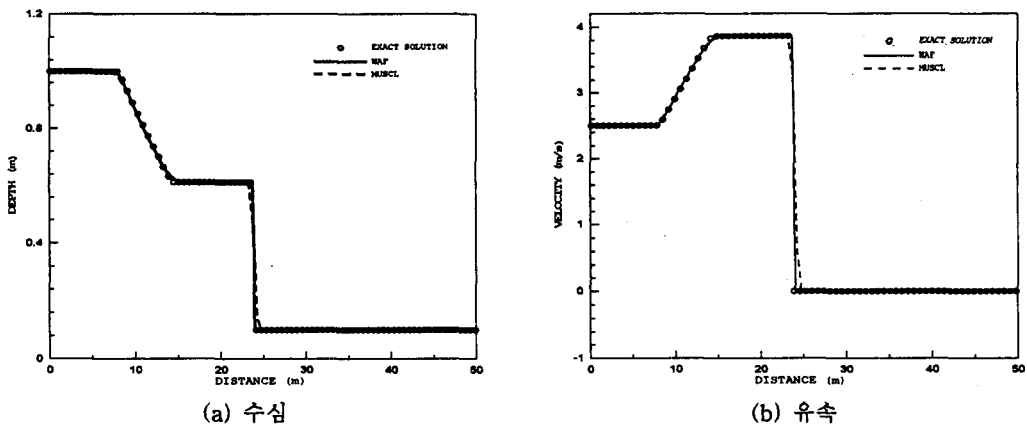


그림 1. 1차원 댐 붕괴파 모의 결과

4.2 2차원 댐 붕괴파 해석

2차원 모의는 Chaudhry가 모의한 것과 같은 비대칭의 댐 붕괴를 젖은 하도 조건과 마른 하도 조건으로 모의하였다. 젖은 하도의 경우, 초기조건으로 댐 좌측의 수심이 10.0m, 댐 우측의 수심이 5.0m로 가정하였으며, 댐 일부분이 갑작스럽게 붕괴되기 전의 초기 유속은 0.0m/s로 가정하였다. 경계조건으로 댐 상류와 하류에는 무반사경계조건을 주었고, 댐에 의한 내부경계와 좌우 측면은 반사경계조건으로 가정하였다. 마찰의 영향으로 Manning 조도계수를 0.012를 주었고, 하상경사는 0.025로 모의하였다. 출력시간은 7.2초로 하였다. 마른 하도의 경우는 댐 우측의 초기 수위가 0.0m인 것을 제외하고는 젖은 하도의 조건과 모두 같다.

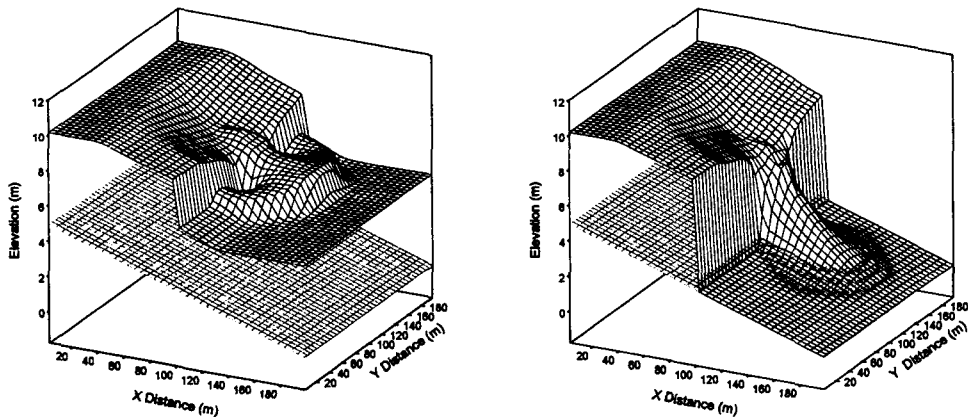


그림 2. 2차원 댐 붕괴파 모의 결과(수면형)

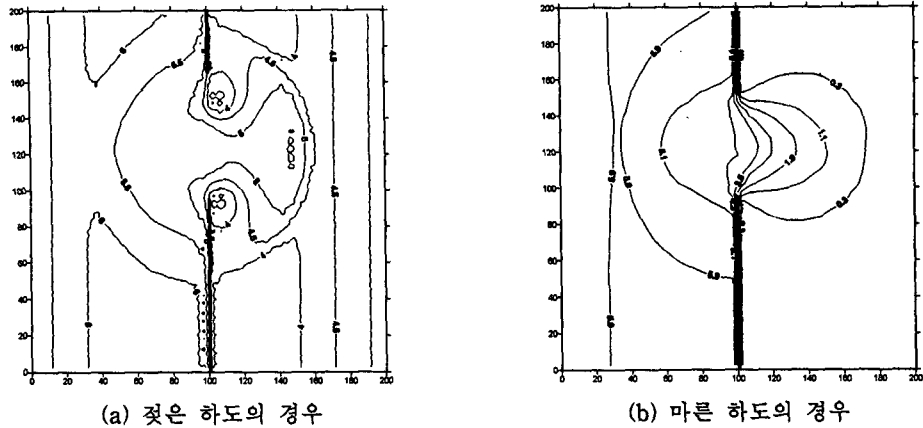


그림 3. 2차원 댐 붕괴파 모의 결과(등수심선)

5. 결 론

본 연구에서 사용한 유한체적법은 격자의 체적평균값으로 지배방정식의 적분형태를 의미하므로 불연속적인 흐름의 해석에 매우 유용하며, 안정적인 해를 제공한다. 또한 흐름을 이용한 수치기법은 격자의 경계면에서 직각방향의 흐름을만을 평가함으로써 수치계산이 가능하기 때문에, 비구조적 격자의 사용이 매우 간편하여 불규칙적인 제내지 형상의 반영이 용이하므로, 홍수범람 모의 등에 적절한 수치해석기법으로 판단된다. 일반적으로 마른 하도의 계산은 사용자가 임의로 젖은 상태로 만들어 주어야하는 수치적 오차를 내포하고 있지만, 본 연구에서 개발된 모형은 마른 하도에서의 흐름 해석에 인위적인 조작이 불필요하므로 계산에 발생할 수 있는 수치적 오차를 감소시킬 수 있으며, 하상경사가 흐름에 미치는 영향은 수치계산에 매우 민감한 부분으로 깊은 주의가 필요한데, Quasi-steady wave propagation 알고리즘의 사용으로 불연속적인 흐름의 해석에도 실제 현상을 잘 모의할 수 있었다.

6. 참 고 문 헌

- 김원 (1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발, 공학박사학위논문, 경북대학교.
- 이길성, 이성태 (1998). "충격파 모의를 위한 2차원 유한체적 비정상 흐름모형", 한국수자원학회논문집, 제31권 제3호, pp. 279-290.
- Chaudhry, M.H. (1993). *Open Channel Flow*, Prentice Hall.
- LeVeque, R.J. (1998). "Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm", *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, pp. 346-365.
- Nujic, M. (1995). "Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flow", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 101-111.
- Toro, E.F. (2001). *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons.
- Zhao, D.H., Shen, H.W., Lai, J.S., Tabios III, G.Q., and Tan, W.Y. (1994). "Finite-Volume Two-Dimensional unsteady-Flow Model for River Basins", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 863-883.