

Boussinesq 방정식을 이용한 천해파의 Bragg반사 해석

Analysis of Bragg reflection of shallow-water waves with Boussinesq Equations

정재상*, 조용식**

1. 서론

천해역에서 관측되는 파랑은 매우 불규칙하면서, 긴 시간주기에 대한 규칙성 역시 가지고 있다. 일반적으로 단파는 3~15초의 주기를 가지며, 다수의 단파로 구성되는 파군파 이에 의해 생성되는 장파는 30초~수분의 주기를 가진다(Liu와 Cho, 1993). 이 때, 단파의 파군에 의해 생성되는 장파를 중의파(infragravity wave)라 하며, 이와 같은 장주기파는 항내 부진동이나 해저 사면의 형성과 밀접한 관련이 있는 것으로 알려져 있다(Brower, 1977; Mei와 Aghon, 1989).

Liu 등(1992)은 Boussinesq 방정식을 이용하여, 파군에 의해 생성되는 장파의 크기와 해저경사에 의한 천수효과를 수치적으로 해석하였다. Liu와 Cho(1993)는 Liu 등의 연구에 장파성분의 반사를 추가로 고려하였으며, 해저 사면을 통과할 때 발생하는 장파의 Bragg 반사에 관하여 연구하였다. 그리고, 조용식 등(1995)은 천해역을 통과하는 크노이드파의 Bragg 반사를 계산하였다.

본 연구에서는 Peregrine(1967)에 의해 유도된 Boussinesq 방정식을 지배방정식으로 하였다. Boussinesq 방정식은 약비선형(weakly nonlinearity), 약분산(weakly dispersive relation), 그리고 일부 동수압항을 포함한다. Liu와 Cho는 단파와 장파 성분을 구분하여 유도하였으나, 본 연구에서는 단파와 장파 성분을 수학적으로 구분하지는 않았다. 입사파는 무차원화 된 단파에 비해 Ω 의 크기의 각진동수를 갖는 장파 성분으로 가정하였으며, 이를 Fourier 급수로 표현하였다. 따라서, Fourier 급수로 표현된 장파의 고차항이 단파 성분이 된다. 본 논문에서는 $m\Omega \leq 1.0$ 인 파랑을 장파로 구분하였으며, 장파와 단파의 입사 및 반사를 모두 포함하는 지배방정식이 새로 유도되었다.

2. 지배방정식의 유도

지배방정식은 Peregrine(1967)에 의해 유도된 1차원 Boussinesq 방정식을 사용하였으며, 무차원 변수는 식 (1)과 같이 정의된다. 여기서, h 는 수심, u 는 x 방향 유속, ζ 는 자유수면변위, ε 은 비선형(nonlinearity), μ^2 는 분산(frequency dispersion)을 나타낸다. Boussinesq 방정식의 유도 과정에서 식 (2)가 가정되었다.

* 정회원, 한양대학교 공과대학 토목공학과 석사과정, Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea. (e-mail) fignon@ihanyang.ac.kr

** 정회원, 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수, Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, (e-mail) ysc59@hanyang.ac.kr

$$x, y = k'(x', y'), \quad z = -\frac{z'}{h_0'}, \quad h = \frac{h'}{h_0'}, \quad t = k' \sqrt{gh_0'} t' \quad (1)$$

$$\zeta = \frac{\zeta'}{a_0'}, \quad u = \frac{h_0'}{a_0'(gh_0')^{1/2}} u', \quad \varepsilon = \frac{a_0'}{h_0'}, \quad \mu^2 = (k' h_0')^2 \quad (1)$$

$$O(\varepsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1 \quad (2)$$

유도된 무차원 Boussinesq 방정식은 식 (3), (4)와 같다. 식 (3)은 오차가 없는 연속방정식이며, 식 (4)는 절삭오차가 $O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4)$ 인 운동량 방정식이다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \zeta)u] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu^2 \left[\frac{1}{2} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \quad (4)$$

자유수면변위와 유속은 식 (5)와 같이 Fourier 급수로 표현하였으며, Ω 는 무차원화된 파군의 각진동수 (angular frequency)를 뜻한다. 수심은 급변항(rapidly varying term)과 완변항(slowly varying term)으로 구분하여 식 (6)과 같이 표현되며, 그 각각의 크기는 식 (7)과 같이 정의하였다.

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} \sum_n \zeta_n(x) e^{-i\Omega t}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_n u_n(x) e^{-i\Omega t} \quad (5)$$

$$h = \bar{h} + \tilde{h} \quad (6)$$

$$O(\bar{h}) \approx O(1), \quad O(\tilde{h}) \approx O(\mu^2), \quad O\left(\frac{d\bar{h}}{dx}\right) \approx O(\mu^2), \quad O\left(\frac{d\tilde{h}}{dx}\right) \approx O(\mu^2) \quad (7)$$

식 (6)에서 \bar{h} 는 완변항이며, \tilde{h} 는 급변항이다. 식 (5)의 자유수면변위 및 유속의 x, t 에 관한 1계 도함수는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_n n \zeta_n e^{-i\Omega t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{d\zeta_n}{dx} e^{-i\Omega t} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_n n u_n e^{-i\Omega t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{du_n}{dx} e^{-i\Omega t}$$

식 (5)~(8)을 식 (3)과 식 (4)에 대입하여 정리하면 식 (9), 식 (10)과 같은 입사파 및 반사파를 지배하는 방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} = & \left(-\frac{1}{4h} \frac{d\bar{h}}{dx} - \frac{1}{2h} \frac{d\tilde{h}}{dx} - \frac{in\Omega\tilde{h}}{2h\sqrt{h}} + \frac{i\mu^2\Omega^3 n^3 \sqrt{\bar{h}}}{6} \right) A_n \\ & + \left(\frac{1}{4h} \frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{1}{2h} \frac{d\tilde{h}}{dx} - \frac{in\Omega\tilde{h}}{2h\sqrt{h}} + \frac{i\mu^2\Omega^3 n^3 \sqrt{\bar{h}}}{6} \right) B_n e^{-2in\Omega\theta} \\ & - \frac{i\varepsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (A_s A_{n-s} + B_s B_{n-s} e^{-2in\Omega\theta}) \\ & - \frac{i\varepsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (A_s B_{n-s} e^{-2i(n-s)\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{-2is\Omega\theta}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_n}{dx} = & \left(-\frac{1}{4h} \frac{d\bar{h}}{dx} - \frac{1}{2h} \frac{d\tilde{h}}{dx} + \frac{in\Omega\tilde{h}}{2h\sqrt{h}} - \frac{i\mu^2\Omega^3 n^3 \sqrt{\bar{h}}}{6} \right) B_n \\ & + \left(\frac{1}{4h} \frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{1}{2h} \frac{d\tilde{h}}{dx} + \frac{in\Omega\tilde{h}}{2h\sqrt{h}} - \frac{i\mu^2\Omega^3 n^3 \sqrt{\bar{h}}}{6} \right) A_n e^{2in\Omega\theta} \\ & + \frac{i\varepsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) (A_s A_{n-s} e^{2in\Omega\theta} + B_s B_{n-s}) \\ & + \frac{i\varepsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) (A_s B_{n-s} e^{2is\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{2i(n-s)\Omega\theta}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, 식 (9)는 오른쪽으로 진행하는 파랑의 지배방정식이며, 식 (10)은 왼쪽으로 진행하는 파랑의 지배방정식이다. 그리고, A_n 과 B_n 은 각각 입사파 및 반사파의 진폭을 뜻한다.

자유수면변위는 식 (11)과 같이 표현되며, θ 는 식 (12)와 같다.

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_n (A_n e^{in\Omega\theta} + B_n e^{-in\Omega\theta}) e^{-in\Omega t} \quad (11)$$

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{h}} dx \quad (12)$$

3. 수치 계산

본 연구에서는 단파의 파군에 의해 생성된 장파의 Bragg 반사를 해석하였다. Bragg 반사는 해저지형의 파장이 입사된 파랑의 파장의 2배가 될 때, 공명현상에 의하여 상당량의 에너지를 의해로 반사하는 현상을 말한다. 해저지형의 형태는 식 (13)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} h &= 1 - Sx, & 0 \leq x \leq L_1 \\ h &= 1 - Sx - \rho \sin(\delta x), & L_1 \leq x \leq L_2 \\ h &= 1 - Sx, & L_2 \leq x \leq L_3 \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서, ρ 는 해저지형의 진폭, δ 는 해저지형의 파수, S 는 해저지형의 경사를 나타낸다.

입사파 및 반사파의 지배방정식은 1차 상미분 방정식이며, Fourth-order Runge-Kutta 방법을 사용하여 적분하였다. 경계조건으로 우측 경계에서의 반사는 0으로 가정하였다. 입사파는 크노이드파의 경우 식 (14)와 같은 조건을 사용하였으며(Yoon and Liu, 1987), 파군의 경우 식 (15)와 같은 초기조건이 사용되었다.

$$A_1 = 0.8923, A_2 = 0.4198, A_3 = 0.1568, A_4 = 0.0522, A_5 = 0.0163 \quad (14)$$

$$A_n = 1, A_{n+1} = 1, n\Omega \approx 1 \quad (15)$$

본 모형은 단파 및 장파의 반사를 모두 해석할 수 있으며, 크노이드파와 파군에 의해 생성된 장파의 반사에 적용시켜 보았다. 그림 1은 크노이드파의 Bragg 반사를 계산한 것으로, Cho 등(1995)에 의해 계산된 결과와 비교하였다. 그림 2는 파군에 의해 생성된 장파의 Bragg 반사를 계산한 것으로, Liu 와 Cho(1993)에 의해 계산된 결과와 비교하였다. 그 결과, 새로 유도된 방정식은 장파와 단파 모두 매우 만족할 만한 결과를 보임을 알 수 있다.

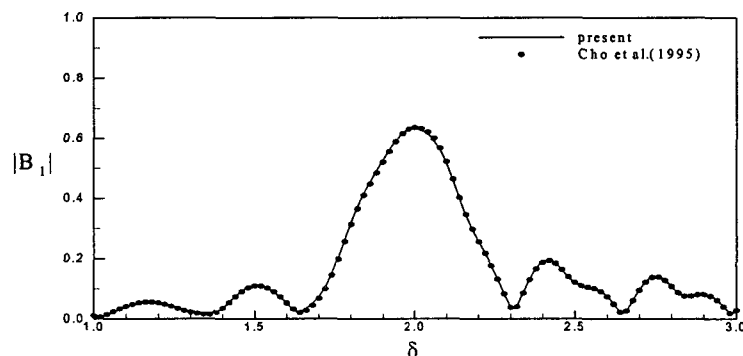


그림 1. 크노이드파의 Bragg 반사

$$(n = 5, \mu^2 = 0.1067, \varepsilon = 0.0881, L = 6\pi, \rho = 0.15, \Omega = 1.0)$$

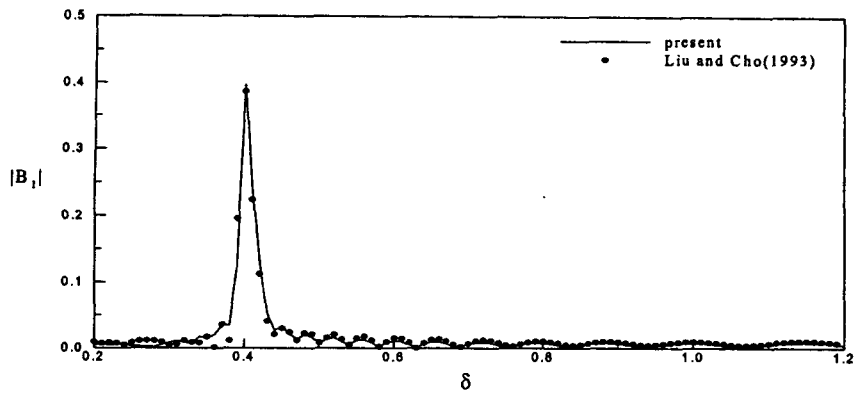


그림 2. 장파의 Bragg 반사
 $(n=10, \mu^2=0.08, \epsilon=0.02, L=6\pi, \rho=0.08, \Omega=0.2, N=18)$

4. 결 론

Boussinesq 방정식을 이용하여, 파랑의 입사와 반사를 지배하는 한쌍의 상미분방정식이 유도되었다. 새로운 방정식의 타당성을 검토하기 위해 단파와 장파의 Bragg 반사에 대한 기존 연구 결과와 비교하였으며, 매우 만족할 만한 결과를 나타내었다. 앞으로 본 모형을 이용하여, 장파와 단파가 서로 혼재하는 불규칙한 형태의 파랑의 반사를 해석해 볼 필요가 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- 조용식, 이종인, 이정규, 윤태훈. (1995). "천해파의 Bragg 반사." 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 15권, 제 6호, pp. 1823-1832.
- Bowers, E.C. (1977). "Harbour resonance due to set-down beneath wave groups." *J. Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 71-92.
- Liu, P.L.-F. and Cho, Y.-S. (1993). "Bragg reflection of infragravity waves by sandbars." *J. Geophysical Res.*, Vol. 98, pp. 22733-22741.
- Liu, P.L.-F., Yoon, S.B. and Cho, Y.-S. (1992). "Shoaling of wave groups in shallow water." in *Nonlinear Dispersive Wave Systems*, edited by L. Debnath, pp. 41-56, World Scientific, Singapore.
- Mei, C.C. and Agnon Y. (1989). "Long-period oscillations in a harbour induced by incident short waves." *J. Fluid Mech.*, Vol. 208, pp. 595-608.
- Peregrine, D.H. (1967). "Long waves on a beach." *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp. 321-330.