

유도전동기의 속도 제어를 위한 설계사양에 부합되는 제어기 설계

이 충 우, 서 병 설

한양대학교 전기공학과

전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 016-268-6184

Controller Design Adaptable to Design Specification for Speed Control of Induction Motor

Abstract

This paper presents LQ-PID controller to reduce the gap between the input speed and the out speed at the induction motor.

I. 서 론

유도전동기는 기계적 구조가 견고하고 보수 점검 및 유지가 용이하며 가격이 비교적 저렴하다는 이점이 있다. 그러나 유도 전동기는 비선형특성^{[1][2]} 때문에 직류기에 비해 제어 성능이 저하되는 단점을 내포하고 있다. 따라서 제어성능의 향상을 목표로 전동기 기술, 전력 변환기술, 제어기술 및 센서기술등의 종합적 기술을 필요로 하는 유도 전동기 제어에 관한 연구는 이들 시스템에 관한 이론과 기술의 진보와 함께 유기적인 관계를 유지하며 발전하고 있다. 유도 전동기의 고성능 고정밀 제어를 위한 연구는 크게 나누어 전동기 자체의 등가회로 모델로부터 유도되는 제반 특성을 이용하여 제어 입력 변수를 결정하여 원하는 제어 목표를 달성하는 연구와 유도전동기를 제어적인 관점에서 상태 공간상에서 표현하고 과도상태와 정상상태를 전과정에서 고성능 제어 할 수 있도록 현대 제어 이론의 적용을 통해 제어 입력을 결정하고자 하는 연구로 나눌 수 있다. 전자의 경우 대표적인 예로 벡터 제어^[3]를 말할 수 있는데 각각 자속과 토크를 제어함으로써 타여자 직류기와 같은 제어성능을 얻을 수 있는 제어이론이다. 후자의 경우 산업계 전반에서 폭넓게 사용되어 온 PI제어 방식이 파라미터 변동이나 부하 외란에 대해 건설

성 및 속응성이 결여되는 단점을 가지고 있으므로 고수준의 제어 이론을 적용하여 제어기의 성능을 향상시키는 방법에 대한 연구^[4]가 있다. Chu^[5]는 H^∞ 를 이용하여 유도전동기의 속도추종이 잘 이루어지는 제어기 설계 방법을 연구하였다. 그러나 H^∞ 를 이용한 설계는 모델의 고차화에 따른 설계과정의 복잡성에 대한 어려움이 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 설계상의 간편성과 강인성을 내포하는 Suh^[6]의 LQ-PID제어기 설계 방법은 하나의 대안이 될 수 있다. 본 논문에서는 설계사양에 만족하는 오버슈트 및 정착시간을 선정하는 방법을 제안하고 이러한 LQ-PID제어기 설계 방법은 유도전동기의 속도제어시 속도의 지연이나 과도한 오버슈트가 발생하는 문제점과 운전시부터 급제동 혹은 제동시 입력 속도와 출력 속도의 오차에 대한 강인성을 고려한 제어기가 설계될 수 있음을 보이고자 한다.

II. 유도전동기 모델링

유도전동기의 기계적인 방정식은 토크 성분을 기본으로 식(1)과 같다.

$$T_e(t) = T_d(t) + J \frac{dw(t)}{dt} + Bw(t) \quad (1)$$

여기서 $T_e(t) = K_e \times i_{sq}^*(t)$ 이므로

$$K_e \times i_{sq}^*(t) = T_d(t) + J \frac{dw(t)}{dt} + Bw(t) \quad (2)$$

식(2)를 라플라스 변환하면

$$K_e \times i_{sq}^*(s) = T_d(s) + (Js + B)w(s) \quad (3)$$

$T_d(s) = 0$ 이면 식(4)와 같이 이상적인 플랜트가 설계된다.

$$\frac{w(s)}{i_{sq}^*(s)} = \frac{K_e}{Js + B} \quad (4)$$

이상적인 플랜트에서 고주파가 무시되어진 것에 대하여 보상하기 위해서 $H = \frac{(as+1)}{(bs+1)}$ 를 직렬로 곱하여 주면 유도 전동기의 공칭 플랜트가 설계된다.

$$G(s) = \frac{K_e(as+1)}{(js+B)(bs+1)} \quad (5)$$

식(5)를 기본으로 속도 제어기 $C(s)$ 를 결합한 속도제어 블록선도는 그림1과 같다.

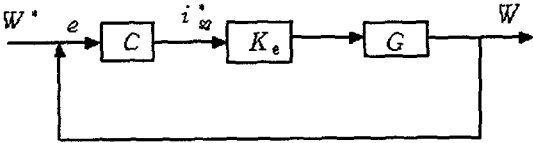


그림1. 페루프 시스템의 블록선도

$T_e(s)$: 전동기 토크, $T_d(s)$: 부하 토크, K_e : 상수, $i_{sq}^*(s)$: 입력 전류, $\omega^*(s)$: 입력 속도, $\omega(s)$: 출력 속도, B : 기계시스템 제동비, J : 회전자 관성 모멘트

III. LQ-PID제어기 설계

유도전동기의 미분방정식은 다음과 같다.

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 u(t) \quad (6)$$

여기서 $a_0=1$, $a_1 = \frac{J+Bb}{Jb}$, $a_2 = \frac{B}{Jb}$, $b_1 = \frac{K_e a}{Jb}$, $b_2 = \frac{K_e}{Jb}$ 이다. $y(t)$ 는 출력변수, $u(t)$ 는 제어변수, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 는 유도전동기 계수이고 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{Jb} & -\frac{J+Bb}{Jb} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_e a}{Jb} \\ \frac{K_e}{Jb} \end{bmatrix}$$

이와 식(9)와 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (9)$$

여기서 Q 는 상태가중행렬, R 은 제어가중행렬이다. 제한 제어 법칙은 식(10)과 같다.

$$u(t) = -Cx(t) \quad (10)$$

$$C = -R^{-1}B^TK \quad (11)$$

여기서 K 는 Riccati방정식의 유일한 해이다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (12)$$

K 와 Q 의 성분들을 식(13)과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(10)의 최적제어법칙은 PID제어기 형태가 된다.

$$u(t) = -\frac{1}{R} \left\{ (b_1 K_{10} - b_2 K_{20}) \int_0^t y(\tau) d\tau + (b_1 K_{11} - b_2 K_{21}) y(t) + (b_1 K_{12} - b_2 K_{22}) \frac{dy(t)}{dt} \right\} \quad (14)$$

Riccati방정식 식(12)에 대입하고 LQ-PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는 K 를 Q 에 관한 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$b_1 K_{10} - b_2 K_{20} = \sqrt{Q_{00}R} \quad (15)$$

$$b_1 K_{11} - b_2 K_{21} = \sqrt{(Q_{11} + 2(K_{10} - a_{21}K_{21}))R} \quad (16)$$

$$b_1 K_{12} - b_2 K_{22} = \sqrt{(Q_{22} + 2(K_{12} - a_{22}K_{22}))R} \quad (17)$$

식(15),(16),(17)의 a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 는 유도전동기의 계수임을 고려할 때 가중치요소 Q 와 R 에 의한 관계식임을 알 수 있다. 그리고 오버슈트나 정착시간을 만족할 수 있도록 Q 와 R 의 선정은 다음장에서 제시하고자 한다.

IV. 가중치 요소 Q와 R의 선정

시간영역에서 오버슈트를 조정할 뿐만 아니라 고유주파수에 의해 정착시간도 조절할 수 있도록 LQR의 가격함수의 가중치요소 Q 와 R 을 선정하고자 한다.

먼저, 식(18)과 같이 페루프 $F(s)$ 를 고려하여 보자.

$$F(s) = \frac{(\alpha_2 s + w_n)(s^2 + p_2 w_n s + \gamma_2 w_n^2)}{(\alpha_1 s + w_n)(s^2 + p_1 w_n s + \gamma_1 w_n^2)} \quad (18)$$

식(18)에서 볼 수 있듯이 페루프 전달함수 $F(s)$ 는 영점을 발생한다. 영점은 오버슈트에 영향을 미치는 요소이므로 오버슈트를 선정하기 위해서는 영점의 영향을 고려하여야 한다. 먼저, 식(18)은 식(19)와 같이 $F_1(s), F_2(s), F_3(s), F_4(s)$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) \quad (19)$$

$$F_1(s) = \frac{b_2 s^2}{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}, \quad F_2(s) = \frac{b_2 s^2}{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$$

$$F_3(s) = \frac{b_1 s^2}{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}, \quad F_4(s) = \frac{b_2 s^2}{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$$

이와 $F_4(s)$ 를 역라플라스 변환하면 식(20)과 같다.

$$f_4(t) = A e^{-\frac{\sigma}{2}t} + e^{-\frac{\sigma}{2}t} \sqrt{B^2 + (-p \frac{w_n}{2} B + C)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{w_n} \frac{1}{r - \frac{p^2}{4}} \sin(\sqrt{r - \frac{p^2}{4}} w_n t + \phi)} \quad (20)$$

$$A = \frac{r^3}{-r^3 + pr - 1}, \quad B = \frac{p - \frac{1}{r}}{r^2 - p + \frac{1}{r}}, \quad C = w_n \frac{p^2 r - r^2 - p}{r^2 - pr + 1}$$

$$D = (-p \frac{w_n}{2} B + C) \frac{1}{w_n} \sqrt{\frac{1}{r - \frac{p^2}{4}}}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{D} \right) \text{이다.}$$

$f_4(t)$ 의 최대 오버슈트를 갖는 시간은 식(21)과 같다.

$$t_{max} = \frac{1}{w_n \sqrt{r - \frac{p^2}{4}}} \left(\frac{2\pi}{4} + \phi \right) \quad (21)$$

그림2에서 D_{os} 는 설계사양 오버슈트로서 $+\epsilon\%$ 를 초과하지 않는 최대값이다. 그리고 t_{max} 일때 $f_4(t)$ 의 미분함수 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 는 지수함수의 미분형태가 되어 계수만이 변화함을 알 수 있다. 따라서 t_{max} 일때 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ 의 크기의 변화에 의해 페루

프 전달함수 $F(s)$ 의 오버슈트가 결정됨을 알 수 있다.

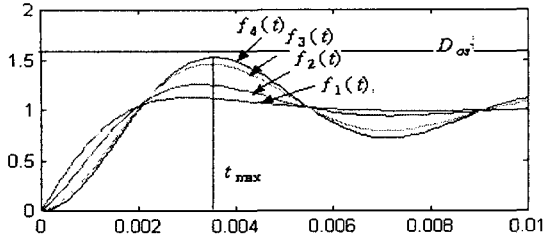


그림2. t_{max} 일 때 $f_1(t)$ $f_2(t)$ $f_3(t)$ $f_4(t)$

또한 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 의 합이 음수이면 페루프 전달함수 $F(s)$ 의 오버슈트 크기는 설계사양 오버슈트 D_α 범위 안에 존재하게 된다. 따라서 영점은 응답에 영향을 크게 미치지 않게 되므로 극점을 궤환에 의해 배치하여도 무방하다. 먼저, p, r 값과 w_n 을 설계 파라미터로 활용하기 위해서 오버슈트는 p, r 값에 따라 변화하고 상승시간이나 정착시간은 w_n 에 따라 변화함을 그림3에서 볼 수 있다.

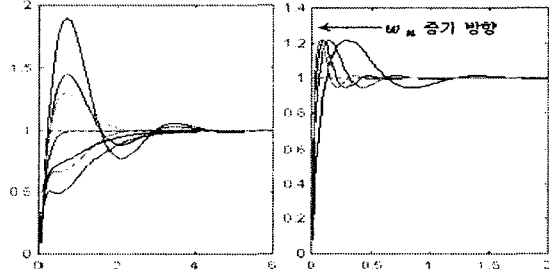


그림3. p, r 의 변화와 w_n 의 변화에 따른 단위계단응답

w_n 을 정규화시키면 식(18)을 식(22)와 같이 표현할 수 있다.

$$F(s) = \frac{\alpha_2 s^3 + \beta_2 s^2 + \gamma_2 s + \theta_2}{\alpha_1 s^3 + \beta_1 s^2 + \gamma_1 s + \theta_1} \quad (22)$$

그림4에서 t_m 는 정상 상태값의 $\pm \epsilon\%$ 범위 이내에 도달

하는 정착시간이고 $t_s = \frac{t_m}{w_n}$ 의 관계를 이용하여 정착시간을 고유주파수로 조절한다.

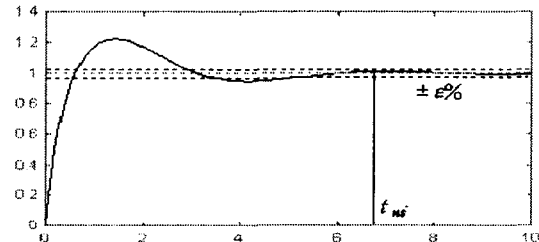


그림4. 정규화된 전달함수의 단위계단응답

다음은 이들 설계파라미터들인 p, r, w_n 과 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 과의 상호관계를 유도하기 위해 식(23)과 같이 페루프 상태 공간 모델식을 구한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t) \quad (23)$$

페루프 시스템행렬 A_c 는 식(24)로 표현된다.

$$A_c = A - BG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

페루프 시스템의 특성방정식은 식(25)와 같다.

$$\Delta = s^3 + (-A_{11} - A_{22})s^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{10})s + (A_{10}A_{22} - A_{12}A_{20}) = 0 \quad (25)$$

식(25)의 특성방정식을 식(26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta = (\alpha_1 s + \omega_n)(s^2 + p_1 \omega_n s + \gamma_1 \omega_n^2) \quad (26)$$

식(25) 극점들의 목표(target)함수라 할 수 있는 식(26)의 극점들과 일치하도록 PID 제어기 파라미터 $K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{20}, K_{21}, K_{22}$ 를 정하는 극점 배치 문제로 생각하여 p_1, r_1 과 w_n 이 가중치요소 Q, R 의 관계로 표현하면 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\alpha_1 = 1 \quad (27)$$

$$(\alpha_1 p_1 + 1) \omega_n = -A_{11} - A_{22} \quad (28)$$

$$(\alpha_1 \gamma_1 + p_1) \omega_n^2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{10} \quad (29)$$

$$\gamma_1 \omega_n^3 = A_{10}A_{22} - A_{12}A_{20} \quad (30)$$

여기서, p, r 값을 선정하기 위해서 영점이 응답에 영향을 미치지 않게 설계사양 오버슈트 D_α 범위 안에 존재해야 하기 때문에 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 의 크기의 합이 영보다 작아야 한다는 제약조건이 생성된다. 따라서 페루프 $F(s)$ 에서의 영점에 의한 오버슈트는 항상 설계사양 범위 안에 위치하게 된다. 이와 같이 설계사양에 만족하는 오버슈트와 p, r 값을 선정하기 위해 블록형 최적화 기법을 이용한다. 먼저 $f_4(t)$ 의 최대 오버슈트 Φ_α 를 식(31)과 같이 정의한다.

$$\Phi_\alpha \cong \sup_{t \geq 0} f_4(t) - 1 \quad (31)$$

식(32)는 준블록형 최적화기법에 의한 표현식이다.

$$\Phi_\alpha(\lambda f_{41}(p_1, r_1) + (1-\lambda) f_{42}(p_2, r_2))$$

$$\leq \lambda \Phi_\alpha(f_{41}(p_1, r_1)) + (1-\lambda) \Phi_\alpha(f_{42}(p_2, r_2)) \leq D_\alpha \quad (32)$$

여기서 $0 \leq \lambda \leq 1$ 이다. 따라서 시간영역에서의 오버슈트는 준블록형을 만족함으로써 λ 값에 따라 수많은 p, r 의 집합을 형성할 수 있다. p, r 값의 선정을 위해 식(33)과 같이 블록형 최적화 문제로 표현할 수 있다.

최소화 Φ_α

$$\text{제약조건 } f_4(p, r) \leq D_\alpha, \quad p^2 - 4r < 0, \quad p, r > 0$$

$$f_1(p, r) + f_2(p, r) + f_3(p, r) < 0 \quad (33)$$

여기서 $p^2 - 4r < 0$ 는 오버슈트를 생성하는 조건이며 $p, r > 0$ 은 전달함수의 안정화 조건이다.

이와 같은 방법으로 p, r 값을 선정되고 a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 는 플랜트 계수이므로 결정된 값이다. 또한

$$t_s = \frac{t_m}{w_n}$$

의 관계식에서 w_n 은 선정되고 R 은 입력의 에너지량을 나타내는 역할을 하고 있어서 순시응답에는 Q 가 영향을 주므로 $R=1$ 로 놓으면 식(12)의 Q_{00}, Q_{11}, Q_{22} 가 구해지고 식(15),(16),(17)에 대입하면 LQ-PID제어기 동조계수가 결정되어진다.

V. 시뮬레이션

유도전동기의 설계사양은 다음과 같다.

$$K_e : 0.746 \text{ Nm/A}, \quad J : 0.0249 \text{ Nm s}^2/\text{rad},$$

$$B : 0.008 \text{ Nm s/rad}, \quad a : 0.021, \quad b : 0.01$$

여기서 설계사양 오버슈트 D_{∞} 는 4%이내에, 정착시간은 정상상태응답의 $\pm 0.01\%$ 의 오차범위에 도달하는 시간으로 설정하고 정착시간 $t_s=0.25$ 로 제시하였다. 여기서 정규화된 그래프의 오버슈트와 정착시간의 범위를 작게 제시한 것은 Chu 방법과 비교하기 위해서이다. 그리고 설계사양에 만족하는 오버슈트를 구하기 위해 제안된 블록형 최적화 문제로 전환하면 $p=1.55$ 와 $r=0.14$ 이 선정된다. 따라서 그림5와 같이 w_n 에 대한 정규화된 그래프를 나타낼 수 있다. 정규화된 그래프로부터 $\pm 0.01\%$ 내에 도착하는 시간을 $t_{ns}=1$ 로 택하면 $w_n = 5\text{rad/s}$ 을 구할 수 있다.

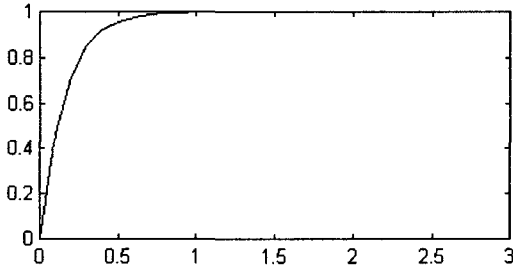


그림5. 정규화된 전달함수의 단위계단응답

Q와 K를 구하면 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 3.5699 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 5.6128 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0166 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 19196 & 49.04 & 0.360 \\ 49.04 & 0.656 & 0.009 \\ 0.360 & 0.009 & 0.000 \end{bmatrix}$$

그리고 PID제어기의 동조계수는 다음과 같다.

$$[K_p \ K_i \ K_d] = [10.153 \ 1.889 \times 10^3 \ 0.006]$$

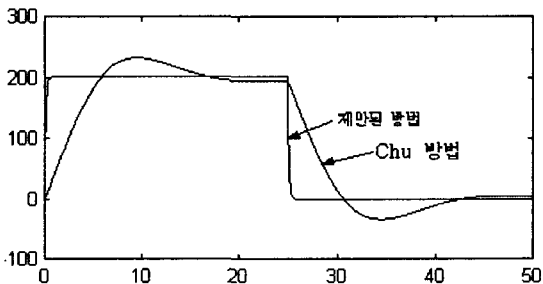


그림 6. Chu 방법과 제안된 방법의 펄스응답

그림6에서는 Chu 방법과 본 논문에서 제안한 LQ-PID 제어기의 200rpm의 펄스응답곡선을 비교하였다. 시뮬레이션 결과로부터 확인 할 수 있듯이 운전시부터 25초시의 급제동 또는 제동시 입력속도를 잘 추종함을 확인할 수 있었다. 또한 제안한 LQ-PID제어기 설계 방법은 Chu 방법보다 입력 속도와 출력 속도의 오차에 강인함을 볼 수 있다.

VI. 결 론

본 논문은 폐루프 전달함수에서 발생하는 영점을 고려하여 오버슈트를 선정하는 방법을 제안하고 이러한 LQ-PID제어기 설계 방법으로 유도전동기 모델링 오차에 따른 속도의 지연이나 과도응답의 문제점을 해결하여 강인성과 속응성을 가진 속도제어기를 설계하였다. 따라서 H^∞ 를 이용한 설계 방법에서 모델의 고차화에 따른 설계과정의 복잡성에 대한 어려움을 설계상의 간편성과 강인성을 내포하는 LQ-PID제어기 설계 방법을 통해 개선 할 수 있었다. 본 논문은 고성능 응답특성 및 정밀성을 요구하는 NC 공작기계, 고속 엘리베이터, 천연가스 제조 공정, 압축기 등의 시스템에 활용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] C.Ataianese and G.Tomasso, "Field Oriented Control of Induction Motor by means of a H^∞ Controller", *ISIE Proc. of the IEEE International Symposium on industrial electronics*, Vol. 3 pp. 1238~1243, 1999
- [2] Y.-Y. Tzou, "DSP-Based Robust Control of AC Induction Servo Drive for Motion Control", *IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol. 4, No. 6, November, 1996
- [3] Hirokazu Tajima and Yoichi Hori, "Speed Sensorless Field Orientation Control of the Induction Machine", *IEEE Trans. Industrial Applications*, Vol. 29, PP. 175~180, Jan/Fed, 1993
- [4] Yasuhiko Dote, "Application of Modern Control Techniques to Motor Control", *IEEE Proc.* Vol. 76, PP. 438~454, April, 1988
- [5] A.Chu., E.P.Nowicki, T.Chen, "Design of a Robust Controller for a Compressor Driven by a Field Oriented Controlled Induction Motor", *IEEE Canadian Conference on electrical. & computer.*, 1998
- [6] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regulators for a Second Order System via LQR Approach", *15th International Conference on Electrical Machines*, Brugge Belgium, pp. 25~28 August 2002
- [7] Doyle J. C. Glover, K., Kkchargonekar, P.P. and France, B. A. "State space solution to standard H_2 and H_∞ control problem", *IEEE Trans. On Auto. Control*, Vol. 34, pp. 831~847, 1989
- [8] F.J.Lin, "Robust speed-controlled induction motor drive using EKF and RLS estimator", *IEE Proc. Electr. Power, Appl.*, Vol. 143, No. 3, May, 1996
- [9] G.-M. Liaw & F.J.Lin, "A Robust Speed Controller of Induction Motor Drive", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol. 41, No. 3, June, 1994