

# 직교이방 섬유강화 복합재료의 비선형 비등방 경화법칙

김대용\* · 이명규\* · 정관수\*

## Nonlinear Anisotropic Hardening Laws for Orthotropic Fiber-Reinforced Composites

Daeyong Kim, Myoung-Gyu Lee and Kwansoo Chung

**Key Words:** Elasto-plasticity, Isotropic-kinematic hardening, Anisotropic evolution, Back-stress, Fiber-reinforced composites

### ABSTRACT

In order to describe the Bauschinger and transient behavior of orthotropic fiber-reinforced composites, a combined isotropic-kinematic hardening law based on the non-linear kinematic hardening rule was considered here, in particular, based on the Chaboche type law. In this modified constitutive law, the anisotropic evolution of the back-stress was properly accounted for. Also, to represent the orthotropy of composite materials, Hill's 1948 quadratic yield function and the orthotropic elasticity constitutive equations were utilized. Furthermore, the numerical formulation to update the stresses was also developed based on the incremental deformation theory for the boundary value problems. Numerical examples confirmed that the new law based on the anisotropic evolution of the back-stress complies well with the constitutive behavior of highly anisotropic materials such as fiber-reinforced composites.

### 1. 서론

섬유강화 복합재료는 높은 비강도 및 비강성을 가진 소재로서 이러한 성질은 주로 기지재에 삽입된 섬유에 의해서 발생되므로 섬유배향에 따른 이방성을 가진다. 이러한 고강도, 고강성의 이방성 복합재료에 대한 기계적 거동은 그 구성방정식을 흔히 선형탄성체로 가정하여 설명하였다. 그러나 섬유길이방향 이외의 방향에서의 기계적 거동 등의 더 정밀한 거동을 묘사하고자 할 경우 선형탄성체 뿐만 아니라 탄-소성체로 가정되어 설명되어야 할 것이다. 일례로 순회부하(cyclic loading)시 이력곡선과 정적부하 중 역부하(unloading) 시에는

바우싱거 효과(Bauschinger effect) 및 과도 거동(transient behavior)을 포함하는 탄-소성 거동을 보여준다[1]. 최근 이러한 거동을 설명하기 위한 노력의 일환으로[2], Sarbayev[3]는 이방성 복합재료의 소성변형에 대해 이방성 이차 항복함수의 이동경화법칙을 이용하여 설명하였다. 그러나 몇몇의 연구에도 불구하고 바우싱거 효과와 과도 거동을 적절히 표현한 연구가 드물고 구조재의 정밀한 거동을 설명하는 연구는 아직 미미한 실정이다.

따라서 본 연구에서는 비등방, 특히 직교이방 섬유강화 복합재료의 역부하 동안의 바우싱거 효과와 과도 거동 및 그것들의 이방성을 적절히 표현하기 위하여 탄-소성 이론에 기초한 Chaboche 모델[4]을 수정한 두가지 형태의 등방-동적경화 법칙(isotropic-kinematic hardening laws)을 개발하였다.

\* 서울대학교 재료공학부

하나는 이방성 항복함수를 고려하지만 이동응력 (back-stress)의 비등방 변화를 고려하지 않은 것[5] 이고 다른 하나는 비등방 항복함수 뿐만 아니라 이동응력의 비등방 변화를 함께 고려한 것이다. 복합재료의 직교 이방성을 설명하기 위한 항복 함수로는 Hill의 1948년도 이차 항복식[6]이 사용되었다. 인장 및 순수전단 실험 자료로부터 등방 및 동적 경화 곡선을 분리하여 재료상수를 구하였으며, 경계 조건이 부과된 문제를 풀기 위하여 변형 증분 이론 (incremental deformation theory)[7]에 기초한 응력 갱신법을 설명하였다.

## 2. 구성 방정식

### 2.1 탄성 거동

1-2 평면에서 한 방향으로만 섬유가 배향되고 적층된 직교이방 복합재료를 고려하자(1-섬유길이 방향, 2-수직방향). 평면응력 조건 하에서 직교이방 물질의 탄성 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^e \\ \epsilon_{22}^e \\ \epsilon_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\epsilon}^e. \quad (1)$$

여기서 강성 계수들은

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12}(=Q_{21}) = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \text{ 이고 } E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21} \text{ 들은 각각 1-2 방향의 영률과 1-2 평면에서의 전단상수 및 포아송비 들이다.}$$

### 2.2 비등방 항복 함수

초기 비등방 항복응력 곡면을 표현하기 위해서 평면응력 조건 하에서 Hill의 1948년 비등방 항복조건이 고려되었다. 즉,

$$\Phi = f(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}_{iso}^2 = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma}_{iso}^2 = 0 \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix}$  이고,  $\bar{\sigma}_{iso}$  는 항복응력

곡면의 크기를 나타내는 유효 응력이며  $f$  는 2 차 균일 함수 (2nd order homogeneous function) 이다.

### 2.3 유동 및 변화 규칙

등방-동적 경화법칙에서의 항복 곡면은 다음과 같이 표현된다.

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \bar{\sigma}_{iso}^2 = 0 \quad (3)$$

여기서  $\boldsymbol{\alpha}$  는 항복 곡면의 이동 정도를 나타내는

이동응력이다. 이동응력의 변화는 여러가지 방법으로 정의될 수 있는데 그 하나는 등방 변화 규칙으로써 Chaboche 모델에 기초한다. 즉, 이동응력의 증분은 다음과 같이 두개의 항으로 구성된다.

$$d\boldsymbol{\alpha} = h_1 \frac{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})}{\bar{\sigma}_{iso}} d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} - h_2 \boldsymbol{\alpha} d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4)$$

여기서  $h_1 = d\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1/d\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  와  $h_2 = d\boldsymbol{\alpha}_2/d\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  는 유효변형률,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} (= \int d\bar{\boldsymbol{\epsilon}})$  의 함수인  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1(\bar{\boldsymbol{\epsilon}})$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2(\bar{\boldsymbol{\epsilon}})$  의 기울기 값들이다. 일축신장 실험에 대하여 식(3), (4) 는 물질 상수  $h_1$  과  $h_2$  이 상수라는 가정하에서

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{h_2}{h_1} (1 - e^{-h_1 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \quad (5)$$

와 같이 표현될 수 있고 일축신장 실험을 통하여 얻어진  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  에 의해서  $h_1$  와  $h_2$  를 구할 수 있다[5].

강 이방성 재료인 섬유 강화 복합재료의 이방성 거동을 더 적절히 표현하기 위해서는 등방 변화 규칙을 수정하여 이방성 이동응력 변화 규칙을 제안할 수 있다. 즉,

$$d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C} \cdot \frac{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})}{\bar{\sigma}_{iso}} d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\alpha} d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\bar{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (6)$$

이를 평면응력 하에서 성분으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} d\alpha_{11} \\ d\alpha_{22} \\ d\alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7)$$

식(7)을 간단히 하기 위해서  $C_{21}$ ,  $C_{12}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  을 영이라고 가정하면 식(7)은

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}n_{11}}{H_{11}}(1 - e^{-H_{11}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \\ \frac{C_{22}n_{22}}{H_{22}}(1 - e^{-H_{22}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \\ \frac{C_{66}n_{66}}{H_{66}}(1 - e^{-H_{66}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

위 식(8)에서  $n_{11}$ ,  $n_{22}$ ,  $n_{66}$  은 항복곡면과 기준상태가 정해지면 결정되는 값이므로 6 개의 물질 상수들은 1 과 2 방향에서의 인장실험 및 순수전단실험의 응력-변형률 곡선으로부터 얻어질 수 있다.

## 3. 응력 갱신 법

수치정식화를 위하여 변형증분이론[7]이 이용되었는데 이 이론 하에서 변형률 증분은 이산

(discrete) 변형을 증분이 된다. 응력 갱신을 위해서는 Chung[8] 및 Simo 와 Hughes[9]에 의한 방법이 고려되었다. 그것의 순차적 과정을 설명하면 갱신될 응력은 우선 탄성으로 가정되어 이산 변형을 증분,  $\Delta\epsilon$  에 의해 표현되고, 소성 내부 변수(plastic internal variable)들은 앞선 값들이 보존된다.

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + \mathbf{D}^e \Delta\epsilon, \quad \bar{\epsilon}_{n+1}^{trial} = \bar{\epsilon}_n, \quad \alpha_{n+1}^{trial} = \alpha_n \quad (9)$$

여기에서 윗첨자 *trial* 는 가(trial) 상태를, 아랫첨자는 시간단계를 의미한다. 식(9)에서 얻어진 가 상태 값들은 식(3)에 의해서 탄성 소성 상태를 판가름하게 된다. 즉,

$$f(\sigma_{n+1}^{trial} - \alpha_{n+1}^{trial}) - \bar{\sigma}_{iso}^2(\bar{\epsilon}_{n+1}^{trial}) < TOL. \quad (10)$$

위 식(10)을 만족한다면  $n+1$  시간단계는 탄성으로 간주된다. 식(10)을 만족하지 않을 경우 그 단계는 탄-소성으로 가정하고 가 상태 값을 초기 추정 값으로 하여  $\Delta\bar{\epsilon}$  에 대한 다음 비선형식을 풀어낸다.

$$f(\sigma_n - \alpha_n + \Delta\sigma - \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2) = \bar{\sigma}_{iso}^2(\bar{\epsilon}_n + \Delta\bar{\epsilon}) \quad (11)$$

식(11)의 수렴해를 얻어낸 후 응력, 이동응력, 유효 변형률이 다음 시간단계를 위해 갱신된다.

#### 4. 예 제

개발된 구성방정식을 이용하여 일축 순 및 역 부하 곡선을 구한 결과 Fig. 1 를 보였다. 이는 개발된 등방-동적경화 법칙이 바우싱거 효과와 과도 거동을 적절하게 표현할 수 있음을 보여 준다.

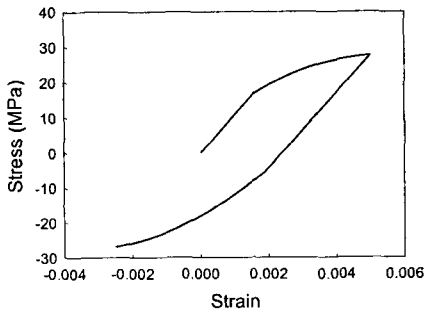


Fig. 1 An example solution for a uni-axial loading-unloading-reverse loading curve.

또 다른 예로 등방 및 비등방 이동변화 규칙을 비교하기 위해서 선 연구의 물성치를 이용하여 직교이방 섬유강화 복합재료의 인장 및 전단 실험에서의 응력-변형을 곡선을 계산하였다. 일축 유리 섬유강화 복합재료의 물성치는 다음과 같다[3,10].

$$E_1 = 63,000 \text{ (MPa)}, \quad E_2 = 9,700 \text{ (MPa)}, \\ G_{12} = 7,400 \text{ (MPa)}, \quad \nu_{12} = 0.3$$

항복 함수 계수:

$$b_{11} = 6.92e-5, \quad b_{22} = 1, \quad b_{66} = 0.39, \quad (b_{12} : \text{No data})$$

초기 항복 응력:

$$\sigma_{11y} = 1,800 \text{ (MPa)}, \quad \sigma_{22y} = 15 \text{ (MPa)}, \\ \sigma_{12y} = 24 \text{ (MPa)}$$

동적 경화식[3]:

$$\alpha_{22} = 300(1 - e^{-80\epsilon_{22}}) \text{ (MPa)}, \\ \alpha_{12} = 87.5(1 - e^{-40\epsilon_{12}}) \text{ (MPa)}, \quad (\alpha_{11} : \text{No data})$$

과도 응력:

$$F_{11} = 1,800 \text{ (MPa)}, \quad F_{22} = 25 \text{ (MPa)}, \quad F_{12} = 59 \text{ (MPa)}$$

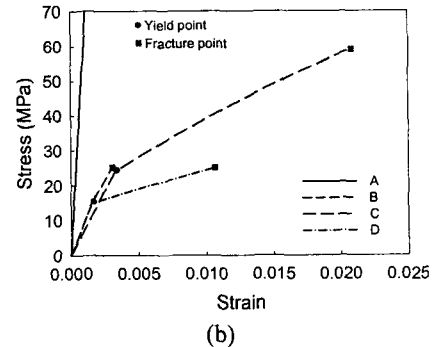
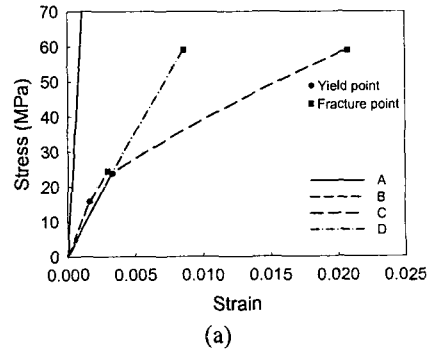
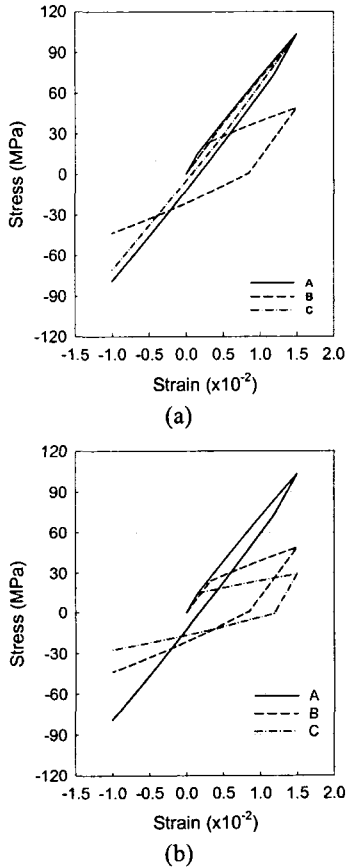


Fig. 2 Comparison of stress-strain curves calculated with the two evolution rules of kinematic hardening regarding (a) transverse (b) shear direction as reference state.

Figs. 2 에서는 선 연구에서 얻어온 실험결과에 의한 자료를 이용하여 길이방향, 가로방향에서 수행된 일축 신장(곡선 A 와 B) 및 순수전단 실험(곡선 C)에 대한 응력-변형을 곡선을 본 연구에서 개발된 변화규칙을 적용하여 얻어 내었다. 또한 등방 변화 규칙과 비등방 변화 규칙에 의한 이방성 경화 곡선이 어떤 차이가 있는지 비교하였다. 즉, Fig. 2(a)에서 등방 변화 규칙의 기준상태는 가로방향의 일축 신장 값이므로 등방 및 비등방 변화규칙 모두에 대해서 구해진 가로방향의 일축 신장 곡선은 같다(곡선 B). 반면 비등방 변화 규칙에 의

한 순수 전단 곡선(곡선 C)과 등방 변화 규칙에 의한 것(곡선 D)은 상당한 차이를 보여준다. Fig. 2(b)에서는 순수 전단 값을 등방 변화 규칙의 기준상태로 정하고 계산한 결과를 보여 준다. 따라서 등방 및 비등방 변화 규칙 모두 순수 전단 곡선에 대해서는 같으나(곡선 C) 등방 변화 규칙에 의한 가로방향 일축 곡선(곡선 B)과 비등방 변화 규칙에 의한 것(곡선 D)과 차이를 보여준다.



**Fig. 3 Comparison of loading and unloading curves calculated with the two evolution rules of kinematic hardening regarding (a) transverse and (b) shear direction as reference state**

역부하 거동과 결부하여, 개발된 구성방정식이 어떤 거동을 보이는지 살펴 보기 위하여 순 및 역 부하를 가했을 경우 비등방 및 등방 변화 규칙에 의해 얻어진 가로방향 일축신장 및 순수전단 곡선을 Fig. 3에서 비교하였다. 이 경우 파괴는 고려하지 않았다. Fig. 3(a)에서 등방 변화 규칙의 기준상태는 가로방향의 일축 신장 값을 삼았다. 따라서 가로 방향 일축 신장에서의 등방 및 비등방 변화 규칙에 의한 결과 값은 같은 반면(곡선 A) 순수 전단에서의 등방 및 비등방 변화 규칙에 의한 값

은 다르게 된다(각각 곡선 B,C). 또한 Fig. 3(b)에 대해서 순수 전단을 등방 변화 규칙의 기준상태로 삼음으로써 비등방 및 등방 변화 규칙에 대한 순수 전단 곡선(곡선 B)은 같은 반면 등방 변화 규칙에 의한 가로방향의 일축 신장 값과 비등방 변화 규칙에 의한 것(각각 곡선 A,C)과는 다르다. Figs. 2-3의 결과는 본 연구에서 개발된 비등방 이동응력 변화규칙을 수반하는 등방-동적 경화법칙이 섬유강화 복합재료와 같은 강 이방성 재료의 기계적 거동을 적절하게 묘사하기 위해서 필수 불가결하다는 것을 설명해 준다.

## 5. 결론

(1) 수직이방성 섬유강화복합재의 소성 이론을 개발하기 위하여 탄-소성 하에서 비등방 이동응력 변화를 갖는 등방-동적경화 법칙이 개발되었다.

(2) 비등방 항복조건으로 Hill의 2차 항복함수가 사용되었고 증분변형이론이 응력 갱신법에 적용되었다.

(3) 개발된 구성방정식은 바우싱거 효과와 과도 거동을 표현했으며, 이방성이 강한 섬유강화복합재료의 방향에 따른 이동응력의 차이를 적절하게 나타내 주었다.

## 후기

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실 사업에 의해 지원되었으며 이에 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) Saleeb A.F., Wilt T.E., Al-Zoubi N.R. and Gendy A.S., *Composites Part B*, 34, (2003) 21
- (2) Jones R. M., "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, New York, (1975)
- (3) Sarbayev B. S., *Computational Materials Science*, 6, (1991) 211
- (4) Chaboche J. L., *Int. J. Plasticity*, 2, (1986) 149
- (5) Lee M.G., Kim D., Kim C., Wenner M.L., Wagoner R.H., Chung K., *Plasticity'2003*, Canada, Quebec.
- (6) Hill R., "The mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, New York, (1956)
- (7) Chung . K., Richmond O., *Int. J. Plasticity*, 9, (1993) 907
- (8) Chung K., Ph. D. Dissertation, Stanford University, (1984)
- (9) Simo J. C. and Hughes T.J.R., "Computational Inelasticity", Springer-Verlag, New York, (1997)
- (10) Valdmanis V. M. and Mikelsons M. Ya., *Mekh. Kompoz. Mater.*, 3, (1991) 447