

# Type-2 Fuzzy Logic System 을 이용한 비선형 시스템의 모델링 및 성능 분석

## Modeling and Performance Analysis of Non-linear System Using Type-2 Fuzzy Logic Systems

안성배, 김동원, 박귀태  
고려대학교 전기공학과

Sung-Bae Ahn, Dong-Won Kim, Gwi-Tae Park  
School of Electrical Engineering, Korea University,  
E-mail : [asb@elec.korea.ac.kr](mailto:asb@elec.korea.ac.kr)

### ABSTRACT

퍼지 로직 시스템(FLS)은 다양한 분야에서 성공적으로 사용되고 있다. 퍼지 로직 시스템의 멤버십 함수와 규칙은 언어적인 정보나 수치적 데이터를 사용하여 표현된다. 또한 이러한 정보나 데이터에는 불확실성과 노이즈 등이 존재한다. 그러나 단순한 퍼지 로직 시스템으로 노이즈가 포함된 불확실한 정보를 효과적으로 다루고 표현하는 데는 한계가 있다. 그러므로 노이즈가 포함된 정보를 효율적으로 처리하기 위해 본 논문에서는 type-2 FLS를 이용한다. 노이즈가 포함되어 불확실한 정도를 정확한 값으로 표현하기 어려울 때, type-2 FLS은 보다 정확하게 정보들을 다룰 수 있음을 보인다.

비선형 시계열 시스템인 Box-Jenkins 데이터를 이용하여 singleton Type-1 FLS과 non-singleton type-1 FLS의 결과 값을 확인하고 이의 성능을 type-2 FLS과 비교, 분석한다.

**Key words** : Singleton type-1, non-singleton type-1, singleton type-2 FLS, Box-Jenkins 데이터

### I. 서 론

퍼지 로직 시스템(FLS)은 다양한 분야에서 성공적으로 사용되고 있다. 퍼지 로직 시스템의 멤버십 함수와 규칙은 언어적인 정보나 수치적 데이터를 사용하여 표현된다. 또한 이러한 정보나 데이터에는 불확실성과 노이즈 등이 존재한다. 그러나 단순한 퍼지 로직 시스템으로 노이즈가 포함된 불확실한 정보를 효과적으로 다루고 표현하는 데는 한계가 있다. 그러므로 노이즈가 포함된 정보를 효율적으로 처리하기 위해 본 논문에서는 type-2 FLS를 이용한다. 노이즈가 포함되어 불확실한 정도를 정확

한 값으로 표현하기 어려울 때, type-2 FLS은 보다 정확하게 정보들을 다룰 수 있음을 보인다. 우리는 여기에서 singleton type-1 FLS, non-singleton type-1 FLS, singleton type-2 FLS에 대해 비선형 시계열 데이터인 Box-Jenkins의 가스로 공정에 적용하여 각각의 모델링 성능을 비교해 볼 것이다.

### II. Type-2 FLSs

그림 1은 type-2 퍼지 로직 시스템의 구조를 나타내고 있다. Type-1 FLS 에서는 output processing과정에서 defuzzifier만을

포함하였으나, type-2 FLS에서는 type-2 퍼지 셋으로 연산이 이루어지기 때문에 결과 값을 얻어내기 위해 type-reduction 과정이 추가 되었다.

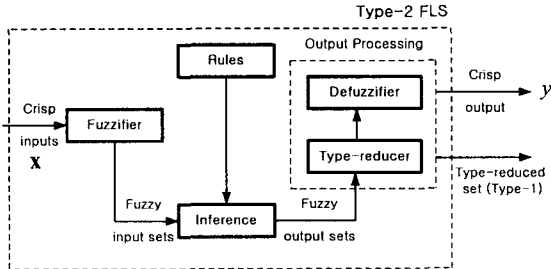


그림 1. Type-2 FLS 의 구조

### 2.1 Rules

Type-2 FLS이  $p$ 개의 입력  $x_i \in X_i, x_p \in X_p$  을 갖고, 하나의 출력  $y \in Y$  을 가지며,  $M$ 개의 규칙이 있다고 하면, type-2 FLS에서  $l$ 번째 규칙은 다음과 같다.

$$R^l : \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l, \text{ THEN } y_l \text{ is } G^l \text{ where } l=1, \dots, M \quad (1)$$

### 2.2 Fuzzy Inference Engine

추론 엔진에서는 규칙들을 결합시키며, 입력 type-2 셋을 출력 type-2 셋으로 매핑을 한다. 이를 위해 type-2 퍼지 셋의 union과 intersection의 계산뿐만 아니라 type-2 퍼지 관계의 composition도 요구된다.

식(1)에서  $F_1^l \times \dots \times F_p^l = A^l$  로 하면, 이 식은  $R^l : F_1^l \times \dots \times F_p^l \rightarrow G^l = A^l \rightarrow G^l$  으로 표현되고, 이를 멤버십 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) &= \mu_{A^l \rightarrow G^l}(\mathbf{x}, y) \\ &= \mu_{F_1^l}(x_1) \sqcap \dots \sqcap \mu_{F_p^l}(x_p) \sqcap \mu_{G^l}(y) \\ &= [\sqcap_{i=1}^p \mu_{F_i^l}(x_i)] \sqcap \mu_{G^l}(y) \quad (2) \end{aligned}$$

$R^l$ 에 대한  $p$ 개의 입력 셋의 멤버십은,

$$\begin{aligned} \mu_{A^l}(\mathbf{x}) &= \mu_{X_1}(x_1) \sqcap \dots \sqcap \mu_{X_p}(x_p) \\ &= \sqcap_{i=1}^p \mu_{X_i}(x_i) \quad (3) \end{aligned}$$

$l$ 번째 출력 셋에 대한 멤버십은,

$$\mu_{B^l}(y) = \mu_{A^l R^l}(y)$$

$$= \sqcup_{\mathbf{x} \in X} [\mu_{A^l}(\mathbf{x}) \sqcap \mu_{R^l}(\mathbf{x}, y)] \quad (4)$$

$y \in Y, l=1, \dots, M$

여기에 식(2)와 식(3)을 각각 대입하면,

$$\begin{aligned} \mu_{B^l}(y) &= \sqcup_{\mathbf{x} \in X} \{ [\sqcap_{i=1}^p \mu_{X_i}(x_i)] \sqcap \\ &\quad [\sqcap_{i=1}^p \mu_{F_i}(x_i)] \sqcap \mu_{G^l}(y) \} \\ &= \sqcup_{\mathbf{x} \in X} \{ [\sqcap_{i=1}^p \mu_{X_i}(x_i) \sqcap \mu_{F_i}(x_i)] \sqcap \mu_{G^l}(y) \} \\ &= \mu_{G^l}(y) \sqcap \{ [\sqcup_{x_i \in X_i} \mu_{X_i}(x_i) \sqcap \mu_{F_i^l}(x_i)] \sqcap \\ &\quad [\sqcup_{x_p \in X_p} \mu_{X_p}(x_p) \sqcap \mu_{F_p^l}(x_p)] \} \quad (5) \end{aligned}$$

### 2.3 Type-Reduction

Type-1 FLS에서 각 fired rule에 상응하는 출력은 type-1 셋이다. Defuzzifier는 하나의 출력 셋을 얻기 위해 모든 fired rule에 상응하는 출력 셋 들을 결합시킨다. Centroid defuzzifier는 모든 출력 셋의 union을 찾아서 crisp 출력으로서 union의 centroid를 사용한다. Type-reducer는 모든 출력 값을 결합시켜서 type-2 셋에 대해 centroid 계산을 수행한다. Type-1 셋 A에 대한 centroid는, 그의 도메인이  $N$ 개의 구간으로 이산화 되었다면, 다음과 같다.

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)} \quad (6)$$

이와 비슷하게 type-2 셋 A의 centroid는 확장원리[4], [5]를 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C_A = \frac{\int_{\theta_1} \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) \star \dots \star \mu_{D_N}(\theta_N)]}{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i} \bigg/ \frac{\sum_{i=1}^N \theta_i}{N} \quad (7)$$

여기에서  $\theta_i \in D_i$ . A의 각 포인트  $x_i$ 는 type-1 퍼지 멤버십 그레이드  $D_i = \mu_{A_i}(x_i)$ 이다. Centroid를 구하기 위해 가능한 모든

combination  $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  을 고려해야 하며, 그러한 조합에 대해 우리는 type-1 centroid 계산을 수행한다. 만약 centroid 과정에서  $\theta_i$  에 대해 하나 이상의 조합이 같은 값을 갖는다면 그 중에서 가장 큰 멤버십 grade를 값으로 결정한다. Centroid  $C_A$ 는 type-1 셋이며,  $A$  상에서 모든 임베디드 셋의 중심 값이다.

만일 type-2 FLS의 모든 전건부와 후건부의 멤버십 그레이드가 노말하고 한 점에서만 2차의 멤버십 그레이드가 1을 가진다면, 출력 셋도 그러한 것이다. 그렇게 크기가 1인 점들은 type-2 출력 셋의 principal 멤버십 함수의 중심 값에 상응한다. 만일 FLS에서 type-2 불확실성이 type-1 불확실성으로 줄어들거나, type-2 멤버십 함수들이 그들의 principal 멤버십 함수로 된다면, 각 점에서의 전건부와 후건부의 멤버십 그레이드는 1로 귀속될 것이다. 이러한 행동들이 type-reduced 셋을 만들게 된다. 모든 type-2 불확실성이 type-1 불확실성으로 줄어든다면 type-2 FLS은 type-1 FLS으로 줄어들 것이다.

Centroid type-reducer에서는 모든 출력 type-2 셋을 결합시킨다.

$$\mu_B(y) = \bigwedge_{i=1}^M \mu_{B'}(y) \quad (8)$$

$$Y_c(\mathbf{x}) =$$

$$\int_{\theta_1} \int_{\theta_N} [\mu_{D_1}(\theta_1) \star \dots \star \mu_{D_N}(\theta_N)] \frac{\sum_{i=1}^N y_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}$$

$$\text{where } D_i = \mu_B(y_i) \text{ and } \theta_i \in \mu_B(y_i) \quad (9)$$

### 2.4 Defuzzification

우리는 type-2 FLS에서 crisp 출력을 얻기 위해 type-reduced 셋을 비퍼지화 한다. 이것을 행하는 가장 자연스러운 방법은 그 type-reduced 셋의 중심 값을 구하는 것일 것이다. 중심 값을 구한다는 것은 type-2 FLS에 모든 임베디드 type-1 FLS의 출력

의 weighted average를 구하는 것과 같다. 입력 에 대해 type-reduced 셋  $Y$ 가 이산화 되어  $N$ 개의 구간을 구성하고 있다면 그 중심에 대한 식은 다음과 같다.

$$C_Y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^N y_k \mu_Y(y_k)}{\sum_{k=1}^N \mu_Y(y_k)} \quad (10)$$

### III. Simulation

잘 알려진 Box-Jenkins 가스로 데이터는 그 특성이 비선형적이며, 일반적인 방법으로 묘사하기 어렵다. 여기에서 데이터 셋은 148개의 입출력으로 구성되어 있으며, 입력  $u(t)$ 는 가스로 흐르는 가스의 변화량이며 출력  $y(t)$ 는 배기가스에서의 CO<sub>2</sub>의 농도를 나타낸다 [3]. 이 논문에서 우리는 Box-Jenkins 가스로 데이터를 singleton type-1 FLS, non-singleton type-1 FLS, singleton type-2 FLS에 대해 적용해 보고 그 특성을 비교 분석해 본다. 각 입력에 대해 그림 2와 같은 노이즈를 고려하였다.

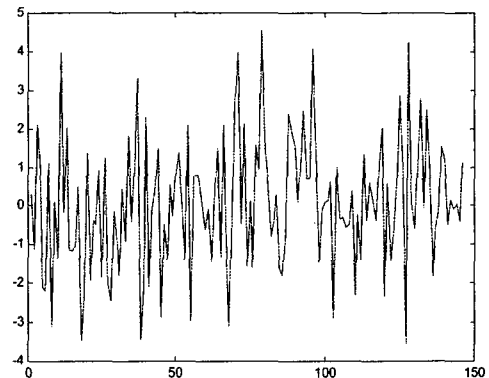


그림 2. 입력에 추가된 노이즈

각 시스템에 대한 실제 출력 값과 시스템의 출력 값 사이의 오차는 아래 표1에 나타내었다. Type-1 시스템에 비해 type-2 시스템에서 보다 우수한 성능을 얻을 수 있었다.

표1. 각 시스템에 대한 오차 값

	MSE
sfls_type_1	0.4111
nsfls_type_1	2.0348
sfls_type_2	0.3620

그림 3, 4, 5은 각각의 시스템에 대한 실제 출력 값과 시스템의 출력 값에 대한 결과를 같이 나타낸 것이며, type-2 시스템인 그림 5의 경우에서 성능이 가장 우수한 확인 할 수 있다.

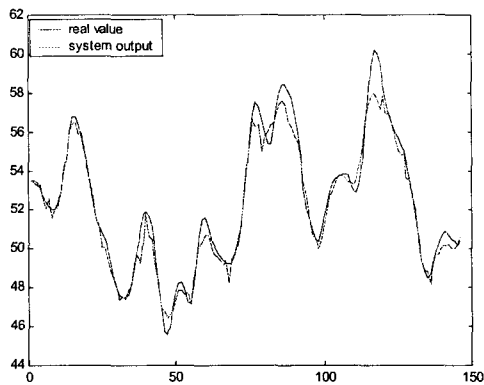


그림 3. singleton type-1 FLS에서의 출력

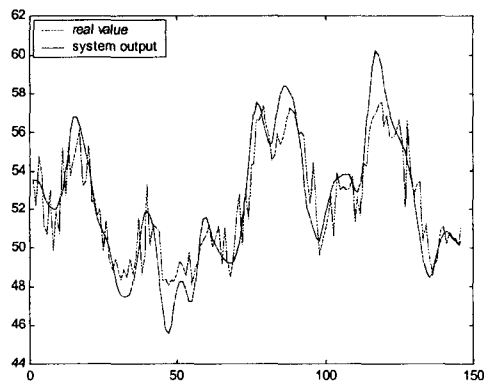


그림 4. non-singleton type-1 FLS의 출력

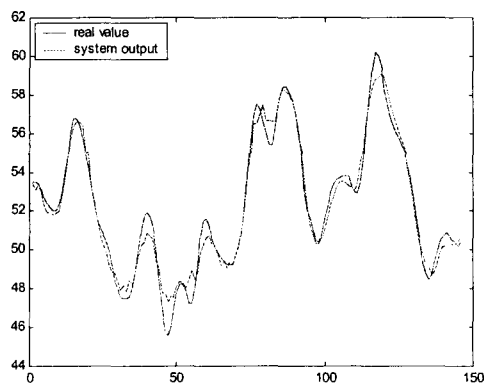


그림 5. singleton type-2 FLS에서의 출력

## IV. 결 론

이번 실험에서는 데이터에 노이즈를 인가 하였을 때 singleton type-1, non-singleton type-1과 singleton type-2 FLS에 대한 성능을 비교 분석하였다. 그런데 그 노이즈의 영향이 시뮬레이션의 결과에 상당부분 영향을 끼치는 것을 알 수 있었다.

Type-1 FLS에 비해 type-2 FLS은 불확실성을 보다 더 잘 다루며, 더 우수한 성능을 보였다. 그러나 연산 과정에서 secondary 멤버십에서 오는 계산은 다소 복잡하게 되며, 계산 시간도 많이 걸리게 된다. 따라서 우리는 시스템의 성능과 복잡성 사이에서 적당한 타협점을 찾아야 한다. 또한 실시간으로 데이터의 처리가 요구되는 환경에서는 적당한 오차 범위 내에서 성능을 낼 수 있도록 설계되어야 할 것이다.

## V. 참고문헌

- [1] Nilesh N. Karnik, Jerry M. Mendel, Qilian Liang, "Type-2 Fuzzy Logic Systems", IEEE TRANSACTION ON FUZZY SYSTEMS, VOL.7, NO.6, DECEMBER 1999
- [2] Jerry M. Mendel, "On the important of Interval Sets in Type-2 Fuzzy Logic Systems"
- [3] G. E. P Box and F. M. Jenkins, *Time Series Analysis : Forecasting and Control* 2nd ed. Holden-day, 1976
- [4] Lefteri H. Tsoukalas, Robert E. Uhrig "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering", A Wiley-Interscience Publication