

An Application of Markov Chain and Bayesian Network for Dynamic System Reliability Assessment

동적 시스템의 신뢰도 평가를 위한 마코프체인과 베이저안망의 적용에 관한 연구

Suneung Ahn (sunahn@hanyang.ac.kr), Jungmo Koo (over_action@lycos.co.kr)

Department of Industrial Engineering, Hanyang University, Ansan 425-791, South Korea

Abstract

This paper is intended to assess a system reliability that is changed as time passes. The proposed methodology consists of two steps: (1) predicting probabilities that each component fails at specific time by using a Markov Chain model and (2) calculating reliability of the whole system via Bayesian network. The proposed methodology includes extended Bayesian network model reflecting the case that components are mutually dependent.

1. 서론

베이저안망(Bayesian network)은 불확실한 상황에서 지식을 표현하고 결과를 추론하고자 할 때 사용하는 유용한 도구이다. 주로 인공지능 분야[4]나 의학분야[1]에서 널리 연구되고 있으며, 최근에는 신뢰성분야에서도 기존의 신뢰도분석도구들의 단점을 보완할 수 있는 도구로써 그 연구가 진행되고 있다[2]. 그러나 베이저안망은 시간에 따라 부품들의 고장확률이 변화하는 시스템과 상호의존적인 관계에 있는 부품들로 구성된 시스템을 표현할 수 없는 단점을 가지고 있다. 따라서 본 연구에서는 베이저안망을 이용하여 시간에 따라 부품들의 고장확률이 변화하며, 부품들이 상호의존적인 관계에 있는 시스템의 신뢰도를 평가한다.

2. 본론

2.1 마코프체인을 통한 부품의 고장확률 예측

그림 1은 두 개의 와이어(wire)로 구성된 호이스트(hoist)로 ① 운반하는 화물의 종류가 제한되어 있으며, ② 다음 번에 어떤 종류의 화물을 운반하게 될지 알 수 없는 시스템이다. 즉, 어떤 종류의 화물을 운반하는가에 따라 그림 1의 A와 B의 고장확률이 변한다. 이 경우에 임의의 시점에서 다음 화물을 운반할 때의 A와 B의 고장확률을 마코프체인으로 계산한다.

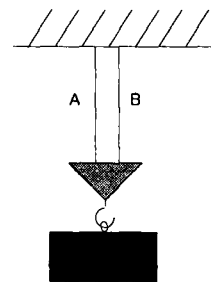


그림 1. 두 개의 와이어로 구성된 호이스트

호이스트에 화물을 싣는 시점에서 내려 놓는 시점까지를 운반기간이라고 하고, i 번째 운반기간에 운반하고 있는 화물의 종류를 T_i ($i=1,2,\dots,n$)라고 한다. 따라서 $P(T_{i+1}=l|T_i=k)$ 는 i 번째 운반기간에서 호이스트가 운반하는

화물의 종류가 k 일 때, 그 다음에 운반하는 화물의 종류가 l 일 확률을 나타낸다. 이것을 마코프체인으로 표현하면 식(1)과 같다.

$$P = \begin{matrix} & T_{i+1}=1 & \dots & T_{i+1}=n \\ \begin{matrix} T_i=1 \\ T_i=2 \\ \vdots \\ T_i=n \end{matrix} & \left| \begin{matrix} P(T_{i+1}=1|T_i=1) & \dots & P(T_{i+1}=n|T_i=1) \\ P(T_{i+1}=1|T_i=2) & \dots & P(T_{i+1}=n|T_i=2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(T_{i+1}=1|T_i=n) & \dots & P(T_{i+1}=n|T_i=n) \end{matrix} \right. \end{matrix} \quad (1)$$

P 의 행은 i 번째 운반기간에서 운반하는 화물의 종류를 나타내고, 열은 $i+1$ 번째 운반기간에서 운반하는 화물의 종류를 나타낸다. 따라서 i 번째 운반 기간에서 종류 k 의 화물을 운반하고 있을 때, $i+1$ 번째 운반기간에서의 A의 고장확률은 식 (2)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &P(A_{i+1}=1|T_i=k) \\ &= [P(T_{i+1}=1|T_i=k), \dots, P(T_{i+1}=n|T_i=k)] \\ &\times [P(A_{i+1}=1|T_{i+1}=1), \dots, P(A_{i+1}=1|T_{i+1}=n)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 시스템 고장확률의 예측

그림1의 시스템을 베이지안망으로 표현하면, 그림 2와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, 노드(node) A와 B는 각각 A와 B가 고장 나는 사건(event)을 나타내며, C는 시스템 전체가 고장 나는 사건을 나타낸다. 또, '1'은 고장(failure), '0'은 작동(survival)을 나타낸다.

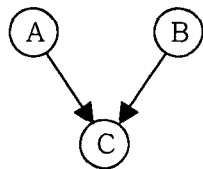


그림 2. 그림 1의 시스템을 표현한 베이지안망 모형

이 시스템을 병렬시스템(parallel system)인 경우와 직렬시스템(series system)인 경우로 나누어서 설명한다.

2.2.1 병렬시스템

그림1의 A와 B는 조건부종속(conditional dependent) 관계에 있다. 즉, A와 B가 모두 정상적으로 작동하면 서로 독립(independent) 관계를 유지하다가 둘 중 하나의 부품에서 고장이 발생하면 다른 부품의 고장확률이 변화한다. 따라서 이 시스템은 그림 2에서 A와 B 사이에 서로를 연결하는 호가 필요하다. 그러나 베이지안망은 순환로(loop)를 가질 수 없는 DAG(Directed Acyclic Graph)이기 때문에 이러한 관계를 표현할 수 없다. 이를 해결하기 위해 본 논문에서는 조건부 호(conditional arc)를 제시한다.

그림 3에서 보듯이 조건부 호는 상호 도달이 가능하도록 두 개의 호가 점선으로 구성 되어 있다. 이 두 개의 호는 조건에 따라서 모두 활성화가 되지 않거나, 둘 중 하나만 활성화가 되며, 동시에 두 개의 호가 모두 활성화가 될 수는 없다.



그림 3. 조건부 호

조건부 호를 사용하여 그림 1의 시스템을 베이지안망으로 표현하면 조건에 따라 그림4, 5, 6으로 변화하게 된다.

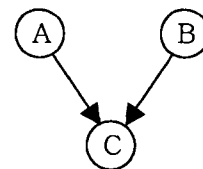


그림 4. $A_i=B_i=0$ 일 경우의 베이지안망 모형

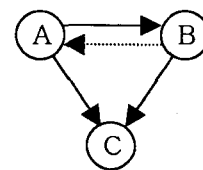


그림 5. $A_i=1, B_i=0$ 일 경우의 베이지안망 모형

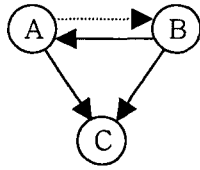


그림 6. $A_t=0, B_t=1$ 일 경우의 베이저안망 모형

또한, 이 모형의 조건부 확률표(conditional probability table)는 표 1과 같다. 표 1에서 t 는 화물의 운반기간 중의 임의의 한 시점을 나타내며, $t+\Delta t$ 는 t 시점에서 매우 짧은 시간이 지난 시점을 의미한다.

표 1. $P(C_{t+\Delta t}=1|A_t, B_t)$

	$A_t = 1$	$A_t = 0$
$B_t = 1$	1.0	$P(A_{t+\Delta t}=1 B_t=1)$
$B_t = 0$	$P(B_{t+\Delta t}=1 A_t=1)$	$P(C_{t+\Delta t}=1 A_t=0, B_t=0)$

따라서, $P(C_{t+\Delta t}=1|C_t=0)$ 은 화물을 운반하는 도중에 호이스트에서 고장이 발생할 확률을 의미하며, 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned}
 P(C_{t+\Delta t}=1|C_t=0) &= P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0, B_t=1|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1, B_t=1|C_t=0) \\
 &= P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=0, B_t=0, C_t=0)P(A_t=0, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=1, B_t=0, C_t=0)P(A_t=1, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=0, B_t=1, C_t=0)P(A_t=0, B_t=1|C_t=0) \\
 &= \{P(A_{t+\Delta t}=1)P(B_{t+\Delta t}=1)P(A_t=0)P(B_t=0) \\
 &+ P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1)P(B_t=0) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=1|B_t=1)P(A_t=0)P(B_t=1)\} \\
 &/\{1-P(A_t=1)P(B_t=1)\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

또한, 시스템 고장이 관측되었을 경우에 A_t 의 고장확률은 식 (4)로 갱신 된다.

$$\begin{aligned}
 P(A_t=1|C_{t+\Delta t}=1) &= P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &/\{P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1) + P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0)\} \\
 &= P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &/\{P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=0)P(A_t=0)\} \\
 &= P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &/\{P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_{t+\Delta t}=1, B_{t+\Delta t}=1|A_t=0)P(A_t=0)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &/\{P(B_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &+ \{P(A_{t+\Delta t}=1|B_t=1)P(B_t=1) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=1)P(B_{t+\Delta t}=1)P(B_t=0)\} \times P(A_t=0)\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

2.2.2 직렬시스템

직렬시스템인 경우에는 A와 B 중 하나에서만 고장이 발생해도 시스템이 고장을 일으키기 때문에 조건부 종속관계가 성립하지 않는다. 따라서 그림 2와 같은 베이저안망 모형을 사용할 수 있으며, 시스템 고장 확률은 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned}
 P(C_{t+\Delta t}=1|C_t=0) &= P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1, B_t=0|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0, B_t=1|C_t=0) \\
 &+ P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1, B_t=1|C_t=0) \\
 &= P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=0, B_t=0, C_t=0) \\
 &\times P(A_t=0, B_t=0|C_t=0) \\
 &= 1 - P(A_{t+\Delta t}=0)P(B_{t+\Delta t}=0) \quad (5)
 \end{aligned}$$

또한, 시스템 고장이 관측 되었을 경우에 각 부품의 고장확률은 식 (6)으로 갱신 된다.

$$\begin{aligned}
 P(A_t=1|C_{t+\Delta t}=1) &= P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=1)P(A_t=1) \\
 &/\{P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=1) + P(C_{t+\Delta t}=1, A_t=0)\} \\
 &= P(A_t=1)/\{P(A_t=1) + P(C_{t+\Delta t}=1|A_t=0)P(A_t=0)\} \\
 &= P(A_t=1)/\{P(A_t=1) + \{P(A_{t+\Delta t}=1)P(B_t=1) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=1)P(B_{t+\Delta t}=1)P(B_t=0) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=0)P(B_t=1) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=0)P(B_{t+\Delta t}=1)P(B_t=0) \\
 &+ P(A_{t+\Delta t}=1)P(B_{t+\Delta t}=0)P(B_t=0)\} \times P(A_t=0)\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

2.3 예제

이 장에서는 병렬구조인 호이스트가 4종류의 화물을 운반할 수 있고, 현재 종류 1의 화물을 운반하고 있다는 가정하에 다음 운반기간에서의 시스템 고장 확률을 계산한다. 단, 하나의 부품에서 고장이 발생하면 다른 하나의 고장확률은 2배로 증가한다.

화물의 종류와 그에 따른 부품 고장확률은 표 2와 같고, 다음 운반기간에서 각 종류의 화물을 운반하게 될 확률은 표 3과 같다.

표 2. 화물의 종류에 따른 무게와 A, B의 고장확률

종류	무게(ton)	$P(A=1)$	$P(B=1)$
1	1.0	0.001	0.003
2	8.5	0.03	0.04
3	11.0	0.1	0.2
4	15.0	0.4	0.3

표 3. $P(T_i+1|T_i)$

$T_i \backslash T_{i+1}$	1	2	3	4
1	0.5	0.3	0.2	0.0
2	0.3	0.2	0.4	0.1
3	0.1	0.2	0.5	0.2
4	0.3	0.2	0.1	0.4

표 3을 마코프체인으로 나타내면 식(7)과 같다.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccc} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{array} \right| \end{matrix} \quad (7)$$

식(2)에 의해 다음 운반기간에서의 A와 B의 고장확률은, 다음과 같이 계산된다.

$$P(A_{i+1}|T_i=1) = |0.5 \ 0.3 \ 0.2 \ 0| \times |0.001 \ 0.03 \ 0.1 \ 0.4|^T = 0.03$$

$$P(B_{i+1}|T_i=1) = |0.5 \ 0.3 \ 0.2 \ 0| \times |0.003 \ 0.04 \ 0.2 \ 0.3|^T = 0.05$$

따라서, $i+1$ 번째 운반기간에서의 시스템 고장확률은 식(3)에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$P(C_{P_{i+1}}=1|C_i=0) = (0.03 \times 0.05 \times 0.97 \times 0.95 + 0.10 \times 0.03 \times 0.95 + 0.06 \times 0.97 \times 0.05) / (1 - 0.03 \times 0.05) = 0.00713$$

또한, 시스템 고장이 관측되었을 경우에 A_i 의 고장확률은 식(4)에 의해

$$P(A_i=1|C_{i+\Delta t}=1) = (0.10 \times 0.03) / \{0.10 \times 0.03 + (0.06 \times 0.05 + 0.03 \times 0.05 \times 0.95) \times 0.97\} = 0.411$$

으로 갱신된다.

3. 결론

본 연구에서는 베이지안망을 이용하여 시간에 따라 부품의 고장확률이 변화하는 시스템의 신뢰도를 평가하였으며 상호의존적인 관계를 표현할 수 없는 베이지안망의 단점을 해결하였다. 그러나 본 방법론에서는 실제 상황을 단순화하기 위해 같은 운반기간 내에서 다른 부품의 고장이 없을 때, 부품의 고장확률은 일정하다고 가정을 하였다. 향후에는 같은 운반기간이라도 시간에 따라 부품들의 고장확률이 변화하는 상황에 관한 연구가 계속되어야 할 것이다.

참고문헌

- [1] Fu-ren Lin, Chih-hung Chiu, San-chiang Wu, "Using Bayesian Networks for Discovering Temporal-State Transition patterns in Hemodialysis", Proceedings of the 35th Hawaii International Conference on System Sciences, 1957-1964, 2002
- [2] A. Bobbio, L. Portinale, M. Minichino, E. Ciancamerla, "Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into bayesian networks", Reliability Engineering and System Safety, 71, 249-260, 2001
- [3] Sankaran Mahadevan, Ruoxue Zhang, Natasha Smith, "Bayesian networks for system reliability reassessment", Structural Safety, 23, 231-251, 2001
- [4] Pynadath, D., Wellman, M., "Accounting for Context in Plan Recognition with Application to Traffic Monitoring," Proceedings of the Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, 472-481, 1995