

슬라이딩 모드 제어기 설계를 위한 LQR방법을 이용한
최적 슬라이딩 표면 결정
Optimal Sliding Surface using LQR Method
For Design of Sliding Mode Controller

이상현* 민경원** 이영철*** 황재승****
Lee, Sang Hyun Min, Kyung-Won Lee, Young Cheol Hwang, Jae Seung

ABSTRACT

An efficient procedure using LQR method for determining optimal sliding surfaces appropriate for different controller types is provided. The parametric evaluation of the dynamic characteristics of sliding surfaces is performed in terms of SMC controller performance of single-degree-of-freedom(SDOF) systems. The control force limit is considered in this procedure. Numerical simulations for multi-degree-of-freedom(MDOF) systems verify the effectiveness of proposed method.

1. 서 론

최근 지진하중을 받는 대형구조물의 진동제어를 위해, 슬라이딩 모드제어가 사용되고 있다.¹⁾ 슬라이딩 모드 제어는 특히, 최대 지진응답과 같은 비정상상태의 제어에 기존의 선형최적제어보다 효과적인 것으로 알려져 있다.²⁾ 슬라이딩 모드 제어기의 설계를 위해서는 먼저, 구조물이 안정적인 거동을 보이는 슬라이딩 표면이 정의되어야 하며, 이러한 슬라이딩 표면은 극값지정 방법이나 LQR 방법에 의해 결정될 수 있다.³⁾ 지정할 극값이 미리 결정되어야 하는 극값지정 방법에 비해, LQR 방법은 주어진 성능지수를 최소화하는 슬라이딩 표면을 쉽게 결정할 수 있는 장점을 가지고 있다. LQR 방법에서 가장 중요한 것은 성능지수를 정의하는 가중행렬의 결정이며, 이것이 슬라이딩 모드제어의 제어성능을 결정한다 할 수 있다. 또한, 슬라이딩 모드제어기는 설계자의 의도에 따라 다양한 형태의 제어기 설계가 가능하며, 각 제어기의 제어성능은 결정된 슬라이딩 표면의 특성에 따라 결정된다.^{4),5)} 그러나, 기존의 슬라이딩 모드제어에 관한 연구는 슬라이딩 모드제어기의 형태와 슬라이딩 표면의 특성간의 상호관련성을 명확히 규명하지 못하였으며, 이에 따라 가중행렬을 산정하는 체계적이고 합리적인 설계절차를 제시하지 못하였다. 본 연구의 목적은 LQR 방법을 사용하여, 슬라이딩 모드 제어기의 형태에 적합한 최적의 슬라이딩 표면을 찾는 것이다. 이를 위해, 다양한 주기를 가지는 단자유도 시스템에 대한 해석을 통하여, 가

* 정회원 · 서울대학교 공학연구소 객원연구원, 공학박사
** 정회원 · 단국대학교 건축대학 건축공학과, 부교수
*** 학생회원 · 단국대학교 건축공학과, 석사과정
**** 정회원 · 전남대학교 건축학부 건축공학과, 전임강사

중행렬에 따른 슬라이딩 모드 제어기의 성능을 제어기 형태별로 분석하였다. 이로부터 얻어진 결과에 기초하여, 최적의 슬라이딩 표면을 결정하는 절차를 제시하였으며, 최종적으로 이를 다자유도 시스템에 적용함으로써 제안한 방법의 유효성을 검증하였다.

2. 슬라이딩 모드 제어기의 설계

2.1 상태방정식의 구성

지반가속도 \ddot{x}_g 와 크기 $r \times 1$ 인 제어력 \mathbf{u} 를 받는 n 자유도를 가지는 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{E}\ddot{x}_g + \mathbf{H}\mathbf{u} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 크기 $n \times n$ 의 질량, 점성, 강성행렬을 나타내고, \mathbf{E} 와 \mathbf{H} 는 각각 지진영향행렬, 제어력 영향행렬을 나타낸다. 위 식(1)을 다음 식과 같은 상태방정식으로 표현한다.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_1\ddot{x}_g + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2)$$

여기서,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (3)$$

\mathbf{I} 는 단위행렬이며, $\mathbf{0}$ 은 영행렬을 나타낸다.

2.2 슬라이딩 표면 설계⁶⁾

슬라이딩 표면은 상태변수의 선형 함수로 표현된다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4)$$

여기서, \mathbf{s} 는 r -벡타이고, \mathbf{P} 는 $r \times n$ 행렬이다. 슬라이딩 표면은 정규형태 상태방정식을 구성함으로써 구할 수 있다. 정규형태 상태변수는 다음과 같은 변환을 통해 얻어진다.

$$\mathbf{z}_r = \mathbf{T}_r\mathbf{z} \quad (5)$$

여기서, \mathbf{T}_r 는 변환행렬이며, 다음 식에 의해 주어진다.

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n-r} & -\mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, \mathbf{B}_{12} 와 \mathbf{B}_{22} 는 각각 $(2n-r) \times r$, $r \times r$ 크기를 가지는 다음과 같은 행렬이다.

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

\mathbf{I}_{2n-r} 과 \mathbf{I}_r 는 각각 크기 $(2n-r) \times r$, $r \times r$ 인 단위행렬이다.

정규형태의 변환을 사용하면, 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다. 이때, 지반가속도의 영향은

우선 배제되어 방정식을 구성한다.

$$\dot{\mathbf{z}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u} \quad (8)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}_r \mathbf{z}_r = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{T}_r \mathbf{A} \mathbf{T}_r^{-1}; \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{P}_r = \mathbf{P} \mathbf{T}_r^{-1} \quad (10)$$

이때, 슬라이딩 표면에서의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{z}}_{r1} = \mathbf{A}_{r11} \mathbf{z}_{r1} + \mathbf{A}_{r12} \mathbf{z}_{r2} \quad (11)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}_{r1} \mathbf{z}_{r1} + \mathbf{P}_{r2} \mathbf{z}_{r2} = 0 \quad (12)$$

여기서 \mathbf{z}_{r1} , \mathbf{z}_{r2} 는 각각 크기가 $2n-r$, r 인 \mathbf{z}_r 을 구성하는 벡타이고, \mathbf{A}_{r11} 과 \mathbf{A}_{r12} 는 각각 크기가, $(2n-r) \times (2n-r)$, $r \times r$ 인 \mathbf{A}_r 을 구성하는 행렬이다. 그리고 \mathbf{P}_{r1} 과 \mathbf{P}_{r2} 는 각각 크기가 $r \times (2n-r)$, $r \times r$ 인 \mathbf{P}_r 을 구성하는 행렬이다.

$$\mathbf{z}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{r1} \\ \mathbf{z}_{r2} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r11} & \mathbf{A}_{r12} \\ \mathbf{A}_{r21} & \mathbf{A}_{r22} \end{bmatrix}; \mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r1} \\ \mathbf{P}_{r2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(12)로부터, \mathbf{z}_{r2} 는 다음과 같이 \mathbf{z}_{r1} 의 선형함수로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{z}_{r2} = -\mathbf{P}_{r2}^{-1} \mathbf{P}_{r1} \mathbf{z}_{r1} \quad (14)$$

따라서, 식(11)은 다음과 같이 바뀐다.

$$\dot{\mathbf{z}}_{r1} = (\mathbf{A}_{r11} - \mathbf{A}_{r12} \mathbf{P}_{r2}^{-1} \mathbf{P}_{r1}) \mathbf{z}_{r1} \quad (15)$$

이득행렬, $\mathbf{P}_{r2}^{-1} \mathbf{P}_{r1}$ 는 극값지정방법이나 LQR 방법에 의해 결정될 수 있다. 본 연구에서는 다음 성능지수를 최소화하는 이득행렬을 얻을 수 있는 LQR 방법을 사용하였다.

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} dt \quad (16)$$

여기서 \mathbf{Q} 는 크기가 $2n \times 2n$ 인 가중행렬이다.

3. 제어기 성능의 파라미터 분석

다음과 같은 질량정규화된 단자유도 시스템에 대하여 파라미터 분석을 수행한다.

$$\ddot{x} + 2\xi_n \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{x}_g + u \quad (17)$$

여기서 ξ_n 와 ω_n 는 각각 감쇠비와 각가속도를 나타낸다. 가중행렬을 다음과 같이 설정하고, 슬라이딩 표면을 결정한다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q\omega_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 q 는 성능지수에서 운동에너지와 위치에너지의 상대적인 가중치의 크기를 결정할 수 있는 양의 상수이며, 이때 슬라이딩 표면은 다음 식(19)와 같다.

$$s = \sqrt{q}\omega_n x + \dot{x} = 0 \quad (19)$$

3.1 제어기 설계

제어기 설계를 위해, 다음과 같은 Lyapunov 함수를 설정한다.

$$V(s) = 0.5s^T s \quad (20)$$

제어력은 Lyapunov 함수의 변화율이 항상 0이하가 되도록 설정한다. 본 연구에서는 슬라이딩 표면의 변화에 따른, 제어기의 성능을 조사하기 위해 다음과 같은 두 가지 형태의 제어기를 고려하였다.

$$\text{SMC-I} = \begin{cases} u_{eq} - \delta^* u_{\max} \lambda_o^{-1} \lambda; & \text{if } |u_{eq} - \delta^* u_{\max} \lambda_o^{-1} \lambda| \leq u_{\max} \\ u_{\max} \text{sgn}(u_{eq} - \delta^* u_{\max} \lambda_o^{-1} \lambda); & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{SMC-II} = -u_{\max} H(|\lambda| - \varepsilon_o) \text{sgn}(\lambda) \quad (22)$$

여기서,

$$\lambda = s^T P B_2 \quad (23)$$

$$u_{eq} = - (P B_2)^{-1} P A z - (P B_2)^{-1} B_1 \ddot{x}_g \quad (24)$$

그리고, $H(\cdot)$ 는 단위 스텝 함수이다. δ^* 는 양의 상수이고, ε_o 는 채터링 현상을 막기 위해 주어진 작은 값을 가지는 양의 상수이다.

3.2 제어기의 성능평가

제어기의 성능을 알아보기 위하여 사용한 구조물은 $\xi_n = 0.02$ 와 $\omega_n = 4\pi$ ($T_n = 0.5$ 초)의 질량정규화된 단자유도 시스템을 사용하였다. ε_o 는 5%를 사용하였으며, λ_o 는 비제어시의 λ 에 대한 표준편차를 나타낸다. 최대제어력 u_{\max} 는 약 1.06kN로 제한하였고, 0.4g로 스케일 된 20개 지진가속도 데이터를 사용하여 해석하였다. 성능지수는 비제어시 변위응답에 대한 제어시 변위응답인 J_d 와 비제어시 가속도응답에 대한 제어시 가속도응답인 J_a 로 설정하였다. SMC-I은 $\delta^* = (0.2, 0.5, 1, 5, 10)$ 로 총 5가지 경우를 살펴보았다. 그림 1을 보면 SMC-I의 경우, $q < 1$ 의 범위에서는 δ^* 가 증가하여 $u_c = \delta^* u_{\max} \lambda_o^{-1} \lambda$ 의 크기가 커질수록 성능이 좋아지고, $q > 1$ 의 범위에서는, δ^* 가 10이하인 경우 δ^* 의 크기에 상관없이 성능이 거의 동일한 결과를 보인다.

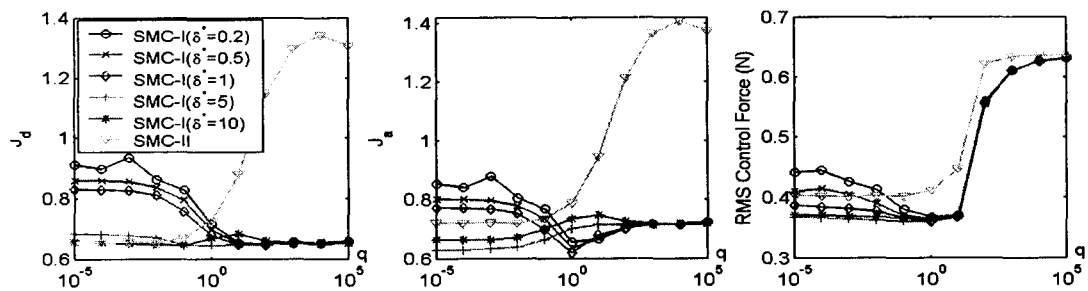


그림 1. $T_n=0.5$ sec 일 때 q 에 따른 성능지수와 RMS 제어력

이것은, q 가 작을수록 u_c 의 영향이 커지고, q 가 클수록 u_{eq} 의 영향이 커지는 것을 의미한다. 특히, u_c 만을 가지고 있는 SMC-II의 성능이 q 가 작아질수록 좋아지는 것을 같이 고려하면, u_c 는 q 의 값이 작을 때 효과적인 반면 u_{eq} 는 q 의 값이 클 때 효과적임을 알 수 있다.

변위에 대한 가중치로서 사용된 q 가 증가할수록 u_c 는 오히려 변위를 증가시킨다는 사실은, q 가 기존의 LQR제어와 같이 응답의 가중치를 결정하는 변수가 아니라 슬라이딩 표면에서의 운동의 극값을 조정하여 슬라이딩 표면의 동적 특성을 결정하는 변수로 고려되어야 함을 의미한다. 변위에 대한 가중치로서 사용된 q 가 증가할수록 u_c 는 오히려 변위를 증가시킨다는 사실은, q 가 기존의 LQR제어와 같이 응답의 가중치를 결정하는 변수가 아니라 슬라이딩 표면에서의 운동의 극값을 조정하여 슬라이딩 표면의 동적 특성을 결정하는 변수로 고려되어야 함을 의미한다.

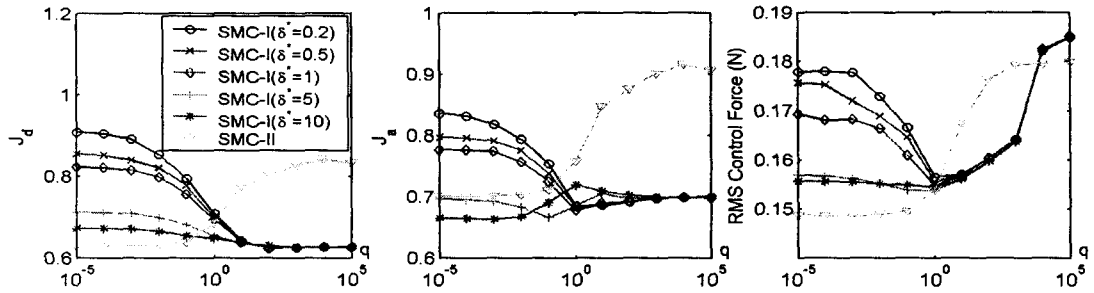


그림 2. $T_n=2\text{sec}$ 일 때 q 에 따른 성능지수와 RMS 제어력

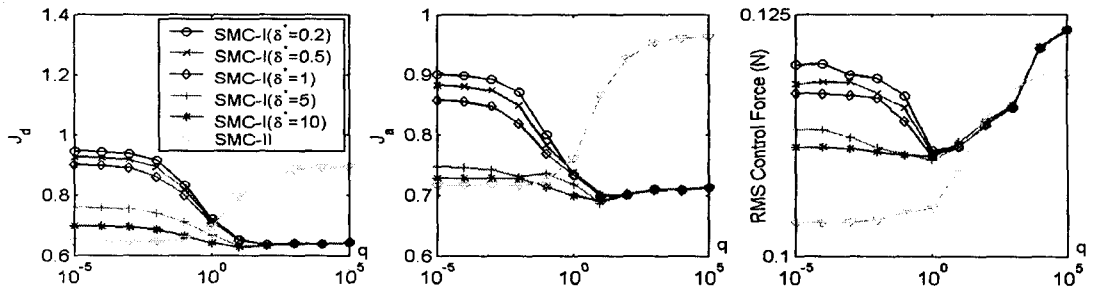


그림 3. $T_n=5\text{sec}$ 일 때 q 에 따른 성능지수와 RMS 제어력

대상구조물에서, SMC-II는 $q < 0.1$ 일 때, 변위응답제어에 있어 우수한 성능을 보이나, 가속도응답 제어에 있어서는 $\delta^* = 5$ 와 10 인 SMC-I보다 성능이 떨어진다. 특히, SMC-II는 항상 최대제어력을 발생시키므로, 제어력의 방향이 바뀌는 순간의 제어력의 변화는 급격하며, 이는 가속도응답의 증가를 가져옴을 알 수 있다. 따라서, 단주기 구조물의 가속도 응답제어는 SMC-I의 형태로 제어력을 산정하는 것이 유리하다고 할 수 있다. SMC-I은 $q=1$ 근처에서 갑자기 증가하는데 이는, SMC-I의 경우, 특정 값 이상으로 q 를 증가시키는 것은 제어에너지의 증가만을 가져올 뿐, 큰 성능의 감소는 가져오지 않으며, δ^* 가 큰 경우, 오히려 성능을 감소시킨다. 따라서, 제어에너지와 성능을 고려할 때, SMC-I은 δ^* 에 따라 최적의 q 가 존재함을 알 수 있다. 이러한 경향은 그림 2-3을 보면 알 수 있듯이 $T_n=2\text{초}$ 과 $T_n=5\text{초}$ 일 때도 마찬가지이다. 특히, 단주기 구조물의 경우와 다르게 q 를 작게 설정할 경우 다르게 변위와 가속도 응답모두 SMC-II가, 작은 제어에너지를 가지고도 우수한 제어성능을 보임을 확인할 수 있다. 이상의 결과는, SMC-I은 δ^* 과 T_n 에 따라 최적의 q 가 존재

하지만, SMC-II는 q 가 작을수록 성능이 좋아진다고 할 수 있다. 그림에서 q 가 일정구간일 때 최소의 성능지수로부터 큰 변화가 거의 없는 반면, 사용한 제어에너지에는 q 에 따라 큰 차이가 존재한다는 사실을 확인하였기 때문에, 최적의 q 는 수치해석적으로 가장 작은 성능지수를 보여주는 q 보다 최소값에 거의 근접하면서 제어력을 작게 사용하도록 하는 값으로 설정하는 것이 합리적이다. 따라서, 최적의 q 는 최소값과의 차가 3% 이내인 성능지수를 보이는 q 값 중에서 가장 작은 제어에너지를 사용하는 q 값으로 설정하였으며, 표 1에 정리하였다.

표 1. $\delta^* = 1$ 일 때 최적 q

$T_n(\text{sec})$	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	10
J_d	1	1	1	1	1	1	1	10	10	100	100
J_a	1	1	1	1	1	10	10	10	10	100	100

3.3 다자유도 시스템의 가중행렬

다자유도 시스템의 경우, 일반적으로 제어기의 수가 자유도의 수보다 크며, 제어력은 특정 자유도에 집중된다. 본 절에서는, 전 절에서 얻어진 결과를 바탕으로, 제어기가 설치된 층의 영향을 고려하여, 다자유도 시스템에서 가중행렬을 산정하는 절차가 제시된다.

Step 1. 가중행렬 \mathbf{Q} 는 성능지수가 다음과 같은 형태를 가지도록 구성한다.

$$J = \int_0^{\infty} \left(\sum_i^n \frac{1}{2} q_{pi} k_i d_i^2 + \sum_i^n \frac{1}{2} q_{ki} m_i \dot{x}_i^2 \right) dt \quad (25)$$

여기서, k_i 와 m_i 는 각각, i 층의 층 강성과 층 질량을 나타낸다. d_i 와 \dot{x}_i 는 각각, i 층의 층간변위와 지반에 대한 상대속도를 나타낸다.

Step 2. 제어기의 집중효과를 고려하기 위해, 운동에너지에 대한 가중치를 결정하는 q_{ki} 값 중에서, 제어기가 설치된 자유도에 대한 가중치를, 설치되지 않은 자유도에 대한 가중치보다 β (1)배 코도록 설정한다.

Step 3. 위치에너지를 대한 가중치 q_{pi} 은 운동에너지에 대한 비, $q_{pi}/q_{ki}(i=1 \dots n)$ 가 표 1에 나타나 있는 단자유도 시스템으로부터 구한 최적의 q 와 같아지도록 설정한다.

4. 다자유도 시스템 예제

다자유도 시스템에 대한, 최대응답의 감소효과를 알아보기 위해, 다음 성능지수를 설정한다.

$$J_1 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max_t |x_i(t)|}{x^{\max}} \right\}, J_2 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max_t |d_i(t)|}{d_n^{\max}} \right\}, J_3 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max_t |\ddot{x}_{ai}(t)|}{\ddot{x}_a^{\max}} \right\}, J_4 = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_i^n \int_0^T u_i^2 dt} / W$$

여기서, $x_i(t)$ 는 i 층 변위, \max 는 비제어시 최대변위, $d_i(t)$ 는 i 층 층간변위, d_n^{\max} 는 비제어시 최대 층간변위, $\ddot{x}_{ai}(t)$ 는 i 층 절대가속도, \ddot{x}_a^{\max} 는 비제어시 최대절대가속도를 나타낸다. 또한, 사용된 제어에너지의 크기를 비교하기 위해, 또 하나의 성능지수 J_4 가 고려된다. W 는 구조물의 무게를, T 는 제어된 구간의 시간크기를 나타낸다.

예제 구조물은 Kobori 등과 Yang 등에 의해 사용된 3층 전단건물이다.^{6),7)} 층별 특성은 층 질량 $mass=1\text{ton}$, $K=980\text{kN/m}$, $c=1.407\text{kN s/m}$ 이다. 1차모드의 주기와 감쇠비는 각각, 0.45초, 1%이다. 최대지반가속도가 0.112g로 스케일 된 El Centro 지반가속도가 가진신호로 사용되었다. Yang 등의 해석결과와 비교하기 위해, Yang 등이 사용한 시스템인 1층에 능동가새가 설치된, 그리고 제어기로는 SMC-I이 사용된 시스템을 고려하였다.

표 1로부터, 주기가 0.45초인 구조물에서 최적의 q 는 $\delta^*=1$ 를 가지는 SMC-I에서 1임을 알 수 있다. 또한, 제어기 집중효과를 고려하기 위한 β 는 100을 사용하였다. 이에 따른 q_{p1} 와 q_k 값은 $q_{p1} = q_{k1} = 100$, $q_{p2} = q_{p3} = q_{k2} = q_{k3} = 1$ 이며 슬라이딩 표면은 다음과 같다.

$$s = 33.26x_1 - 1.77x_2 + 0.18x_3 + 1.0\dot{x}_1 + 0.065\dot{x}_2 + 0.067\dot{x}_3 \quad (26)$$

Yang 등은 층간변위와 층간속도에 대하여 방정식을 구성하였으며, $\delta^*u_{\max}/\lambda_0$ 은 $50\text{kN}\cdot\text{kg}\cdot\text{cm/s}$, 그리고 가중행렬 $Q = \text{diag}[10^5 \ 10^4 \ 10^3 \ 1 \ 1 \ 1]$ 를 사용하였다. 이에 따른 슬라이딩 표면은 다음과 같다.

$$s = 240.92x_1 - 23.33x_2 + 6.01x_3 + 1.0\dot{x}_1 + 1.67\dot{x}_2 + 1.01\dot{x}_3 \quad (27)$$

그림 4는 본 연구에서 제안한 방법과 Yang의 방법에 따른 성능지수를 보여준다. 제안된 방법이 최대제어력의 크기에 관계없이, 전 구간에 걸쳐 항상 작은 성능지수를 줄일 수 있다. 특히, 작은 제어에너지를 사용함을 고려할 때, 제안된 방법은 Yang 등의 방법보다 우수한 제어효율을 보인다고 평가할 수 있다.

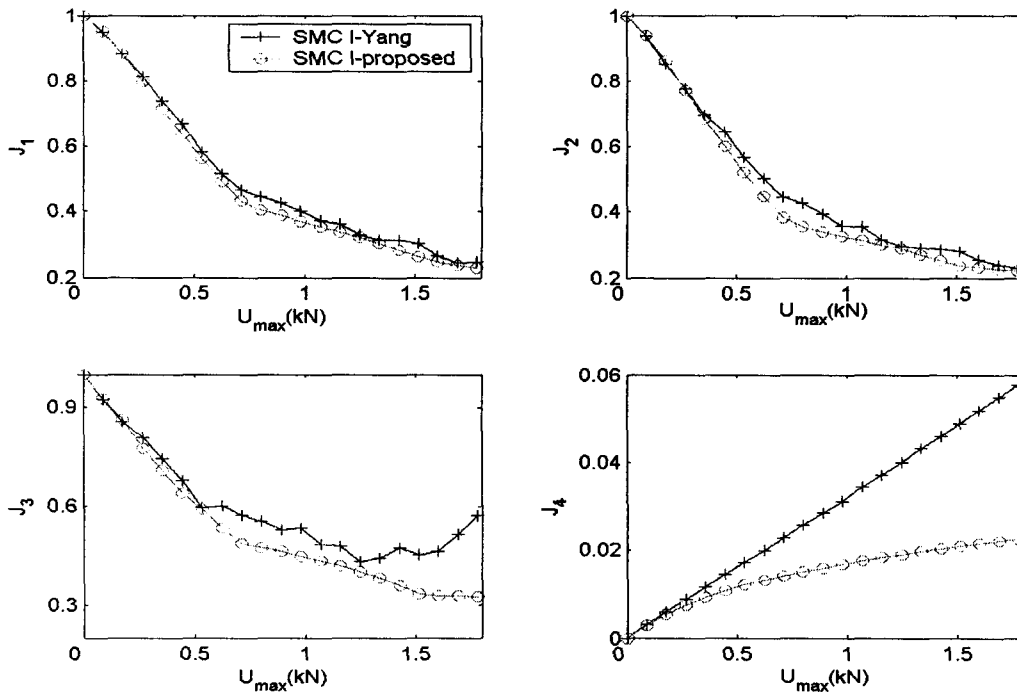


그림 4. 기존방법과 제안한 방법의 성능지수 비교

5. 결 론

본 연구에서는 LQR방법을 사용하여, 슬라이딩 모드 제어기의 제어성능을 결정하는데 중요한 슬라이딩 표면을 결정하는 절차를 제안하였다. 슬라이딩 제어기의 특성에 따라 슬라이딩 표면은 다르게 설정되어야 하며, 그에 따라 가중행렬을 설정해야 함을 보였으며, 구조물의 주기와 제어기의 형태에 따라 최적의 가중행렬을 산정하는 체계적인 절차를 제시하였다. 다자유도 시스템에 대한 해석결과는, 제안된 방법이 기존의 방법과 비교할 때, 우수한 제어효율을 가짐을 보였다.

감사의 글

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(M1-0203-00-0068) 및 우수연구센터인 스마트 사회기반시설 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Utkin VI, "Sliding modes in control and optimization" , Springer Verlag, New York, NY, 1992.
2. Slotine JJ, Li W, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1991.
3. Cai GP, Huang JZ, Sun F, Wang C, "Modified sliding-mode bang-bang control for seismically excited linear structures", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol.29, 2000, pp. 1647-1657.
4. 이상현, 정진욱, 민경원, 강경수, "Lyapunov 함수의 목표 변화율을 이용한 가진된 건물의 슬라이딩 모드 제어", 한국지진공학회 논문집, Vol. 19, 2001, pp. 1-6.
5. 민경원, 이영철, 이상현, 정란, 우운택, "개선된 슬라이딩 모드 제어의 강인성", 대한건축학회 논문집, Vol. 19, 2003, pp. 61-67.
6. Yang JN, Wu JC, Agrawal AK, Li Z, "Sliding mode control for seismic-excited linear and nonlinear civil engineering structures", Technical Report NCEER-95-0017, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, 1994.
7. Kobori T, Kamagata S, "Dynamic intelligent buildings - active seismic response control", in Intelligent structures-2 edited by Wen YK, Elsevier Applied Science, New York, NY, 1992.