Setup cost와 Backorder rate를 고려한 확률적 재고모형에 관한 연구

유승우* · 서창현* · 김경섭**

The study of stochastic inventory model with setup cost and backorder rate

Yu Seung-Woo · Seo Chang-Hyun · Kim Kyung-Sub

Abstract

In this paper, we determine optimal reduction in the lead time and setup cost for some stochastic inventory models. And we propose more general model that allow the backorder rate as a control variable. We first assume that the lead time demand follows a normal distribution. And we assume that the backorder rate is dependent on the length of lead time through the amount of shortages. The stochastic models analyzed in this paper are the classical continuous and periodic review policy models with a mixture of backorders and lost sales. For each of these models, we provide a sufficient conditions for the uniqueness of the optimal operating policy. We also develop algorithms for solving these models and provide illustrative numerical examples.

Key Words: Lead time; Review period; Setup cost; Order Quantity; Backorder rate; Continuous & Periodic rewiew policy

1. 서론

최근에 우리는 JIT 생산 시스템의 성공사례에서 보았듯이, 낭비적인 요소들을 제거하면, 즉 주문인도기간을 단축시키고, 주문비용를 줄이며, 품질을 향상시키면 큰 이익을 창출할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 실제로 주문인도기간을 단축시키게 되면 안전재고와 품절에 따른 손실이 줄어들며, 고객에 대한 서비스수준도 높일 수 있게 된다. 또한 주문비용을 감소시켜 Lot-size를 줄이게 되면, 스케줄링 상의 유연성을 극대화시킬 수 있고, 저장공간이 줄어드는 등의 재고투자비용을 감소시킬 수 있다. 이에 착안하여 최근에 많은 논문들이 주문인도기간과 주문비용를 고려하여 최소값을 유도해 내려는 방향으로 연구되어졌다.

본 연구와 관련된 Continuous review 재고보충정책 하에서의 최근의 연구들을 살펴보면, Liao and Shyu[5]는 주문량은 고정시켜 두고, 주문인도기간을 결정변수로 하는 수리적 모델을 제시하였다. 그 후, Ben-Daya and Raouf[8]는 주문량도 결정변수로 하여 최적값을 유도하려는 시도를 하였으며, 다시 이를 확장하여 Ouyang

* 연세대학교 산업시스템공학과
** 연세대학교 산업시스템공학과 교수

et al.[9]이 Backorder와 Lost sale를 허용하는 모델을 제시하였다.

또한 Periodic review 재고보충정책하에서의 최근의 연구들을 살펴보면, Ouyang and Chuang [11]은 주문인도기간을 변수로 하고, 주문인도기간 동안의 수요를 분포자유접근법으로 접목시킨 연구를 하였으며, Hariga and Ben-Daya[12]는 주문인도기간을 변수로 하고, 수요는 표준정규분포를 따르는 모델을 제시하였다.

본 연구에서는 두 가지 정책(Continuous & Periodic review), 각각에 대하여 Q, A, L, T를 변수로 하여 주문인도기간(L)과 주문비용(Nasri and Affisco [3], Sarker and Coates[4], Kim et al.[6])를 줄이고, 동시에 Backorder rate를 주어진 값이 아닌, 제어할 수 있는 값으로 처리하여 최적의 값을 유도해 내고자 한다.

2. 문제의 정의

2.1 문제의 사용기호

D : 년간 평균수요
A : 고정주문비용
h : 단위당 재고유지비용
π : 재고부족비용
π_0 : 판매손실비용
Q : 주문량
r : 재주문점
R : 목표재고
L : 주문인도기간
T : 재고검사주기
β : 부재고기간 동안의 Backorder rate
$E(X-r)^+$: 한 주기당 주문인도기간 동안의 부재고에 대한 기댓값

2.2 Continuous review 정책의 가정 및 모델

(1) 리드타임 동안의 수요 X는 평균 DL과 표준편차 $\sigma\sqrt{L}$인 정규분포를 따른다.

(2) 재주문점 r은 주문인도기간 동안의 기대수요 + 안전재고(SS)로 나타낸다. 안전재고는 $k \times$ 주문인도기간 동안의 수요의 표준편차이다. k는 Safety factor로 $P(X>r) = P(Z>k) = q$를 만족한다. Z는 표준 정규 분포의 랜덤 변수이고, q는 주문인도기간 동안의 품절확률이다.

(3) 주문인도기간 L은 상호간에 독립적인 품목$1,2,\ldots,n$이 존재하며, i품목은 최소시간(a_i)과 정상시간(b_i), 그리고 단위당 Crashing cost(c_i)을 가진다. 단 c_i는 $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n$이다.

(4) L_i는 최소시간으로 crash된 주문인도기간이며, $L_i = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j), i=1,2,..,n$ (1)로 표현된다. 그리고 $L \in [L_i, L_{i-1}]$이 주어졌을 때, 각 주문인도기간의 Crashing cost는 $R(L) = c_i(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j(b_j - a_j)$ (2)로 표현된다.

주문인도기간 동안의 수요 X가 평균이 DL,표준편차가 $\sigma\sqrt{L}$인 $f_X(x)$를 따르고 재주문점 $r = DL + k\sigma\sqrt{L}$이 주어졌을 때, 주문인도기간 동안의 기대부재고 $E(X-r)^+$는 다음과 같다.

$$E(X-r)^+ = \int_r^{\infty}(x-r)f_X(x)dx = \sigma\sqrt{L}\,\Psi(k)$$

$$where\ \Psi(k) = \phi(k) - k[1-\Phi(k)]$$

ϕ는 정규분포의 확률밀도 함수이며, Φ는 누적분포 함수이다.

Continuous review 정책의 경우에 대한 연간 기대 총비용을 표현해 보면 다음과 같다.

$$C(Q,L) = \frac{AD}{Q} + h\left[\frac{Q}{2} + r - \mu L + (1-\beta)\sigma\sqrt{L}\,\Psi(k)\right] + \frac{D}{Q}[\pi + \pi_0(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}\,\Psi(k) +$$

$$R(L)\frac{D}{Q}$$

$$C(Q,A,L)=\eta M(A)+\frac{AD}{Q}+h\left[\frac{Q}{2}+k\sigma\sqrt{L}+(1-\beta)\sigma\sqrt{L}\,\Psi(k)\right]+\frac{D}{Q}[\pi+\pi_0(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}\,\Psi(k)+R(L)\frac{D}{Q} \quad (3)$$

본 연구에서는 β를 보다 현실적인 접근을 위하여 제어할 수 있는 변수값으로 보고, 다음과 같이 정의한다. 주문인도기간 동안에 기대 부재고 양이 커지면 커질수록, Backorder rate는 작아질 것이다. 따라서 $\beta=\frac{1}{1+\alpha E(X-r)^+}$를 얻을 수 있다. 여기서 α는 Backorder 파라미터로 양의 상수값이다.

또한 주문비용를 줄여서, 기대 총비용을 최소화하기 위하여 다음과 같은 목적식을 세운다.

$$C(Q,A,L)=\eta M(A)+C(Q,L)$$
$$over\ A\in(0,A_0].$$

여기서 A_0는 기존의 고정주문비용이고, A는 결정변수, η는 자본투자에 대한 소액의 기회비용이며, $M(A)$는 다음과 같은 logarithmic investment function을 따른다.

$$M(A)=\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)\ \text{for}\ A\in(0,A_0]$$

여기서 δ는 자본투자비용이 증가함에 따라 주문비용이 지수적으로 감소하는 비율이다.

위의 (3)식을 각각 Q, A, L에 관하여 $\frac{\partial C(Q,A,L)}{\partial Q}=0$, $\frac{\partial C(Q,A,L)}{\partial A}=0$, $\frac{\partial C(Q,A,L)}{\partial L}=0$ 을 정리하면, 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2D}{h}\left\{A+\left[\pi+\frac{\pi_0\triangle(L)}{1+\triangle(L)}\right]\frac{\triangle(L)}{\alpha}+R(L)\right\}}$$
$$where\ \triangle(L)=\alpha E(X-r)^+ \quad (4)$$

$$A=\frac{Q\eta}{D\delta} \quad (5)$$

2.3 Periodic review 정책의 가정 및 모델

(1) 매 주기 T마다 Inventory level을 관측하여 목표재고 R이 되도록 주문이 이루어진다.

(2) 주문인도기간 L은 재고검사주기 T를 초과할 수 없다.

(3) 목표재고 R은 Protection interval 동안의 수요 $D(T+L)$와 안전재고(SS)의 합이다. 즉 $R=D(T+L)+k\sigma\sqrt{(T+L)}$ 이다.

(4) L_i와 $R(L)$의 가정은 Continuous review 정책 모델의 가정과 동일하다.

Periodic review 정책의 경우에 대한 연간 기대 총비용을 표현해 보면 다음과 같다.

$$C(T,A,L)=\eta M(A)+\frac{A+R(L)}{T}+h\left(R-DL-\frac{DT}{2}\right)+\left\{h(1-\beta)+\frac{\pi+\pi_0(1-\beta)}{T}\right\}\times E(X-R)^+\quad over\ A\in(0,A_0]. \quad (6)$$

$$\beta=\frac{1}{1+\alpha\sigma\sqrt{(T+L)}\,\Psi(k)}$$

위의 (6)식을 각각 T, A, L에 관하여 $\frac{\partial C(T,A,L)}{\partial T}=0$, $\frac{\partial C(T,A,L)}{\partial A}=0$, $\frac{\partial C(T,A,L)}{\partial L}=0$ 을 정리하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. 여기서 T는 Johnson and Montgomery[1]에서 지적한 바와 같이, 근사적으로 구한다.

$$T^*=\sqrt{\frac{2[A+R(L)]}{hD}} \quad (7)$$

$$A=\frac{T\eta}{\delta} \quad (8)$$

3. 수치실험

년간 평균수요는 600, 고정주문비용은 \$200, 재고유지비용은 \$20, 재고부족비용은 \$50, 판매손실비용은 \$150, q = 0.1, σ = 3 단위/주, α = 2, η = 0.07, $\delta = 2\times10^{-4}$이다. 그리고 각각의 i에 대한 최소시간(a_i), 정상시간(b_i), Crashing cost(c_i)는 표1에 주어져 있다.

〈표 1〉 주문인도기간

i	a_i	b_i	c_i
1	6	20	0.4
2	6	20	1.2
3	9	16	5.0

3.1 Continuous review 모델의 수치실험

(1) 각각의 $i = 0,1,...,n$에 대하여 수식(1), (2)를 이용하여 L_i와 $R(L_i)$를 구한다.

(2) q = 0.1를 만족하는 k에 대하여 $r^*(L_i)$를 구한다.

(3) 각각의 $i = 0,1,...,n$에 대하여 수식(4), (5)를 이용하여 Q^*, A^*를 구한다. 만약에 $A_i \le A_0$이면 $A^*=A_i$ 이고, $A_i > A_0$면 $A^*=A_0$이다.

(4) $\min_{i=0,1,..,n} C(Q_i, A_i, L_i)$를 찾는다.

Ouyang et al.[9]의 모델에 Shortage cost를 추가한 모델의 결과값이 표2에, 본 연구에서 제시한 logarithmic investment function을 고려한 모델의 결과값이 표3에 주어져 있다.

<표 2> π^*추가한 모델의 결과값

i	β	L_i	Q_i	$C(Q,L)$
0	0.0	4	129	2748.81
1	0.5	6	122	2637.33
2	0.8	6	118	2556.91
3	1.0	6	116	2501.83

〈표 3〉 Setup cost reduction을 고려한 결과값

i	A_i	L_i	Q_i	$C(Q,A,L)$
0	75.5	4	96	2428.36
1	71.3	6	85	2253.41
2	69.0	6	78	2130.61
3	67.5	6	74	2042.48

표4에는 Backorder rate를 제어할 수 있게 한 모델에 대한 결과값이, 표5에는 주문비용과 Backoreder rate를 동시에 고려한 모델에 대한 결과값이 주어져 있다.

〈표 4〉 Controllable backorder rate 결과값

i	β	L_i	Q_i	$C(Q,L)$
0	0.55	8	122	2656.23
1	0.59	6	121	2614.01
2	0.64	4	123	2616.24
3	0.67	3	130	2736.65

〈표 5〉 S.C.R & C.B.R 모델의 결과값

i	A_i	L_i	Q_i	$C(Q,A,L)$
0	71.0	8	84	2267.10
1	70.7	6	83	2218.51
2	71.8	4	86	2239.59
3	75.9	3	97	2420.88

3.1 Periodic review 모델의 수치실험

(1) 각각의 $i = 0,1,...,n$에 대하여 수식(1), (2)를 이용하여 L_i와 $R(L_i)$를 구한다.

(2) 수식(7)을 이용하여 T^*를 구한다.

(3) q = 0.1를 만족하는 k에 대하여 R^*을 구한다.

(4) 각각의 $i = 0,1,...,n$에 대하여 수식(8)를 이용하여 A^*를 구한다. 만약에 $A_i \le A_0$이면 $A^*=A_i$ 이고, $A_i > A_0$면 $A^*=A_0$이다.

(5) $\min_{i=0,1,..,n} C(T_i, A_i, L_i)$를 찾는다.

재고보충정책을 Periodic review policy으로 하고 T, L을 결정변수로 하는 재고 모델의 결과값이 표6에 주어져 있다. 모든 실험 데이터는 Continuous review policy의 경우와 동일하다.

〈표 6〉 Periodic review policy 결과값

i	β	L_i	T_i	$C(T,L)$
0	0.0	6	9.6523	3145.56
1	0.5	6	9.6523	2911.52
2	0.8	6	9.6523	2771.09
3	1.0	8	9.5199	2675.69

표7에는 위의 모델에 주문비용도 결정변수로 고려한 모델의 결과 값이 주어져 있다.

〈표 7〉 S.C.R를 추가한 모델의 결과값

i	A_i	L_i	T_i	$C(T,A,L)$
0	64.8	6	9.6523	2809.65
1	64.8	6	9.6523	2575.60
2	63.9	8	9.5199	2429.98
3	63.9	8	9.5199	2329.59

표8에는 수식에 의하여 Backorder rate를 제어할 수 있게한 모델의 결과값이, 표9에는 주문비용과 Backorder rate를 동시에 고려한 모델의 결과값이 주어져 있다. 본 연구에서 목적으로 하는, 최적의 값은 Continuous의 경우 $2218.51, Periodic의 경우에는 $2589.53이다.

〈표 8〉 C.B.R 모델의 결과값

i	β	L_i	T_i	$C(T,L)$
0	0.46	8	9.5199	2948.75
1	0.47	6	9.6523	2925.54
2	0.48	4	10.0389	2957.06
3	0.49	3	10.8000	3101.15

〈표 9〉 S.C.R & C.B.R 모델의 결과값

i	A_i	L_i	T_i	$C(T,A,L)$
0	63.9	8	9.5199	2602.64
1	64.8	6	9.6523	2589.63
2	67.4	4	10.0389	2649.02
3	72.5	3	10.8000	2840.73

4. 결론

본 연구에서는 확률적인 수요를 가지는 재고모형에서, 주문인도기간과 주문비용를 변수로 고려하고 또한 현실적인 접근을 위하여 Backorder rate를 제어할 수 있는 변수로 하여 최적의 값을 유도했다. 모든 실험을 비교하여 보았을 때, 두 가지 재고보충정책(Continuos & Periodic) 모두에서 주문비용과 Backoreder rate를 동시에 고려할 경우, 현실성 있는 가장 최적의 값을 유도해 낼 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

[1] L. A. Johnson, D. C. Montgomery, *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, Wiley, NY, 1974.

[2] E. A. Silver and R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Plannings*, John Wiley, NY, 1985.

[3] F. Nasri, J. F. Affisco, M. J. Paknejad, Setup cost reduction in an inventory model with finite range stochastic lead times, *International Journal of Production Research*, Vol. 28, pp. 199-212, 1990.

[4] B. R. Sarker, E. R. Coates, Manufacturing setup cost reduction under variable lead times and finite opportunities for investment, *International Journal of Production Economics*,

Vol. 49, pp. 237-247, 1990.

[5] C. J. Liao, C. H. Shyu, An analytical determination of lead time with normal demand, *International Journal of Operations Production Management*, Vol. 11, pp. 72-81, 1991.

[6] K. L. Kim, J. C. Hayya, and J. D. Hong, Setup reduction in economic production quantity model, *Decision Sci.*, Vol. 23(2), pp. 500-508, 1992.

[7] W. J. Stevenson, *Production and Operations Management*, 4th edn., Irwin, Homewood, IL, USA, 1993.

[8] M. Ben-Daya and A. Raouf, Inventory models involving lead time as dacision variable, *Journal of the Operation Research Society*, Vol. 45, pp. 579-582, 1994.

[9] L. Y. Ouyang, N. Yeh and K. Wu, Mixture inventory model with backorders and lost sales for variable lead time, *Journal of the Operation Research Society*, Vol. 47, pp. 829-832, 1996.

[10] I. Moon and S. Choi, A note on lead time and distributional assumptions in continuous review inventory model, *Computers and Operational Research*, Vol. 25, pp. 1007-1012, 1998.

[11] L. Y. Ouyang and B. R. Chuang, A minimax distribution free procedure for periodic review inventory model involving variable lead time, *International Journal of Information and Management Sciences*, Vol. 9, pp.25-35, 1998.

[12] M. Hariga and M. Ben-Daya, Some stochastic inventory models with deterministic variable lead time, *European Journal of Operation Research*, Vol. 113, pp. 42-51, 1999.

[13] L. Y. Ouyang and B. R. Chuang, Mixture inventory model involving variable lead time and controllable backorder rate, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 40, pp. 339-348, 2001.