

라플라스 신호원에 대한 최소 평균제곱오차 홀양자기의 지지역에 관한 연구

김 성 민 · *나 상 신

아주대학교 전자공학과 부호화 실험실, *아주대학교 전자공학과

전화 : 031-219-2376/ 핸드폰 : 011-9734-0512

On the Support of Minimum Mean-Square Error Scalar Quantizers for a Laplacian Source

Seong Min Kim · Sangsin Na

Dept. of Electronics Engineering, Ajou University

E-Mail : islanddream@hanmail.net

Abstract

이 논문에서는 라플라스 밀도함수에 대한 최적 홀양자기 지지역은 양자점의 개수와 로그선형 관계가 있음을 증명한다. 그리고, 극상한값을 유도하여 최적 지지역의 로그선형 증가가 어떤 상수값을 초과하지 않음을 증명한다. 이 결과들로부터, 학계에 경험적으로 알려져 왔던 최적 지지역의 로그선형 증가를 증명한다.

I. 서론

양자기 N -점 홀양자기 Q_N 은 N 개의 양자점과 $N+1$ 개의 경계값, 그리고 양자함수 $Q_N(\cdot)$ 로 표현되는 장치이다. 그림1처럼 N 개의 양자점들은 양자영역을 대표하는 값으로서 y_1, y_2, \dots, y_N 로 나타내고, $N+1$ 개의 경계값은 가장 왼쪽 끝경계값과 가장 오른쪽 끝경계값을 각각 $x_1 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$ 로 하는 $x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1}$ 이 되도록 배열한다. 양자함수 $Q(\cdot)$ 는 $x \in [x_i, x_{i+1})$ 일 때 $Q(x) = y_i$ 인 일종의 다대일 함수이다.

양자기의 지지역 양자기의 지지역은 그림1에서 양자기의 양쪽 끝경계값인 x_2 와 x_N 으로 정해지는 구간

$[x_2, x_N]$ 을 말한다.

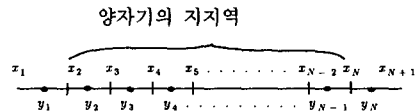


그림 1. 홀양자기와 지지역의 표현

최적 홀양자기 신호원의 확률밀도함수가 $p(x)$ 일 때, 이에 최적인 N -점 최적 홀양자기 Q_N^* 은 식(1)로 주어지는 평균제곱오차왜곡 $D(Q_N)$ 을 최소화시키는 양자점 $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ 과 $N-1$ 개의 경계값 $x_2^*, x_3^*, \dots, x_N^*$ 을 갖는 양자기를 말한다.

$$D(Q_N) = E_p((X - Q_N(X))^2)$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx \quad (1)$$

연구 동기 양자기 지지역의 다음과 같은 성질 때문에 지지역에 관한 연구를 하게 되었다.

- ① 양자기의 지지역은 그것의 최외곽경계값 x_N^* 에 의해 결정된다. 로이드-맥스 양자기 설계에 있어서 오른쪽 최외곽경계값 x_N 을 적절히 임의로 설정한 후, 반복적인 방법에 의해 최적 양자기를 설계한다. 설계가 끝나면 최외곽경계값은 x_N^* 이 된다. 따라서, x_N^* 의 성질을 알면 반복 설계법의 설계에 유리하게 사용될 수 있다.
- ② 양자기의 성능을 측정할 수 있는 지표중의 하나인

왜곡 $D(Q_N)$ 을 결정하는 중요한 요소이다. 최외곽경계값 x_N^* 을 기준으로 지지역에 의한 왜곡과 외곽의 왜곡을 추정할 수 있다. 따라서, 최외곽경계값 x_N^* 의 증가율을 알면 양자기 왜곡의 성향을 예측할 수 있다.

Nitadori의 양자기 표현 Nitadori는 라플라스 밀도함수 신호원에 대하여 짝수의 양자점을 갖는 최적 대칭 홀양자기를 그 경계값들과 양자점들 사이의 최소거리의 제곱으로 표현했다[1]. 양자화구간 $[x_k, x_{k-1}]$ 과 이에 대응하는 양자점 y_k 가 주어질 경우, 하위구간의 크기 $\delta_k (=y_k - x_k)$ 와 상위구간의 크기 $x_{k-1} - y_k$ 를 나타냈다. Nitadori는 분산이 1인 라플라스 밀도함수에 대한 $2K$ 의 양자점을 갖는 최적 대칭 홀양자기 Q_{2K}^* 의 제곱평균오차 왜곡 $D(Q_{2K}^*)$ 를 다음과 같이 보였다.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (2)$$

$$D(Q_{2K}^*) = \delta_K^2 \quad (3)$$

$2K$ 점 최적 양자기 Q_{2K}^* 의 경계값 x_N^* 에 의해 결정되는 지지역은 하위구간들의 합으로 나타낼 수 있다.

$$x_N^* = 2 \sum_{k=1}^K \delta_k - (\delta_1 + \delta_K) \quad (4)$$

$$x_N^* \approx \frac{3}{\sqrt{2}} (\ln K + c)$$

위에서 c 는 상수값이며, 방법에 따라 $\ln \frac{2}{3}$,

$\ln \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 또는 $\ln \frac{2}{\sqrt{18}}$ 의 값을 가진다.

II. 최적 지지역에 대한 극한 정리

2.1 최적 지지역의 증가율

정리 1 x_1 을 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 의 $2K$ 점 최적 양자기 Q_{2K}^* 의 지지역을 결정하는 최외곽 경계값이라 하자. 그러면, 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \ln K} = 1 \quad (5)$$

증명 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 에 대한 펜터-다잇공식이 다음과 같이 알려져 있다[8,9].

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (2K)^2 D(Q_{2K}^*) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 = \frac{9}{2} \quad (6)$$

그리고, 각각의 $k=1, 2, 3, \dots$,에 대해서 값 o_k 는 다음과 같이 존재하게 된다.

$$(2K)^2 D(Q_{2K}^*) = (2k)^2 \delta_k^2 = \frac{9}{2} (1 + o_k)$$

위의 식에서 $o_k = \lim_{k \rightarrow \infty} |o_k| = 0$ 인 성질을 가지고 있다. 또

한 여기서 양자기의 왜곡은 반드시 양의 값을 가져야 하기 때문에 각각의 k 에 대해서 $1 + o_k > 0$ 가 성립된다.

위의 식으로부터

$$\delta_k = \frac{3}{2\sqrt{2k}} (1 + w_k)$$

여기서, $w_k = \sqrt{1 + o_k} - 1$ 이고, w_k 는 o_k 와 같은 성질을 가지고 있다. 즉, $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_k| = 0$ 이 된다. 식(4)를 사용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} - \frac{1}{2} \frac{(1 + w_1) + \frac{1}{K}(1 + w_K)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}},$$

위로부터 다시 다음을 얻는다.

$$\left| \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} - 1 \right| \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right| + \left| \frac{1}{2} \frac{(1 + w_1) + \frac{1}{K}(1 + w_K)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right|$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} + \frac{1}{2} \frac{(1 + |w_1|) + \frac{1}{K}(1 + |w_K|)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} + \frac{1}{2} \frac{(1 + |w_1|) + \frac{1}{K}(1 + |w_K|)}{\ln K} \quad (7)$$

위의 마지막 등식은 다음을 이용하여 얻었다[10. p. 470].

$$\begin{aligned} \ln K + 1 &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{K} \\ &> \ln(K + 1) > \ln K \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $K \rightarrow \infty$ 이면 $w_K \rightarrow 0$ 이기 때문에, $\epsilon > 0$ 인 경우에 식(8)의 오른쪽 두번째 항을 위한 K_1 이 다음과 같은 조건으로 존재하게 된다.

$$\frac{1}{2} \frac{(1 + |w_k|) + \frac{1}{K}(1 + |w_K|)}{\ln K} < \frac{\epsilon}{2}$$

for $K > K_1$

식(7)의 마지막 등식의 첫 번째 항의 경우, $K > K_2$ 인 K_2 값이 존재하는데 다음과 같다. 여기서, $K > K_2$ 는

$|w| < \frac{\epsilon}{8}$ 을 내포한다.

$$\frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} = \frac{\sum_{k=1}^{K_3} \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} + \frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} \quad (9)$$

위의 식에서 오른쪽 첫 번째항의 경우 분자항은 유한한 값을 가지고 분모항은 계속 증가하게된다. 따라서 $K > K_3$ 을 만족하는 K_3 의 값이 존재한다. $K > K_3$ 라는 의미는 다음과 같다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{K_3} \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} < \frac{\epsilon}{4}$$

그리고 식(9)의 두 번째 항은 다음과 같이 한계값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} &< \frac{\epsilon}{8} \frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{1}{k}}{\ln K} \\ &< \frac{\epsilon}{8} \frac{\ln K + 1}{\ln K} = \frac{\epsilon}{8} \left(1 + \frac{1}{\ln K}\right) \end{aligned}$$

위식의 마지막 부등식은 식(8)으로부터 유도하였다. $K > K_5 \equiv \max(K_2, K_3)$ 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} < \frac{\epsilon}{4}$$

따라서, $K > K_5 \equiv \max(K_3, K_4)$ 일 때, 식(9)의 극상한 값은 $\frac{\epsilon}{2}$ 가 된다. 마지막으로 위의 결과들을 종합하여 $K > K_0 \equiv \max(K_1, K_5)$ 이면, 식(7)의 오른쪽항의 극상한값은 ϵ 가 된다. 즉, $\epsilon > 0$ 인 조건하에 다음을 얻는다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = 1$$

이것을 식(8)을 이용하여 다시 표현할 수 있다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}}{\ln K} = 1$$

최종적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = \left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right) \left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}}{\ln K} \right) = 1$$

2.2 최적 지지역의 극상한값

정리 2 x_1 은 라플라스 밀도함수의 $2K$ 양자점을 갖는 최적 양자기 Q_{2K}^* 라하면 다음이 성립한다.

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} \left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K \right) \leq \beta \quad (10)$$

위에서 β 값은 미정의 상수값이다.

증명 점근 균등 양자기 Q_{2K} 의 왜곡은 다음과 같다.

$$D(Q_{2K}) = \frac{9}{2(2K)^2} \left(1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_k}{K}\right)$$

이 값이 최적 양자기 Q_{2K}^* 의 상한값이 된다. 즉,

$$D(Q_{2K}^*) = \delta_K^2 < D(Q_{2K}) = \frac{9}{2(2K)^2} \left(1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_k}{K}\right)$$

α 는 미정의 상수값이며, o_K 는 $\lim_{K \rightarrow \infty} o_K = 0$ 의 성질을 가진다. 양변에 제곱근을 취함으로써 각각의 δ_k 에 대한 상한값을 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta_k &\leq \frac{3}{2\sqrt{2}k} \left(1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_k}{K}\right) \\ w_k &= k \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} - \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right) \right] \end{aligned}$$

보조정리 1 $\{o_k\}_{k=1}^{\infty}$ 은 0으로 수렴하는 실수의 수열이라 하고, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 는 다음과 같이 정의 되는 실수의 수열이라 하자.

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2k} + \frac{w_k}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}\right)$$

위에서 α 는 어떤 상수값이다.

그러면, $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ 가 된다.

증명 보조정리1에서

$w_k = k \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} - \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right) \right)$ 를 얻을 수 있다. 다음으로 왼쪽항을

$\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)$ 으로 한번 곱하고 나누어준다.

$$\begin{aligned} w_k &= k \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}\right) - \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)} \\ &= \frac{o_k - \frac{\alpha^2}{4k}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)} \end{aligned}$$

위식을 사용하여

$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(o_k - \frac{\alpha^2}{4k}\right) / 2 = 0$ 을 얻을 수 있다. 보조정리 1에서 $k \rightarrow 0$ 이면 $w_k \rightarrow 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 최외

곽 경계값 x_N^* 의 상한값은 다음과 같다.

$$x_1 = 2 \sum_{k=1}^K \delta_k - (\delta_1 + \delta_K) \leq 2 \sum_{k=1}^K \delta_k$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{2k^2} + \frac{w_k}{k^2} \right)$$

즉,

$$x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln K \right)$$

$$+ \frac{3\alpha}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k^2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2} \quad (11)$$

식(11)의 오른쪽 편의 각각의 항에 극한을 취하면 수렴값을 얻는다. 그 중 첫 번째 항에 대한 값은 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln K \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln(K+1) \right)$$

$$+ \lim_{K \rightarrow \infty} (\ln(K+1) - \ln K) = \gamma$$

위에서 $\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln(K+1)$ 는 Euler 상수값

($\gamma \approx 0.5772$)으로 수렴한다는 사실을 이용하였다[10, p. 470]. 두 번째 항 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 의 수렴값은 $\frac{\pi^2}{6}$ 이 된다. 그리고 세 번째 항은 $K \rightarrow \infty$ 로 수렴한다. $w_k \rightarrow 0$ 이기 때문에 B 를 w_k 에 대한 한계값이라 하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\left| \sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k^2} \leq B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{B\pi^2}{6}$$

위의 식은 $\frac{w_k}{k^2}$ 가 수렴함을 보여준다. 즉, $\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2}$ 는 K 로 수렴하게 된다.

그리고, 식 (10)의 양변에 \limsup 을 취하고 오른쪽 항의 수렴값을 알면 다음을 얻을 수 있다.

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} \left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K \right) \leq$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \gamma + \frac{3\alpha}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{k^2} \quad (12)$$

식(12)의 오른쪽 항의 전부를 β 값이라 정의하고 증명을 마치겠다.

III. 연구의 결론 및 기여도

식(5), (10)의 극한 정리에 의해 분산이 1인 라플라스 밀도함수에 대한 최적 양자기의 최외곽경계값 x_N^* 은

비례 상수가 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 인 $\ln \frac{N}{2}$ 으로 증가됨을 증명하였다. 이 식은 종전의 로그선형 증가에 대한 실험 사실과 잘 부합한다. 저자의 소견으로는 이 사실은 학계에 보고된 적이 없는 것으로 사료된다.

참고 문헌

[1] K. Nitadori, "Statistical analysis of Δ PCM," *Electron. Commun. in Japan*, vol. 48, pp. 17-26, Feb. 1965.

[8] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization distortion in pulse count modulation with nonuniform spacing of levels," *Proc. IRE*, pp. 44-48, Jan. 1951.

[9] J.A. Bucklew and G.L. Wise, "A note on multidimensional asymptotic quantization theory," *Proc. Eighteen Ann. Allerton Conf. Commun. Contr. Comput.*, pp. 454-463, Oct. 1980.

[10] E.J. Purcell and D. Varberg, *Calculus with Analytic Geometry*, 4th edition, Prentice-Hall, 1984.