

격자밀도에 적응하는 드로우니 격자 생성방법

홍진태*·이석렬*·양동열*

Modified Delaunay Mesh generation adapted to the mesh density map

J.T. Hong, S.R. Lee and D.Y. Yang

Abstract

The remeshing algorithm using the constrained Delaunay method adapted to the mesh density map is developed. In the finite element simulation of forging process, the numerical error increases as the process goes on. However, it is not desirable to use a uniformly fine mesh in the whole domain. Therefore, it is necessary to reduce the analysis error by constructing locally fine mesh at the region where the error is concentrated such as die corner. In this paper, the point insertion algorithm is used and mesh size is controlled by using a mesh density map constructed with a posteriori error estimation. And an optimized smoothing technique is adapted to have smooth distribution and improve the quality of the mesh.

Key Words : Finite Element Mesh, Remeshing Scheme, Control of mesh density, Mesh Optimization, Smoothing,

1. 서론

소재의 대변형을 수반하는 소성가공공정의 유한요소해석에서는 기본적으로 유한요소 자체의 이산적 특징에 의해 분석적 해와 오차가 발생한다. 특히, 응력이나 변형률이 집중되는 영역에서는 해석 오차가 급격히 발생하므로 이러한 영역에 적응하는 효율적이고 적절한 밀도 분포를 갖는 격자의 구성이 필요하다. 대부분의 소성변형이 표면에 집중되어있는 점에서 볼 때, 형상에 적응하는 격자

의 구성만으로도 상당부분 해석오차가 줄어들기는 하나, 소재 내부에 응력 집중이 걸리는 예제의 경우는 해석오차를 피할 수 없다. 따라서, 해석오차를 고려하여 격자의 크기 및 분포를 제시[1]하고, 그에 따라 최적의 분포 및 질을 갖는 격자의 구성이 필요하다.

본 논문에서는, Zienkiewicz가 제안한 에너지 오차법 [2,3]을 이용하여 격자 밀도 지도를 구한 후, 각 위치에 서 격자밀도에 맞춰 절점을 생성하였으며, 격자구성 알고리즘은 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알

* 한국과학기술원 기계공학과

려진 Constrained Delaunay 방법[4~6]을 이용하였다. 또, 행렬식 최적화 방법[8,9]을 이용하여 격자분포 및 요소의 질을 향상시켰다.

2. 격자재구성 방법

본 연구에서 제안하는 격자재구성 과정은 Fig.1 과 같다. 즉, 격자 재구성이 판별되었을 때, 그 단계에서 에너지 오차를 계산하고, 그 에너지 오차 값을 이용하여 적절한 격자 크기를 계산 한 후, 격자밀도 지도를 구성하여 격자를 구성하고 최적화를 하는 방법이다.

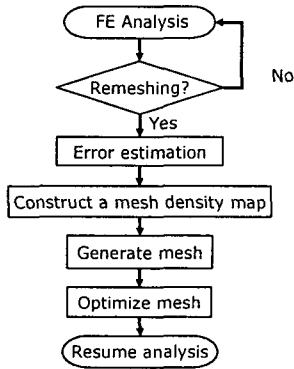


Fig. 1 Flow chart of remeshing procedure

2.1 에너지오차 계산

강소성 유한요소해석에 이용되는 구성방정식은 식(1)과 같으며, 각 단계의 요소들에서 계산되어 지는 유효변형률 값을 이용하여 유효 응력을 구한 후(식(2)), Zienkiewicz와 Zhu가 제안한 에너지 오차(식(3,4))를 이용하여 구한 오차는 식(5)와 같다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{V^m} (\bar{\sigma} + \alpha \Delta \dot{\epsilon} H) \dot{\epsilon} dV + K^* \int_{V^m} \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_i dV - \int_{S^m} (f_i + \alpha \Delta f_i) \delta_i dS \right] = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = C \dot{\epsilon}^m \quad (2)$$

$$\|e\|_{ele} = \sqrt{\int_{\Omega} (\bar{\sigma}' - \hat{\sigma}') : (\hat{\epsilon} - \dot{\epsilon}) d\Omega} \quad (3)$$

$$\|E\|_{ele} = \int_{\Omega_m} (\hat{\sigma}' \hat{\epsilon}_{ij} - p \hat{\epsilon}_{kk}) d\Omega \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\|e\|_{ele}}{\|E\|_{ele}} \leq \bar{\eta} \quad (5)$$

여기서, η 는 에너지 오차 비율이며, 최대 허용 오차는 식(6)과 같이 결정한다.

$$\bar{e}_{max} = \bar{\eta} \frac{\|E\|}{\sqrt{M}} \quad (6)$$

여기서, M 은 전체 요소의 개수이다.

2.2 격자 크기 결정 및 밀도지도 생성

전절에서 계산된 에너지 오차값으로부터 다음과 같이 새로운 요소의 크기를 결정할 수 있다.

$$\xi_m = \frac{\|e\|_m}{\bar{e}_{max}} \quad (7)$$

$$h^{new} = \frac{h_m}{\xi_m^{1/p}} \quad (8)$$

여기서, h_m 은 현재 요소의 크기이며, h^{new} 로부터 다음과 같이 격자의 면적밀도를 구한다.

$$D = \frac{1}{(h^{new})^2} \quad (9)$$

현재의 소재형상 전체를 에워싸며, 축좌표 방향으로 n_i, n_j 개씩 나누어진 배열에 각 요소에서 구한 면적밀도를 저장한다. 여러개의 요소가 포함되는 배열에서는 밀도값을 평균하여 적용한다.

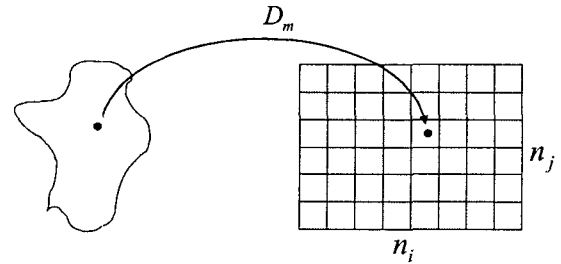


Fig. 2 Schematics of a mesh density array

2.3 격자 구성 및 최적화

전절에서 구성된 밀도지도로부터 식(10)을 이용하여 절점을 생성하였고, 격자구성은 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알려진 Constrained Delaunay방법을 이용하였다.

$$D_{new} = \sum_{i=1}^{neighbour} h_i D_i \quad (10)$$

해석의 정확성과 수렴성 향상을 위하여 최적화 방법을 이용하여 격자의 분포 및 격자의 모양을 향상시켜야하며 [7], Brackbill[8]이 제안한 smoothness 유연화 방법을 이용하여 다음과 같이 적용하였다. Smoothness 범함수는 식(10)과 같이 각 절점에서의 Jacobian 행렬의 condition number의 합으로 표현되며, Jacobian

행렬의 singularity를 최소화 시키는 방향으로 최적화를 수행하여 격자의 질을 향상시키게 된다.

$$\min f = \min \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} |J_m^{-1}| |J_m| \right\} \quad (10)$$

즉, Fig. 3에서 절점 i 의 위치를 (x^i, y^i) 이라 하고, N_m^i, N_{m+1}^i 의 위치를 $(x_m^i, y_m^i), (x_{m+1}^i, y_{m+1}^i)$ 이라 하면, J_m^i 은 식(11)과 같이 정의되며, Hessian 행렬을 구하는 Newton방법을 사용하여 최적화를 하였다[8].

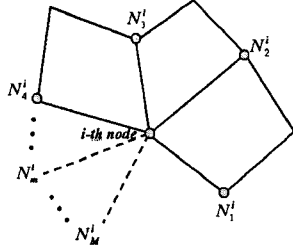


Fig. 3 Boundary node set of i -th internal node

$$J_m^i = [e_m^i, e_{m+1}^i] = \begin{vmatrix} x_m^i - x^i & x_{m+1}^i - x^i \\ y_m^i - y^i & y_{m+1}^i - y^i \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_n \quad (12)$$

수렴조건은 다음과 같다.

$$\delta_n < 1.0 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \quad (9)$$

3. 격자재구성 결과

전절에서 제시한 격자재구성 방법을 이용하여 여러 가지 2차원 예제에 대하여 테스트 해보았다.

3.1 Plate hole 예제

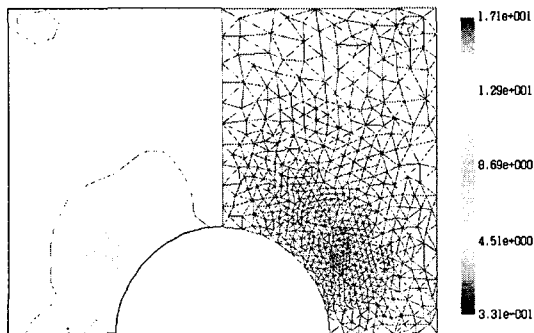


Fig. 4 Contour of a desired mesh density and a generated mesh (plate-hole)

Fig.4는 압축하중을 받는 plate hole에서 에너지 오차에 의한 격자밀도의 분포를 계산하고, 격자를 구성한 예이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 밀도 contour와 비슷한 분포의 적응격자가 구성되었으며, 정확한 분석을 위하여 재구성된 격자의 면적 밀도와 목표 면적밀도와의 contour를 비교해보면, Fig.5와 같다.

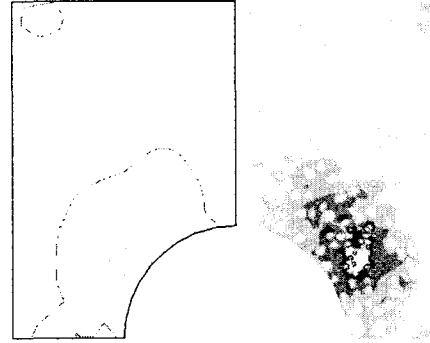


Fig. 5 Comparison of contours of mesh density

3.1 Pin 단조예제

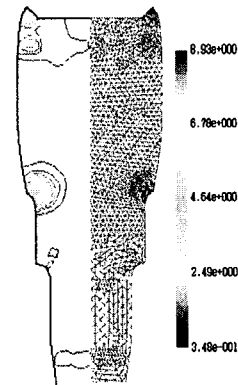


Fig. 6 Contour of a desired mesh density and a generated mesh (pin)

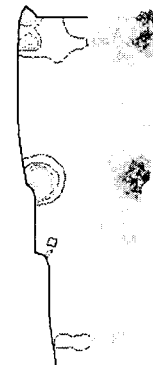


Fig. 7 Comparison of contours of mesh density

Pin제품의 단조공정에서 에너지오차에 의한 격자밀도의 분포를 구하고, Fig.6과 같이 격자를 구성하였다. 또, 재구성된 격자의 면적밀도와 목표 면적밀도와의 contour는 Fig.7과 같다.

이상의 두 예제에서, 에너지 오차를 이용하여 구성된 격자 밀도에 맞추어 격자재구성이 비교적 잘 구현되었다. 면적밀도 contour에서 보이는 약간의 차이는 격자 자체의 불연속적인 특성에 의한 한계도 있지만, 격자 세분화를 통해서 보완해야 할 부분이다.

4. 결론

본 연구에서는 Delaunay방법을 이용한 격자재구성 시, 해석의 정확도를 높이기 위해 에너지 오차방법을 이용하여 적절한 격자크기를 구하고, 그로부터 얻어진 격자밀도지도에 맞추어 적절한 분포를 갖는 격자를 구성하였으며, 요소의 크기차가 큰 격자에서 전체적인 요소의 질을 향상시키기 위하여 최적화 방법을 적용하였다. 목표 밀도에 비교적 잘 맞는 분포를 갖는 격자를 구성하였으나, 격자의 크기가 급격히 변하는 부분의 고려 및 더 정확한 격자구성을 위하여 다양한 유연화 방법 및 세분화 방법이 적용되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

(1) Okuda H., Yashiki T. and Yagawa G., 1997, "Three-dimensional finite element adaptive analysis of incompressible flow based on control of node density distribution and a posteriori error estimation", *Adv Eng. Softw*, Vol. 28, pp. 173~187.

(2) Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z., 1987, "A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.24, pp. 337~357.

(3) 박근, 양동열, 1996, "강소성 유한요소해석에서의 오차추정 및 적응적 격자세분화에의 적용", 대한기계학회 추계학술대회, pp. 385~390.

(4) Chew P., 1987, "Constrained Delaunay triangulation", ACM, New York.

(5) Baker T. J., 1989, "Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using the constrained Delaunay triangulation", *Eng. Comput.* Vol. 5, pp.161~175.

(6) Sloan S. W., 1993, "A fast algorithm for generating constrained delaunay triangulations", *Comput. Struct.*, Vol. 47, Issue. 3, pp. 441~450.

(7) 홍진태, 이석렬, 양동열, 2003, "격자압축을 이용해 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법", 한국소성가공학회, 춘계학술대회, pp. 331~334

(8) Brackbill j. and Saltzman J., 1982, "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions", *J. Comput. Phys.*, Vol. 46, pp. 342~368.

(9) Knupp P. M., 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part I-a framework for surface mesh optimization", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, pp. 401~420.