2003년도 신호처리소사이어티 추계학술대회 논문집

다중 정규화 매개 변수를 이용한 혼합 norm 영상 복원 방식

김도령, 홍민철
숭실대학교 정보통신전자공학부
e-mail : *kdoreyng@vipl.ssu.ac..kr, mhong@e.ssu.ac.kr*

A Mixed Norm Image Restoration Algorithm Using Multi Regularized Parameters

Do Reyng Kim and Min-Cheol Hong
School of Electronic Engineering
Soongsil University

Abstract

In this paper, we propose an iterative mixed norm image restoration algorithm using multi regularization parameters. A functional which combines the regularized l_2 norm functional and the regularized l_4 functional is proposed. The smoothness of each functional is determined by the regularization parameters. Also, a regularization parameter is used to determine the relative importance between the regularized l_2 functional and the regularized l_4 functional. An iterative algorithm is utilized for obtaining a solution and its convergence is analyzed.*

I. 서론

영상 복원 문제는 오랜 기간 연구되어 왔으며, 일반적으로 MSE (Mean Squared Error) norm 방식이 복원 문제를 표현하기 위해 사용되어 왔다 [1,2]. MSE 방식은 LMS (Least Mean Squared) 방식의 결과로 유도 가능하다. 이와 같이 LMS 방식을 영상 복원 문제를 표현 또는 접근하기 위해 주로 사용하는 이유는 LMS 방식이 수학적으로 다루기 쉽고, 첨부 노이즈가 가우시안 분포를 갖는 경우 최적화된 결과를 얻기에 용이하기 때문이다.

수많은 응용 분야에서 첨부 노이즈는 비가우시안 또는 다양한 노이즈의 결합된 형태를 취할 수 있으며, 이와 같은 경우, 2차 이상의 고차 norm을 적응 필터 과정에 사용되었다 [3,4,5]. 더불어, 영상 복원 문제에 LMS 와 LMF를 결합시킨 방식을 적용한 결과를 통해 특정 첨가 노이즈 환경에서 LMF 방식이 LMS 방식보다 우월한 성능을 보임이 입증되었다 [6].

본 논문에서는 정규화 완화 l_2 함수 및 정규화 완화 l_4 함수를 결합시킨 혼합 norm 영상 복원 방식을 제안한다. 각 함수의 완화도를 제어하기 위해 함수별 정규화 매개 변수를 정의했으며, 정규화 l_2 함수와 정규화 l_4 함수에 대한 상대적 기여도를 제어하기 위한 혼합 norm 정규화 매개 변수를 정의하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 제안된 다중 정규화 매개 변수를 이용한 혼합 norm 영상 복원 방식에 대해 제안한다. 또한, 혼합 norm의 상대적 기여도를 결정하기 위해 kurtosis 함수에 대해 고찰한다. 3장에서는 반복 영상 복원 기법에 대해 설명하며, 수렴 조건에 대한 분석에 대해 기술한다. 4장에서는 정규화 매개 변수들의 결정 방식에 대해 기술하며, 마지막으로 5장 및 6장에서는 실험 결과 및 결론에 대해 기술한다.

II. 다중 정규화 매개변수를 이용한 혼합 norm 복원 방식

임의의 $M \times N$ 크기 영상은 단일 움직임, 영상 획득 시스템의 초점의 부정확성, 대기 산란 현상 및 기타 현

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 R01-2002-000-00073-0 지원으로 수행되었음.

상으로 인해 열화되며, 전송 및 저장 과정에서 발생하는 노이즈에 의해 더욱 영상 화질은 훼손되게 된다. 이와 같은 영상 훼손 현상은 다음과 같이 모델화 된다.

$$y = Hx + n \quad (1)$$

식 (1)에서 y, x, n은 스택 순서로 재배열된 $MN \times 1$ 크기 벡터를 갖는 훼손 영상, 원영상 및 첨부 노이즈를 나타내며, H는 $MN \times MN$ 크기의 PSF (Point Spread Function)을 표현하는 행렬을 나타낸다. 행렬 H는 공간 불변 또는 변화 훼손을 나타낼 수 있다.

대부분의 응용 분야에서 첨부 노이즈, n은 평균 '0'인 가우시안 분포를 갖고 있다는 가정을 한다. 그러나 일반적인 경우, 첨부 노이즈는 uniform, Cauchy 및 다른 분포를 갖게 된다. 첨가 노이즈가 위와 같은 비가우시안 분포를 갖는 경우 2차 이상의 고차 norm이 더욱 효과적임이 입증되었다.

이미 기술된 바와 같이 비가우시안 및 가우시안 분포를 갖는 첨가 노이즈를 갖는 훼손 영상을 효과적으로 처리하기 위해서는 LMS 및 LMF의 결합된 형태의 방식이 필요됨을 알 수 있으며 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$M(x) = (1-\gamma(n))M_1(x) + \gamma(n)M_2(x)\ , \quad (2)$$

위 식에서 $\gamma(.)$ $(1 \le \gamma(n) \le 1)$은 $M_1(x)$ 및 $M_2(x)$의 상대적 기여도를 제어하는 혼합 norm 정규화 변수이며, $M_1(x)$ 및 $M_2(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$M_1(x) = \| y - Hx \|_2^2 + \alpha_1(x) \| Cx \|_2^2,$$
$$M_2(x) = \| y - Hx \|_4^4 + \alpha_2(x) \| Cx \|_4^4, \quad (3)$$

식 (3)에서 $\| . \|_p$는 l_p norm을 의미하며, C는 고주파 통과 필터를 나타낸다. 또한, 식 (3)의 $\alpha_1(x)$ 및 $\alpha_2(x)$는 $M_1(x)$ 및 $M_2(x)$의 완화도를 제어하는 정규화 매개 변수를 의미한다.

LMS 및 LMF의 성능은 참고문헌 [3,4,5,6]에서 비교 및 분석되었으며, sub-Gaussian 신호에 대해 LMF 방식이 LMS 성능보다 우월함이 입증되었다. 반면에 첨부 노이즈가 super-Gaussian인 경우 LMS의 성능이 LMF보다 우월하다. 이와 같은 특성에 따라 식 (2)에서는 첨부 노이즈가 super-Gaussian일 때 $M_2(x)$ 함수가 무시될 수 있도록 $\gamma(n) \approx 0$임이 바람직스러우며, 첨부노이즈가 sub-Gaussian에 대해서는 $M_1(x)$ 함수가 고려되지 않도록 $\gamma(n) \approx 1$이 바람직스럽다. 반면에 혼합 노이즈인 경우 $\gamma(n)$이 $M_1(x)$ 및 $M_2(x)$를 효과적으로 제어할 수 있도록 결정되어야 한다. 대부분의 응용 분야에서 첨부 노이즈 분포는 알려져 있지 않으므로 $\gamma(n)$은 이용 가능한 정보로부터 예측 또는 결정하는 것이 바람직스럽다.

임의 신호의 가우시안 정도는 kurtosis로부터 결정할 수 있으며, 랜덤 변수 r에 대해 가우시안 정도는 다음과 같이 결정될 수 있다 [6].

$$\chi(r) = \frac{1}{MN} \| r \|_4^4 - 3\left(\frac{1}{MN} \| r \|_2^2\right)^2. \quad (4)$$

위에서 정의된 kurtosis는 가우시안 신호에 대해 '0'인 값을, super-Gaussian에 대해 양의 값을, sub-Gaussian 신호에 대해 음의 값을 갖게 된다.

III. 반복 해 및 수렴 조건

3.1 반복해

본 논문에서는 식 (2)에서 정의된 혼합 norm 함수를 최소화하기 위해 steepest-descent 방식을 사용하였다. $M(x)$를 x에 대해 gradient를 취한 결과는 다음과 같다.

$$\nabla_x M(x) = -(1-\gamma(n))[2H^T(y-Hx) - 2\alpha_1(x)C^TCx - \nabla_x \alpha_1(x) \| Cx \|_2^2] - \gamma(n)[4H^T(y-Hx)^3 - 4\alpha_2(x) C^T(Cx)^3 - \nabla_x \alpha_2(x) \| Cx \|_4^4] = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 $\nabla_x \alpha_1(x) \simeq 0$ 및 $\nabla_x \alpha_2(x) \simeq 0$ 이므로 분석 과정에서 고려하지 않아도 된다. 그러므로 복원 영상을 얻기 위한 반복해는 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$x_{k+1} = x_k + \beta[(1-\gamma(n))H^T(y-Hx_k) - \alpha_1(x_k)C^TCx_k + 2\gamma(n)H^T(y-Hx_k)^3 - \alpha_2(x_k)C^T(Cx_k)^3]. \quad (6)$$

식 (6)에서 β는 수렴 속도 및 수렴성을 보장하는 이완 매개 변수이다. LMS 및 LMF의 상대적 기여도를 정의하는 혼합 norm 정규화 매개 변수, $\gamma(n)$는 반복해에서 예측된 첨부 노이즈에 의해 결정되므로 식 (6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x_{k+1} = x_k + \beta[(1-\gamma(n_k))H^T(y-Hx_k) - \alpha_1(x_k)C^TCx_k + 2\gamma(n_k)H^TP(x_k)(y-Hx_k) - \alpha_2(x_k)C^TQ(x_k)Cx_k] = x_k + \beta[H^T(1-\gamma(n_k)I + 2\gamma(n_k)P(x_k))(y-Hx_k) - C^T\alpha_1(x_k)I + \alpha_2(x_k)Q(x_k)Cx_k] \quad (7)$$

식 (7)에서 I는 단일 대각 행렬을 의미하며, $P(x)$ 및 $Q(x)$는 $MN \times MN$ 크기의 대각 행렬로서 대각 성분은 $P(x_k)_{i,i} = (y_i - (Hx_k)_i)^2$ 및 $Q(x_k)_{i,i} = ((Cx_k)_i)^2$을 의미한다.

3.2 수렴성 및 수렴 조건

참고문헌 [6]과 유사한 과정을 이용하여 식 (7)의 연속된 두 반복해는 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$x_{k+1}-x_k=(x_k-x_{k-1})+\beta[H^TH(x_k-x_{k-1})-H^T(\Theta_1(x_k)-\Theta_1(x_{k-1}))+H^TH(\Theta_2(x_k)-\Theta_2(x_{k-1}))+2(\Theta_3(x_k)-\Theta_3(x_{k-1}))-2(\Theta_4(x_k)-\Theta_4(x_{k-1}))-C^TC(\Theta_5(x_k)-\Theta_5(x_{k-1}))-C^T(\Theta_6(x_k)-\Theta_6(x_{k-1}))], \quad (8)$$

식 (8)에서 $\Theta_1(x_k)=\gamma(n_k)y$, $\Theta_2(x_k)=\gamma(n_k)x_k$, $\Theta_3(x_k)=\gamma(n_k)P(x_k)y$, $\Theta_4(x_k)=\gamma(n_k)P(x_k)Hx_k$, $\Theta_5(x_k)=\alpha_1(x_k)x_k$, $\Theta_6(x_k)=\alpha_2(x_k)Q(x_k)Cx_k$. 비선형 인자 $\Theta_1(x_k), \Theta_2(x_k), \Theta_3(x_k), \Theta_4(x_k), \Theta_5(x_k)$ 및 $\Theta_6(x_k)$는 다음과 같이 선형화 될 수 있다 [7].

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x_k)-\Theta_1(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_1}(x_k)(x_k-x_{k-1}),\\
\Theta_2(x_k)-\Theta_2(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_2}(x_k)(x_k-x_{k-1}),\\
\Theta_3(x_k)-\Theta_3(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_3}(x_k)(x_k-x_{k-1}),\\
\Theta_4(x_k)-\Theta_4(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_4}(x_k)(x_k-x_{k-1}),\\
\Theta_5(x_k)-\Theta_5(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_5}(x_k)(x_k-x_{k-1}),\\
\Theta_6(x_k)-\Theta_6(x_{k-1})&\approx J_{\Theta_6}(x_k)(x_k-x_{k-1}). \quad (9)
\end{aligned}$$

식 (9)에서 $J_{\Theta_1}(x_k), J_{\Theta_2}(x_k), J_{\Theta_3}(x_k), J_{\Theta_4}(x_k)$ $J_{\Theta_5}(x_k)$및 $J_{\Theta_6}(x_k)$는 Jacobian 행렬을 의미하며, 식 (8)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$x_{k+1}-x_k=[I-\beta((1-\gamma(n_k)H^TH+6\gamma(n_k)H^TP(x_k)H+\alpha_1(x_k)C^TC+2\alpha_2(x_k)C^TQ(x_k)C)](x_k-x_{k-1}) \quad (10)$$

그러므로 수렴하기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\| I-\beta((1-\gamma(n_k))H^TH+6\gamma(n_k)H^TP(x_k)H+\alpha_1(x_k)C^TC+2\alpha_2(x_k)C^TQ(x_k)C)\| < 1. \quad (11)$$

$(1-\gamma(n_k))H^TH+6\gamma(n_k)H^TP(x_k)H+\alpha_1(x_k)C^TC+2\alpha_2(x_k)C^TQ(x_k)C$는 양치 정의 행렬 (positive definite matrix)이므로 식 (9)는 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$|1-\beta(\lambda_{max}((1-\gamma(n_k))H^TH+6\gamma(n_k)H^TP(x_k)H+\alpha_1(x_k)C^TC+2\alpha_2(x_k)C^TQ(x_k)C)| < 1. \quad (12)$$

위 식에서 $\lambda_{max}(A)$는 행렬 A의 최대 singular 값을 의미한다. H 및 C는 최대 singular 값이 '1'이 되도록 결정되면, 수렴 조건을 제어하는 이완 완화 매개 변수가 다음 조건을 만족하는 경우 식 (7)은 수렴하게 된다.

$$\begin{aligned}
&0<\beta<\frac{2}{(1-\gamma(n_k))+6\gamma(n_k)\delta_1+\alpha_1(x_k)+2\alpha_2(x_k)\delta_2},\\
&\delta_1=\lambda_{max}(H^TP(x_k)H),\\
&\delta_2=\lambda_{max}(C^TQ(x_k)C). \quad (13)
\end{aligned}$$

IV. 정규화 매개 변수 결정

참고문헌 [7]과 유사한 과정을 거쳐 $M_1(x)$ 함수와 $M_2(x)$ 함수의 상대적 기여도를 결정하는 혼합 norm 정규화 매개 변수는 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$\gamma(n_k)=\frac{exp(-c\chi(n_k))}{1+exp(-c\chi(n_k))},\ c>0. \quad (14)$$

식 (14)에서 $n_k=y-Hx_k$.

더불어, 참고문헌 [6,7]에서 사용한 방식과 유사하게 $M_1(x)$ 함수와 $M_2(x)$ 함수의 완화도를 제어하는 $\alpha_1(x_k)$ 및 $\alpha_2(x_k)$는 다음과 같이 결정된다.

$$\alpha_1(x_k)=\frac{\|y-Hx_k\|_2^2}{\tau_1-\|Cx_k\|_2^2}, \quad (15)$$

$\tau_1 \geq \|y\|_2^2 \approx \|x\|_2^2$. 더불어

$$\alpha_2(x_k)=\frac{\|y-Hx_k\|_4^4}{\tau_2-\|Cx_k\|_4^4}, \quad (16)$$

$\tau_2 \geq \|y\|_4^4 \approx \|x\|_4^4$.

V. 실험 결과

본 실험에서 제안 방식의 성능을 확인하기 위해 256×256 Lena 영상을 사용하였다. 원 영상을 5×5 uniform 움직임 열화를 사용하였으며, Uniform (sub-Gaussian) 및 Laplacian (super-Gaussian) 분포를 갖는 노이즈를 열화 영상에 첨부한 훼손 영상을 생성하였다. 제안된 방식을 다양한 신호 대 잡음비 (SNR)에 대해 실험하였으며, 성능 비교를 위해 신호 대 잡음비 개선 (Δ_{SNR})을 사용하였다. k번째 반복해를 통한 복원 영상의 Δ_{SNR}은 다음과 같이 정의 된다.

$$\Delta_{SNR}=10\log_{10}\frac{\|y-x\|_2^2}{\|y-x_k\|_4^4}. \quad (17)$$

더불어 반복 과정을 종료하기 위해 다음 조건을 사용하였다.

$$\frac{\|x_{k+1}-x_k\|_2^2}{\|x_k\|_2^2}. \quad (18)$$

그림 1은 10 dB Uniform 노이즈를 열화 영상에 첨부시킨 훼손 영상을 나타내며, 훼손 영상을 LMS 및 제안 방식을 이용하여 복원된 영상을 그림 2 및 3에 나타내었다. 첨부 노이즈가 상대적으로 감소되었고 윤곽선 부근이 상대적으로 보존되었음을 알 수 있다.

표 1에 다양한 노이즈 및 SNR에 대한 성능 비교를 나차내었다. 제안 방식은 LMS 방식보다 다양한 첨부 노이즈에 대해 우월한 성능을 보였으며, 특히 sub-Gaussian 분포를 갖는 노이즈가 첨부된 경우 성능 향상이 뛰어남을 확인할 수 있었다.

VI. 결론

본 논문에서는 다중 정규화 매개 변수를 이용한 영상 복원 방식에 대해 제안하였다. 제안 방식은 LMS 방식보다 다양한 첨부 노이즈에 대해 우월한 성능을 보였으며, 특히 sub-Gaussian 분포를 갖는 노이즈가 첨부된 경우 성능 향상이 뛰어남을 확인할 수 있었다. l_2 norm을 이용한 정규화 완화 함수와 l_4 norm을 이용한 정규화 완화 함수와의 상대적 기여도를 제어하는 혼합 norm 정규화 매개 변수를 정의하였으며, 상기 매개 변수는 매 반복 영상에서 예측된 노이즈 성분의 kurtosis에 의해 결정되었다. 그러므로 제안 방식은 신호의 사전 정보 없이 영상 복원 과정을 수행할 수 있는 장점이 있다.

참고문헌

[1] H. C. Andrews and B. R. Hunt, *Digital Image Restoration,* Prentice-Hall, New York, 1977.

[2] M. R. Banham and A. K. Katsaggelos, "Digital image restoration," *IEEE Signal Processing Magazine,* vol. 14,

[3] S. A. Kassam and H. V. Poor, "Robust techniques for signal processing: A survey," *Proc. of IEEE,* vol. 73, pp. 433-481, March 1985.

[4] E. Walach and B. Widrow, "The least mean fourth adaptive algorithm and its family," *IEEE Trans. on Information Theory,* vol. IT-30, pp. 275-283, March 1984.

[5] J. A. Chambers, O. Tanrikulu, and A. G. Constantinides, "Least mean mixed-norm adaptive filtering," *Electronics Letters,* vol. 30, pp. 1574-1575, Sept. 1994.

[6] M.-C. Hong, T. Stathaki, and A. K. Katsaggelos, "Iterative regularized least-mean mixed-norm image restoration," *Optical Engineering,* vol. 41, pp. 2515-2524, Oct. 2002.

[7] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming,* Addison-Wesley, 1989.

[8] M. G. Kang and A. K. Katsaggelos, "General choice of the regularization functional in regularized image restoration," *IEEE Trans. on Image Processing,* vol. 4, pp. 594-602, May 1995.

그림 1. 훼손 영상 (5×5 uniform blur, 10 dB Uniform Noise)

그림 2. LMS 방식을 이용한 그림 1의 복원 영상

그림 3. 제안 방식을 이용한 그림 1의 복원 영상

Noise Type	SNR (dB)	LMS Δ_{SNR}	제안방식 Δ_{SNR}
Uniform	10	3.25	3.89
Uniform	20	2.11	2.71
Uniform	30	3.58	4.01
Laplacian	10	3.17	3.36
Laplacian	20	2.09	2.31
Laplacian	30	3.58	3.67
Gaussian	10	3.19	3.22
Gaussian	20	2.08	2.30
Gaussian	30	3.59	3.72
Combination	10	4.42	4.68
Combination	20	2.05	2.39
Combination	30	3.02	3.34

표 1. 성능 비교