

무두께 요소층 확장을 이용한 육면체 격자의 세분화 기법

박철현*·양동열**

A New All-Hexahedral Refinement Technique by Automatic Expansion of Zero-Thickness Element Layers

C.H. Park and D.Y. Yang

Abstract

This paper presents a new algorithm that can refine hexahedral elements while maintaining the appropriate connectivity. In the algorithm, at first the regions of mesh to be refined are defined and, then, the zero-thickness element layers inserted into the interfaces between the regions. All the meshes in the regions, in which the zero-thickness layers are inserted, are to be regularized in order to improve the shape of the slender elements on the interfaces. This algorithm is applied to the analysis of plastic deformation process. The results show that the refined mesh gives smaller relative errors than the original mesh.

Key Words : hexahedral mesh, zero-thickness elements, zero-thickness element layer, refinement, FEM

1. 서론

유한요소 해석은 수학적 해를 구하기 어려운 복잡한 물리현상에 대한 수치적 근사해를 제공한다. 단조공정도 역시 수학적 해를 구하기 어려운 동시에 대변형(large deformation)의 문제이므로, 유한요소 해석이 사용되고 해석 도중 격자의 변형에 의해 새로운 격자 구성과 유동의 흐름에 의해 격자 밀도 조절이 요구된다.

일반적으로 사면체 요소를 사용하면 3차원 형상의 격자를 구성 및 재구성, 격자 세분화 작업이 육면체 요소를 사용하는 것보다 쉽게 구현된다. 그러나 육면체 요소가 해석의 정밀도가 우수하고, 요소의 구조가 실제형상을 잘 표현하는 이유 때문에 많은 연구자들은 사면체 요

소보다 육면체 요소를 이용한 해석을 선호 하고 있다^(1,2).

Owen의 격자 구성 기법에 대한 조사⁽³⁾에 의하면, 육면체 요소를 구성하는 방법을 Mapped meshing, Medial surface방법, Plastering방법, Whisker weaving방법, Grid-based 방법으로 구분하고 있다.

격자의 구성에서 격자의 유효성(validity)뿐만 아니라 계산의 경제성과 해석의 정밀도를 고려 할 때, 최소의 격자 개수와 요구되는 정밀도에 부합하는 격자 세분화 과정이 필요하다. 이와 관련된 연구로는 grid-based 방법으로 만들어진 육면체 격자의 외부에 무두께 요소(zero-thickness elements)를 삽입하여 표면의 격자품질(mesh quality)을 향상시키는 연구와⁽⁴⁾ 몇 개의 격자 모듈을 이용하여 소재 유동에 적용하는 육면체 격자의 모

* 한국과학기술원 기계공학과 대학원

** 한국과학기술원 기계공학과

들화 격자 재구성 기법의 연구가 있었다⁽⁵⁾. 옥트리(oct-tree)방법을 이용한 육면체 격자의 세분화 기법의 제안이 있었으며⁽⁶⁾, cleave and fill기법을 이용하여 스위핑(sweeping)방법으로 생성된 육면체 격자의 세분화 연구가 있었다⁽⁷⁾.

본 연구에서는 Zienkiewicz-Zhu의 오차 추정법(error estimator)⁽⁸⁾을 이용하여 요소의 크기를 결정하고, 세분화에 필요한 추가적인 요소는 무두께 요소층(zero-thickness element layer)을 삽입하여 격자 밀도를 조절하였다. 무두께 요소의 출발은 표면 요소의 격자 품질을 향상시키기 위하여 도입되었으나 본 연구에서는 이 요소층을 격자의 표면이 아니라 세분화 될 영역과 나머지 영역 사이에 삽입하고 확장함으로써 격자 세분화를 완성한다.

2. 알고리즘

본 연구에서는 정규 격자 뿐만 아니라, 비정규 육면체 격자에 대해서 격자 세분화가 가능한 방법을 제안하는 것이 목적이다. 첫번째 단계는 격자가 세분화 될 영역을 선택하는 것으로 에너지 오차를 이용하여 기준값 이상의 오차가 발생하는 영역을 격자 세분화 영역으로 선택한다. 그 다음 선택된 영역에 추가로 필요한 요소의 수를 계산하고, 필요한 무두께 요소층을 삽입한다. 마지막으로 삽입된 요소들이 해석이 가능한 두께를 갖도록 격자 유연화를 수행 한다.

2.1 용어 정의

① 무두께 요소(Zero-thickness element, ZTE)

두께가 거의 0인 요소를 말하고, 이 요소는 두께가 없기 때문에 유한 요소 해석에는 부적당하여, 삽입된 후에 격자 유연화를 통해서 해석이 가능하도록 격자 품질을 개선시킨다.

② 무두께 요소층(Zero-thickness element layer, ZTL)

위 무두께 요소가 모여서 하나의 면을 이룬 것으로 격자 세분화를 위해 실제로 삽입되는 요소들의 집합이다. 이 층의 개수에 따라서 세분화 정도가 좌우 된다. Fig. 1(b)에 해당한다.

③ 세분화 영역(Region subject to refinement, RSR)

격자 세분화는 전체 격자중 일부분의 격자 밀도를 증가시키는 것이므로, Fig. 1(a)와 같이 격자 밀도가 증가 될 영역을 말한다.

④ 세분화 시작면(Frontal surface of refinement, FSR)

Fig. 1(c)와 같이 격자가 세분화 될 영역과 그렇지 않은 영역을 구분하는 면으로, 이 면을 따라서 무두께 요소층이 삽입된다. 이 면은 격자 세분화 정도에 따라 수와 위치가 달라진다.

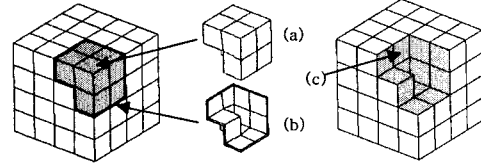


Fig. 1(a) Region subject to refinement

Fig. 1(b) Zero-thickness element layer

Fig. 1(c) Frontal surface of refinement

2.2 세분화 영역(RSR)의 선택

격자 세분화를 위해서 세분화 영역을 선택하는 방법을 여러 가지가 있지만 여기서는 Zienkiewicz-Zhu의 에너지 오차를 이용하여 허용 오차 이상의 요소의 집합을 세분화 영역으로 선택한다. 요소의 해석 오차를 에너지 노름(energy norm)의 형태로 나타내면 다음식과 같고

$$\|e_i\|^2 = \int_{\Omega_i} (\sigma_h - \sigma^*)^T (\epsilon_h - \epsilon^*) d\Omega_i \quad (1)$$

여기서 e_i 는 i 번째 요소의 오차를 나타내고, σ_h 와 ϵ_h 는 유한 요소 해석에 의한 결과이고, σ^* 와 ϵ^* 는 개선된 해(improved solution)이다. 실제 계산에서는 오차의 절대값보다는 상대값을 사용하는 것이 쉽기 때문에 요소의 상대 오차를 정의 하고, 이를 이용한다.

$$\eta_i = \left(\frac{\|e_i\|^2}{\|u_h\|^2 + \|e\|^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

현재 요소의 상대 오차(η_i)와 요소에 허용되는 허용 상대 오차(η_i^*)와의 비를 이용해서 현재 요소의 한 변의 길이와 새 요소의 한 변의 길이의 비를 나타내면 식(3)과 같다⁽⁹⁾. 여기서 K 는 요소의 형상 함수의 차수와 미분 차수에 따라 정해지는 정수 이다.

$$\zeta_i = \frac{h_{new}}{h_{old}} = \left(\frac{\eta_i}{\eta_i^*} \right)^{-1/K} \quad (3)$$

위 식을 이용해 각 요소에 대해서 ζ_i 를 계산한다. 이

값이 한계 요소 크기비 ζ_c 이하인 경우 그 요소를 RSR에 포함시킨다. RSR을 Ω_R 이라고 하고 격자의 요소를 E_i 라고 하면, RSR은 아래 식(4)와 같이 표현된다.

$$\Omega_R = \{E_i | \zeta_i < \zeta_c\} \quad (4)$$

격자 세분화 영역이 선택되고 나면, 이 영역과 나머지 영역의 경계를 이루는 요소의 면을 추출하여 FSR을 만든다.

2.3 무두께 요소층(ZTL)의 삽입

현재의 요소의 상대 오차와 허용 한계 오차를 이용하여 새 요소의 크기를 구하고 RSR을 선택한 후 이 RSR과 나머지 요소와의 경계면인 FSR을 추출해 낸다. 하나의 무두께 요소층에 의해서 삽입되는 요소의 개수는 FSR을 이루는 요소면의 개수(N_f)와 같다. 따라서 RSR에 추가될 요소의 수를 M^* 라고 하면, ZTL의 개수, N_z 은 M^* 를 N_f 로 나눈 값의 소수점 첫째 자리에서 반올림한 정수이다. 삽입될 ZTL의 개수를 구하고 나면, Fig. 1(b)와 같은 ZTL을 FSR을 따라 삽입한다.

2.4 무두께 요소층(ZTL)의 확장

이렇게 삽입된 요소는 두께가 없기 때문에 요소의 Jacobian값이 0이고 유한 요소 해석이 불가능하다. 따라서 삽입된 요소를 두께를 가지도록 확장한다. 확장을 하는 방법에는 여러 가지 있으나 여기서는 간단한 Laplacian 격자 유연화를 사용하였다. 이 유연화 과정을 전체 요소에 사용하는 것이 아니라, 삽입된 무두께 요소와 RSR내에 있던 요소에 대해서 부분적으로 수행한다.

3. 예제 : 인덴테이션(Indentation)

ZTL 이용한 격자 세분화 방법을 인덴테이션해석에 적용하였다. Fig. 2는 해석 모델을 나타내고 있다. 강소성 유한 요소법을 사용하였고, 대칭을 고려하여 1/8만 해석하였다. 소재는 S45C, 유동 응력식은 $\bar{\sigma} = 97.2\bar{\epsilon}^{0.14} \text{kgf/mm}^2$ 을 사용하였다. 초기 격자(MESH1)는 임의의 크기의 격자를 사용하였고, 0.5mm 성형 후, 격자 세분화를 수행하였다. 전체 요소의 허용 상대 오차가 0.5%(MESH2), 0.3%(MESH3) 두 가지 경우에 대해 각각 격자 세분화를 하고 그 결과를 비교하였다. 세분화 영역을 선택하기 위해서 한계 요소 크기비

(ζ_c)는 0.6을 사용하였다.

Fig. 3은 초기 격자에서 허용 상대 오차에 따라 선택된 영역을 나타내고 있다. 펀치의 반경에 의해 성형되는 부분에서 유동이 집중되므로, 이 부분이 상대 오차가 다른 곳에 비해 비교적 크게 나타나고, 따라서 이 부분을 중심으로 영역이 선택된다. 허용 한계오차 값이 낮을수록 더 많은 요소가 선택되었다.

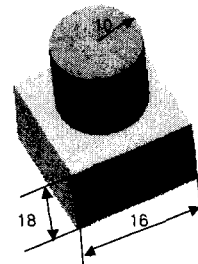


Fig. 2 The indentation model

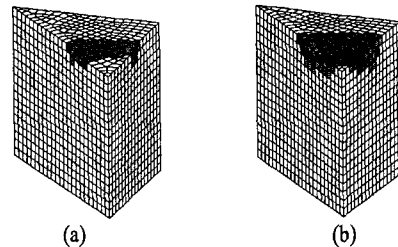


Fig. 3 Region subject to refinement (a) for MESH2 (b) for MESH3

Fig. 4는 MESH2를 구성하는 과정을 나타낸 것이다. 초기 격자의 FSR에 3개의 ZTL이 삽입이 되고, 격자 유연화를 통해 두께가 없던 요소가 확장되어 영역을 세분화 한다. 3개의 요소층을 통해서 222개의 새로운 요소가 추가 되었다. Fig. 5는 MESH3의 경우를 나타내고 있다. 이 경우에는 6개의 요소층이 추가 되었고, 요소는 1588개가 추가 되었다.

Fig. 6은 각각의 격자를 이용하여 해석을 수행 했을 때의 전체 상대 오차 값을 각 성형 단계에 따라 그린 것이다. 세분화를 수행 하지 않은 격자를 사용했을 때는 0.75mm에서 2.72%의 오차가 발생하였고, MESH2에서는 1.96%, MESH3에서는 1.40%의 오차가 발생하였다. 초기에 제시한 원하는 상대 오차와는 차이가 있지만, 격자 세분화에 의해 해석 오차가 감소하는 것을 확인할 수 있다. 요구된 오차와의 차이는 영역의 선택방법, 면의 개수, 격자의 확장방법에 따라서 조절 할 수 있을 것으로 기대된다.

4. 결론

본 연구에서는 육면체 요소 격자의 격자 세분화 기법을 제시하였다. 해석의 상대 오차를 이용하여 세분화될 영역을 선택하고, 선택된 영역의 경계면에 무드게 요소 층을 삽입하여, 확장함으로써 선택된 영역의 격자 밀도를 증가 시켜 격자 세분화를 수행한다. 예제를 통해서 요구되는 상대 오차 값에 따라서 격자의 세분화 정도를 조절 할 수 있었고, 격자가 세분화됨으로써, 상대오차를 낮출 수 있었다.

향후에는 요구되는 격자 밀도에 따라 하나 이상의 RSR과 FSR을 사용하여 복잡한 예제의 격자 세분화 방법을 구현도록 한다.

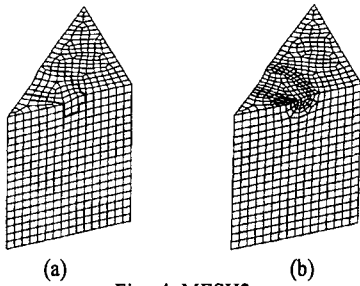


Fig. 4 MESH2
(a) mesh before expansion
(b) final mesh after expansion

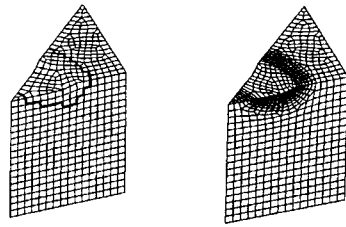


Fig. 5 MESH3
(a) mesh before expansion
(b) final mesh after expansion

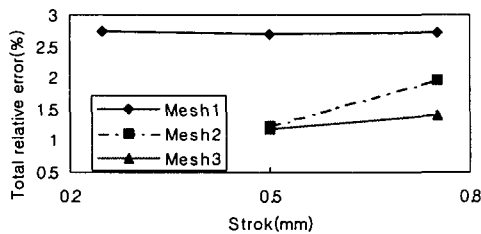


Fig. 6 Comparison of total relative errors

참고 문헌

- (1) Tautges, T. J.: The Generation of Hexahedral Meshes for Assembly Geometry : Survey and Progress, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50(2000), 2617-2642.
- (2) Cifuentes, A. O. and Kalbag, A.: A Performance Study of Tetrahedral and Hexahedral Elements in 3-D Finite Element Structural Analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 12(1992), 313-318.
- (3) Owen, S. J.: A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology, 7th International Meshing Roundtable, (1998).
- (4) Lee, Y. K. and Yang, D. Y., A Grid-based Approach to Non-regular Mesh Generation for Automatic Remeshing with Metal Forming Analysis, *Commun. Num. Meth. Eng.*, Vol. 16(2000), 625-635.
- (5) Yang, D. Y., Lee, N. K., Yoon, J. H., Chenot, J. L. and Soyris, N.: A Three Dimensional Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Spur Gear Forging Using the Modular Remeshing Technique, *Instn. Mech. Engrs. Part B : J. of Engng. Manufacture*, Vol. 205(1991), 111-121.
- (6) Schneiders, R., Schindler, R. and Weiler, F.: Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes, 5th International Meshing Roundtable, (1996), 205-215.
- (7) Borden, M., Benzley, S., Mitchell, S. A., White, D. R. and Meyers, R.: The Cleave and Fill Tool : An All-Hexahedral Refinement Algorithm for Swept Meshes, 9th International Meshing Roundtable, (2000).
- (8) Zienkiewicz O. C. and Zhu, J. Z.: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Numer. Methods eng.*, Vol. 24(1987), 337-357.
- (9) Li, L. Y. and Bettess, P.: Notes on Mesh Optimal Criteria in Adaptive Finite Element Computations, *Commun. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11(1995), 911-915.