

# 격자압축을 이용해 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법

홍진태\*·이석렬\*·양동열\*

## An Effective mesh smoothing technique for the mesh constructed by the mesh compression technique

J.T. Hong, S.R. Lee and D.Y. Yang

### Abstract

In the finite element simulation of hot forging processes using hexahedron, remeshing of a flash is very difficult. The mesh compression method is a remeshing technique to construct an effective hexahedral mesh. However, because mesh is distorted during the compression procedure of the mesh compression method, mesh smoothing is necessary to improve the mesh quality. In this study, several geometric mesh smoothing techniques and a matrix norm optimization technique are applied and compared which is more adaptive to the mesh compression method.

**Key Words** : Finite Element Mesh, Remeshing Scheme, Mesh Compression Method, Mesh Optimization, Smoothing,

### 1. 서 론

소성가공공정의 하나인 열간단조에서는 의도적으로 플래시를 유발시키도록 설계함으로써 소재의 흐름을 좋게 하고, 압축하중을 줄이며, 금형마모와 수명을 연장시키는 노력을 한다. 일반적으로, 플래시의 두께가 소재 형상에 비해 매우 얇기 때문에 육면체요소를 이용한 강소성 유한요소해석에서는 플래시의 해석을 위한 격자구성이 매우 까다롭다. 따라서, 국소적으로 격자밀도를 높일수 있는 방법인 격자압축법<sup>(1)</sup>을 이용하면 플래시 부분에 높은 밀도의 격자가 구성되어, 전체적으로 작은 크기의 요소

를 구성하여야 하는 기존의 격자구성 방법보다 매우 효율적인 해석이 가능해진다. 그러나, 격자압축법을 이용한 격자구성 도중, 확장된 형상에서 구성된 격자를 원래의 형상으로 압축하는 과정에서 압축량이 많은 부위의 격자가 심하게 찌그러지기 때문에 격자의 유연화 과정이 필요하다. 기본적으로 알려진 기하학적 격자유연화 방법으로는, isoparametric 유연화방법, Laplacian 유연화방법<sup>(2)</sup>, 각도 기준 유연화방법<sup>(3)</sup> 등이 있고, 최근에는 행렬 norm의 최적화 방법을 이용한 격자유연화방법들이 제시되고 있으며, 본 연구에서는 성능이 좋은 유연화 방법으로 알려진 smoothness 유연화 방법을 고려하여 보기로 한다.

\* 한국과학기술원 기계공학과

위의 유연화 방법들을 이용하여 재배치된 격자를 여러 가지 기준을 이용하여 비교하여 보고, 어떤 방법이 격자압축법을 이용해 구성된 격자의 유연화에 가장 적합한지 알아보기로 한다.

## 2. 격자유연화 방법

### 2.1 격자압축법 개요

격자 유연화에 앞서, 격자를 재구성하는 방법인 격자압축법에 대해서 간단히 알아본다. 격자압축법은 플래시가 있는 형상의 격자 재구성 시 Fig.1 과 같은 과정을 거친다. 즉, 격자압축법은 격자재구성시 경계면의 기하형상(boundary geometry)을 확장해서 표현한 후에 마스터그리드방법(Master Grid Approach)<sup>(5-6)</sup>으로 격자를 구성하고 본래의 형상으로 압축한 후, 격자를 재조정하는 격자재구성방법이다. 이는, 작고 세밀한 부분의 기술을 위해 전체적인 격자의 크기를 작게 구성하고 해석할 때 발생하는 문제점인 정밀한 해석이 필요 없는 부위까지도 많은 수의 요소를 이용하여 계산하는 기존의 정규격자(Regular mesh)에 의한 격자재구성 방법의 단점을 해결할 수 있다.

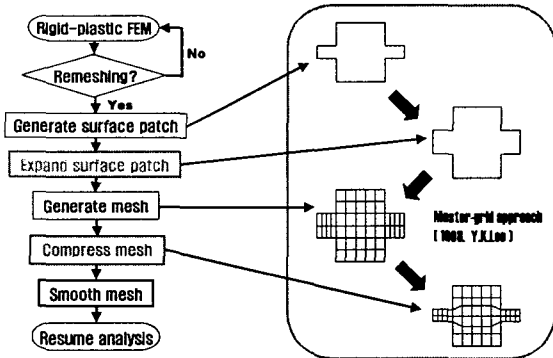


Fig. 1 Algorithm for mesh compression

### 2.2 격자유연화 방법

격자압축법을 거친 격자는 플래시가 나오기 시작하는 부분, rib-web형상의 곡률이 심한 부분 등에서 요소가 매우 심하게 찌그러져 있으므로 반드시 격자유연화 과정을 거쳐야 해석에 이용이 가능하다. 그러나, 격자압축과정에서 형상 곡률이 심한 부분의 일부 절점들이 형상 표면을 벗어나 요소가 뒤집히거나 영키는데, 이러한 경우, 유연화방법만으로는 좋은 질을 갖는 요소를 만들기 어렵다. 따라서, 격자유연화 이전에 형상을 벗어난 절점들

을 모두 형상 안으로 넣어주면서 요소의 영키를 최소화하는 작업(untangling)이 선행되어야 한다. 이 작업 후에 격자유연화 방법을 적용하면 보다 좋은 질의 요소를 구성할 수 있으며 그 내용은 다음과 같다.

#### Group 1. 요소 영키 최소화 (untangling)

격자의 jacobian값이 음의 값인 격자를 절점을 이동시켜 양의 값으로 만들어주기 위해서 다음과 같은 과정을 수행하였다.

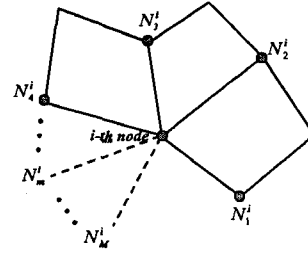


Fig. 2 Boundary node set of i-th internal node

Fig. 2는 내부의 한 절점과 이웃하고 있는 절점 간의 관계를 보여준다. 절점번호가  $i$ 인 절점의 위치는  $(x^i, y^i)$  이다. 이 절점과 이웃하고 있는 절점들을 반시계방향으로 순열시킨다.

$$S^i = \{N_1^i, N_2^i, \dots, N_m^i, \dots, N_M^i\}, N_{M+1}^i = N_1^i \quad (1)$$

절점  $N_m^i$  와  $N_{m+1}^i$  의 위치를 각각  $(x_m^i, y_m^i)$ ,  $(x_{m+1}^i, y_{m+1}^i)$  이라 하면,  $f_m^i$  은 다음과 같이 정의된다.

$$f_m^i = J_m^i = [e_m^i, e_{m+1}^i] = \begin{vmatrix} x_m^i - x^i & x_{m+1}^i - x^i \\ y_m^i - y^i & y_{m+1}^i - y^i \end{vmatrix} \quad (2)$$

모든 내부 절점들에 대해  $f_m^i$  값을 계산하였을 때, 모두 양의 값을 가지면 영키 격자가 모두 제거되었다는 것을 의미하므로 다음과 같은 최적화 과정을 통해 untangling을 하였다.<sup>(7)</sup>

$$\max_{i=1, N} \{ \min \{ f_1^i, f_2^i, \dots, f_m^i, \dots, f_M^i \} \} \quad (3)$$

여기서,  $N$ 은 절점의 총 개수이다. 최적화는 linear programming 방법으로 수행하였다.

#### Group 2. 격자유연화 (smoothing)

##### Scheme 1 : Isoparametric smoothing

한 절점의 새로운 위치를 주변 절점들의 평균 위치로 이동하는 방법이다.  $P_N$  은 절점의 새로운 좌표,  $N_F$  이웃하는 절점의 개수이다.

$$P_N = \frac{\sum_{i=1}^{N_F} P_i}{N_F} \quad (4)$$

**Scheme 2 : Laplacian smoothing**

한 절점의 주변 요소들의 부피가 비슷해지도록 절점을 이동하는 방법이다.

$$P_N = \frac{\sum_{i=1}^{N_F} V_i^F C_i^F}{\sum_{i=1}^{N_F} V_i^F} \quad (5)$$

$P_N$  은 절점의 새로운 좌표,  $V_i^F$  는 주변 요소의 부피,  $C_i^F$  는 주변 요소의 중심 좌표이다.

**Scheme 3 : Angle-based smoothing**

각 절점들이 회전스프링으로 연결되어 있다는 개념으로 스프링의 위치에너지가 최소가 되도록 절점들을 이동해 나가는 방법이다.

$$E = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2} K \theta_i^2 \quad (6)$$

**Scheme 4 : Smoothness smoothing**

smoothness 범함수는 Brackbill<sup>(4)</sup>에 의해 제안되었으며, Jacobian 행렬의 condition number의 합으로 표현된다. Singular Jacobian 행렬을 최대한 억제시킨다는 의미에서, Oddy's metric과 매우 유사하다.

$$\min f = \min \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} |J_m| |J_{m1}| \right\} \quad (7)$$

최적화 방법은 Hessian 행렬을 구하는 Newton 방법을 사용하였다.<sup>(8)</sup>

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_n \quad (8)$$

수렴조건은 다음과 같다.

$$\delta_n < 1.0^{-6}, \quad \delta_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \quad (9)$$

**3. 격자유연화 결과**

전절에서 제시한 격자유연화 방법들을 이용하여 2차원 예제에 대하여 테스트 해보았다.

**3.1 리브웹 (rib-web) 형상**

축대칭 단조형상 중 격자유연화 효과를 잘 파악할 수 있는 리브웹형상에서 격자압축법을 통해 구성된 격자에 대해 Group1의 요소영킹 최소화를 실행한 후(Fig.3), Group2의 방법들을 이용하여 격자유연화한 결과는 Fig.4와 같다.

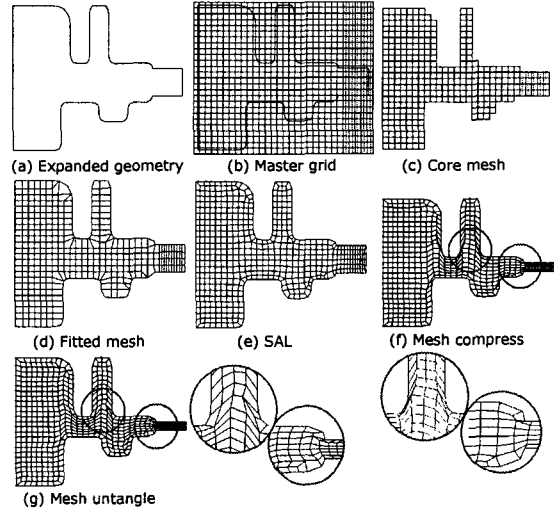


Fig. 3 A Mesh constructed by the mesh compression method

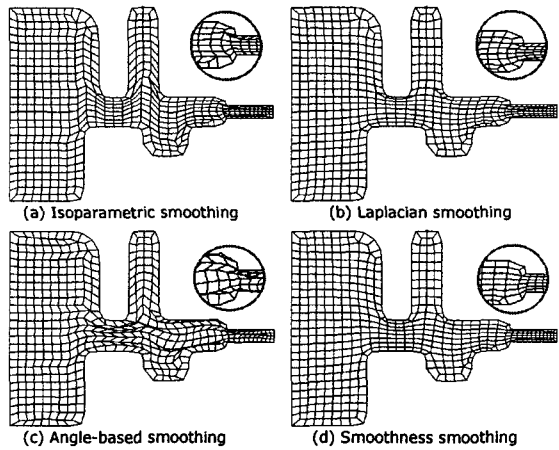


Fig. 4 Comparison of mesh smoothing (example 1)

Table 1 Mesh quality improvement

case	Max. angle(°)	Min. angle(°)
Isoparametric	176.6	-15.5
Laplacian	179.8	-1.5
Angle-based	179.5	-0.18
Smoothness	163.8	32.9

리브웹 형상의 특성상 곡률이 심한 부분이 많아서 대부분이 좋은 요소를 구해내지 못했으며, 각 방법을 통해 구해진 격자의 질은 Table 1에서 비교하였다. 본 예제에서는 최적자유연화 방법인 smoothness 유연화만 좋은 요소들을 구하는데 성공하였다.

### 3.2 소켓 (socket) 형상

소켓 형상의 단조예제에 대하여 테스트한 결과는 Fig.5와 Table 2에서 비교하였다.

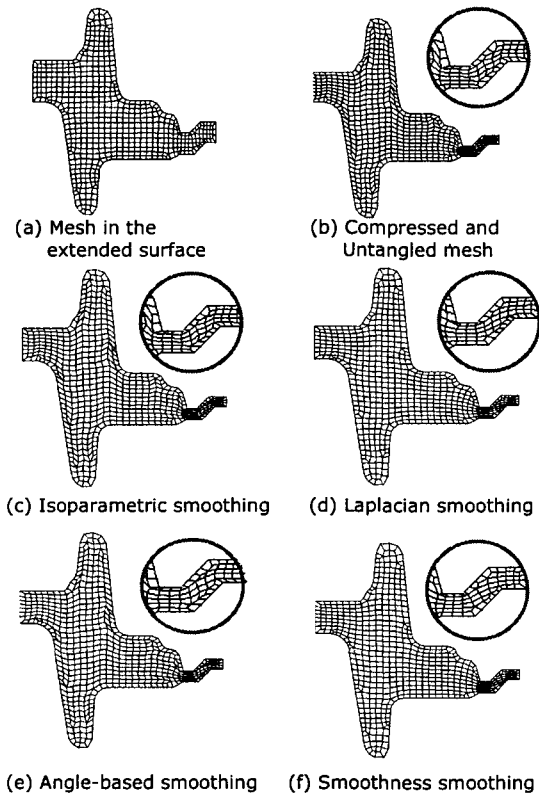


Fig. 5 Comparison of mesh smoothing (example 2)

Table 2 Mesh quality improvement

case	Max. angle(°)	Min. angle(°)
Isoparametric	165.6	15.37
Laplacian	175.3	-12.57
Angle-based	174	16.69
Smoothness	162.3	32.6

이 예제에서는 Laplacian 유연화 방법을 제외한 나머지 방법 모두 격자유연화에 성공하였으며, Laplacian 방법은 알려진 대로 곡률이 심한 형상의 격자유연화에 적합하지 않음을 알 수 있다. 이 예제 역시 smoothness 유연화 방법이 가장 좋은 요소를 구해냈다.

### 4. 결론

본 연구에서는 격자압축법을 이용한 격자재구성 시 해

석의 정확도를 높이기 위해 격자의 질을 향상시킬 수 있는 여러 가지 격자유연화 방법들을 테스트해 보았다. 격자유연화 전에 형상을 벗어나서 뒤집히는 요소에 대해서 영킨 요소들을 풀어주는 작업이 선행되어야 하며, 행렬 값을 이용한 최적화 방법이 기하적 형상을 고려한 격자유연화 방법에 비해 구현이 복잡하나 격자압축법을 이용한 격자재구성 방법에서는 가장 강력한 방법임을 확인하였다.

### 참고 문헌

- (1) 홍진태, 양동열, 이석렬, 2002, "격자압축법을 이용한 3차원 열간단조공정해석", 한국소성가공학회지, Vol. 11, No.2, pp. 179~186.
- (2) Field D. A., 1988, "Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulation", Commun. Appl. Numer. Meth, Vol. 4, pp. 709~712.
- (3) Zhou T. and Shimada K., 2000, "An angle-based approach to two-dimensional mesh smoothing", 9th International meshing roundtable.
- (4) Brackbill j. and Saltzman J., 1982, "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions", J. Comput. Phys., Vol. 46, pp. 342~368.
- (5) Lee Y. K. and Yang D. Y., 1996, "A new automatic mesh generation technique and its application to the finite element analysis of practical forging process", 5th ICTP, pp. 409~413.
- (6) Lee Y. K. and Yang D. Y., 1998, "Development of a grid-based mesh generation technique and its application to remeshing during the finite element simulation of metal forming process", Eng. Comp., Vol. 16, pp. 316~336.
- (7) Freitag L. and Knupp P., 1999, "Tetrahedral Element Shape Optimization via the Jacobian Determinant and Condition Number", 8th International Meshing Roundtable
- (8) Knupp M., 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part I-a framework for surface mesh optimization", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 48, pp. 401~420.