

## 유체 송수관에 부가질량이 미치는 효과에 대한 연구

### Effects of Attached Mass on Tube Conveying Fluid

정 구 충\* · 임 재 훈\*\* · 최 연 선\*\*\*

Goo-Choong Jung, Jae-Hoon Lim, and Yeon-Sun Choi

**Key Words** : Attached mass(부가질량), Hopf bifurcation(호프 분기), Critical flow velocity(임계 유속), Chaotic motion(혼돈 운동), Bifurcation diagram(분기 선도), Lyapunov exponent(리아프노프 지수)

#### ABSTRACT

The nonlinear dynamic characteristic of a straight tube conveying fluid with constraints and an attached mass on the tube is examined in this study. An experimental apparatus composed of an elastomer tube conveying water which has an attached mass and constraints is made and comparisons are done between the theoretical results from non-linear equation of motion of piping system and experimental results. And the results show that the tube is destabilized as the mass of the attached mass increases, and stabilized as the position of the attached mass close to the fixed end. In case of a small end-mass, the system shows rich and different types of periodic solutions. For a constant end-mass, the system undergoes a series of bifurcations after the first Hopf bifurcation, as the flow velocity increases, which causes chaotic motion of the tube eventually.

#### 1. 서 론

유체 유발 진동은 그동안 많은 연구의 주제가 되어왔다. 초기의 연구는 관 내부로 흐르는 유체에 의해 관의 동특성의 변화를 조사하는 연구가 대부분이었지만 최근에는 단순히 유체의 흐름뿐만 아니라 복잡한 조건이 더해진 시스템에 대한 연구가 수행되고 있다. 그에 더해 초기의 선형적인 안정성 평가에서 벗어나 유체 송수관의 동특성에 대한 연구는 대부분 비선형 운동방정식을 유도하거나 또한 관의 비선형 동특성에 대하여 조사하기에 이르렀다.

Paidoussis<sup>(1)</sup>는 간극이 있는 구속조건에 대한 연구를 수행하였고, Semler<sup>(2)</sup>는 유체 송수관 끝단의 질량에 의한 관의 운동에 대하여 연구하였다. 그는 부가질량에 의해 발생하는 관의 비선형 동특성, 즉, 분기현상, 주기 배가운동, 혼돈 운동 등에 대하여 조사하였다. 또한 류봉조<sup>(3)</sup>는 부가질량의 위치와 크기의 변화에 따른 파이프계의 동적 안정성에 대하여 조사하였고, 외부의 외관에 의한 파이프의 진동을 내부 유동유체의 최적 유속을 이용하여 파이프를 능동 제어

하는 기술을 실험적으로 보였다. Fricker<sup>(4)</sup>는 U형관에 2개 이상의 구속바(constraint bar)가 존재할 때 관과 구속바 사이에 발생하는 충격 효과와 그로 인해 발생하는 관의 진동 현상을 수치해석으로 조사하였다. Jin<sup>(5)</sup>은 스프링으로 지지된 관에 대하여 스프링 상수와 다른 파라미터 변화에 따른 관의 동특성의 변화에 대하여 조사하였다. Lee<sup>(6)</sup>는 양단이 지지된 유체 송수관 거동의 비선형 운동 방정식을 유도하였고, 또한 Li<sup>(7)</sup>와 Semler<sup>(8)</sup>는 각각 외팔 수직관(cantilever pipe)의 비선형 운동방정식을 유도하였다. 한편, 임재훈<sup>(9)</sup>은 관의 물성치 변화에 따른 송수관의 동특성 변화에 대하여 조사하였고, 물성치의 변화에 따른 혼돈운동의 가능성을 제시하였다. Yamashita<sup>(10)</sup>는 스프링 지지된 외팔 수직관에 대하여 관 진동의 진폭과 위상이 포함된 운동방정식으로부터 평면운동이 아닌 3차원 운동에 대한 연구를 수행하였고, 지지된 비대칭 스프링에 따른 관의 비선형 안정성과 진동특성에 대해 조사하였다.

본 연구에서는 구속바가 포함되어있고 관에 부가 집중질량이 부착되어있는 시스템에 대하여 집중질량의 위치와 질량의 변화에 따른 관의 동특성에 대하여 조사하고자 한다. 그동안 부가질량을 포함한 유체 송수관의 동특성에 대해 많은 연구가 수행되었지만 구속바가 더해진 보다 복잡한 시스템에 대한 연구는 수행되지 않았다. 이러한 시스템은 산업 현장에서도 쉽게 관찰될 수 있는 것으로써, 슬리브(sleeve)가 포함된 관의 중간에 벨브 혹은 플랜지(flange)등이 장착

\* 대림산업(주)

E-mail : gcjung@dic.co.kr  
Tel : (02) 369-4347, Fax : (02) 369-5391

\*\* 성균관대학교, 대학원

\*\*\* 성균관대학교, 기계공학부 교수

된 시스템이 그 한 예라 하겠다.

$$E \rightarrow E \left( 1 + a \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2)$$

## 2. 부가질량이 포함된 관의 운동방정식

집중질량과 구속바가 함께 포함된 관의 운동방정식을 세우기에 앞서 관 내부로 흐르는 유체의 유속은 일정하다고 가정한다. 본 연구에 사용된 시스템은 Fig. 1에서와 같이 길이  $L$ 인 외팔 수직관으로 되어 있으며  $s_a$ 와  $s_b$ 에 각각 부가질량  $M_a$ 와 구속바가 있다.

관 거동의 지배 방정식은 다음과 같다.<sup>(3, 9)</sup>

$$\begin{aligned} & [m + M + M_a \delta(s - s_a)] \ddot{y} + 2MUy'(1 + y^2) \\ & + [m + M + M_a \delta(s - s_a)] gy'(1 + \frac{1}{2} y'^2) \\ & + y' \left[ MU^2(1 + y'^2) - (1 + \frac{3}{2} y'^2) \int_s^L (m + M + M_a \delta(s - s_a)) g ds \right] \\ & + EI [y''''(1 + y'^2) + 4y'y''y'''' + y''^3] \\ & - y'' \left[ \int_s^L ((m + M + M_a \delta(s - s_a)) (\dot{y}'^2 + y'y''^2) ds) \right. \\ & \quad \left. + \int_s^L (2MUy'y' + MU^2y'y'') ds \right] \\ & + [m + M + M_a \delta(s - s_a)] \int_0^s (\dot{y}'^2 + y'y''^2) ds \\ & + k(y - 0.5(|y + y_b| - |y - y_b|)) \delta(s - s_b) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $E$ 는 관의 Young's modulus이며,  $M'$ 는 부가질량,  $y_b$ 는 관과 구속바 사이의 거리이다. 또한  $(\dot{\quad})$ 와  $(\prime)$ 는 각각 시간  $t$ , 길이  $s$ 에 대한 미분을 나타낸다.

식 (1)에서 관의 내부 소산을 다음과 같이 Kelvin-Voigt 점탄성으로 가정하면,

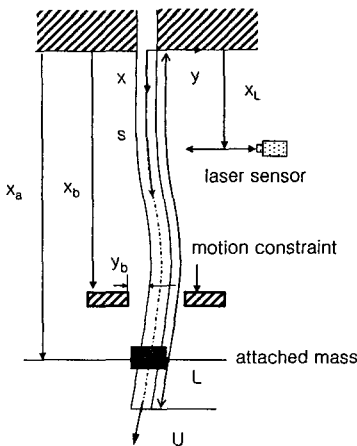


Fig. 1 Schematic of the system

식 (2)를 (1)에 대입하여 다음의 무차원 식으로 무차원화 하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{s}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \tau = \left( \frac{EI}{m + M} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2}, \alpha = \left( \frac{EI}{m + M} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \\ u &= \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \gamma = \frac{m + M}{EI} L^3 g, \beta = \frac{M}{m + M}, \\ \psi &= \frac{M_a}{(m + M)L}, \kappa = \frac{kL^3}{EI} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + [1 + \psi \delta(\xi - \xi_a)] \ddot{\eta} + 2u\sqrt{\beta} \dot{\eta}'(1 + \eta'^2) \\ & + \eta'' \left[ u^2 - \gamma \int_{\xi}^1 (1 + \psi \delta(\xi - \xi_a)) d\xi \right] \\ & + \gamma [1 + \psi \delta(\xi - \xi_a)] \eta'^3 \\ & + \left( 1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [\eta'''' \eta'^2 + 4\eta' \eta'' \eta'''' + \eta''^3] \\ & + \eta' [1 + \psi \delta(\xi - \xi_a)] \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \ddot{\eta}') d\xi \\ & - \eta'' \left[ \int_{\eta}^1 [1 + \psi \delta(\xi - \xi_a)] \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi \right. \\ & \quad \left. + \int_{\xi}^1 (2u\sqrt{\beta} \eta' \dot{\eta}' + u^2 \eta' \eta''^2) d\xi \right] \\ & + \kappa \left( \eta - \frac{1}{2} (|\eta + \eta_b| - |\eta - \eta_b|) \right) \delta(\xi - \xi_b) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, Semler<sup>(2)</sup>는  $\alpha$ 에 대한 비선형 항들을 무시하였지만,  $\alpha$ 항에 의해서 관의 혼돈운동 등의 비선형 현상들이 발생할게 될 가능성이 있으므로<sup>(9)</sup>, 본 연구에서는 이 항들을 고려하도록 한다. 식 (4)를 Galerkin 방법을 통하여 변수분리하면 식 (6)과 같다. 이때, 가정할 해는

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_i^N \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (5)$$

이며,  $\phi_i(\xi)$ 는 외팔보의 고유모드함수이다

$$\begin{aligned} & [\delta_{ij} + \psi \phi_i(\xi_b) \phi_j(\xi_b) + \gamma_{ijk} q_k q_i] \ddot{q}_j + C_{ij} \dot{q}_j + K_{ij} q_j \\ & + \alpha_{ijk} q_j q_k q_i + \beta_{ijk} q_j q_k \dot{q}_i + \gamma_{ijk} q_j q_k \dot{q}_i + a_{ijk} \dot{q}_j q_k q_i \\ & + 2a_{ijk} q_j q_k \dot{q}_i + 4b_{ijk} (\dot{q}_j q_k q_i + q_j \dot{q}_k q_i + q_j q_k \dot{q}_i) + 3c_{ijk} q_j q_k \dot{q}_i \\ & + \kappa \phi_i \left[ \sum_j \phi_j q_j - \frac{1}{2} \left( \left| \sum_j \phi_j q_j + \eta_b \right| - \left| \sum_j \phi_j q_j - \eta_b \right| \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$C_{ij} = \alpha \lambda_i^2 \delta_{ij} + 2\sqrt{\beta} u \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi,$$

$$K_{ij} = \lambda_i^4 \delta_{ij} + (u^2 - \gamma) \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi + \gamma \left( \int_0^1 \xi \phi_i \phi_j'' d\xi + \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi \right)$$

여기서,  $\delta_{ij}$ 는 Kroneker's delta이며, 또한  $\alpha_{ijkl}, \beta_{ijkl}, \gamma_{ijkl}, a_{ijkl}, b_{ijkl}, c_{ijkl}$  등은 수치적분으로 계산할 수 있다.<sup>(8)</sup> 식 (6)을 상태방정식 형태로 변환하여 수치해석을 하려면 질량행렬의 역행렬을 계산해야 한다. 만약  $\psi$ 가 충분히 작다고 하면, 즉,  $q_i q_j$ 와 같은 차수라고 가정하면, 질량행렬의 역행렬은 다음과 같다.



Fig. 2 Experimental apparatus

Table 1 Parameters of the test setup

test tube	silicon rubber
fluid	water
length of the tube, $L$ (m)	0.6
outside diameter, $d_o$ (m)	0.011
inside diameter, $d_i$ (m)	0.0076
area moment of inertia, $I$ (m <sup>4</sup> )	$5.55 \times 10^{-10}$
mass of the tube per unit length, $m$ (kg/m)	0.006247
mass of the fluid per unit length, $M$ (kg/m)	0.04527
Young's modulus, $E$ (N/m <sup>2</sup> )	$4.041 \times 10^6$
mass ratio, $\beta$	0.87874
coefficient of Kelvin-Voigt damping, $E^*$ (Ns/m <sup>2</sup> )	$0.8173 \times 10^5$
laser sensor position, $x_L$ (m)	0.0766
motion constraint position and gap between the tube and constraint, $x_b, y_b$ (m)	0.28905, 0.0155
attached mass position, $x_a$ (m)	0.6
mass of the attached mass, $M'$ (kg)	0.001, 0.002, 0.003

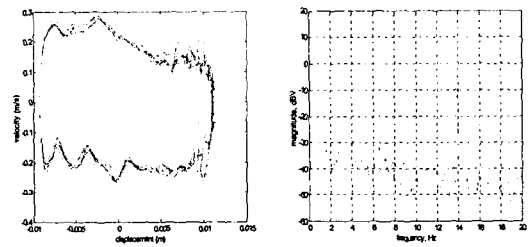
$$[\delta_{ij} + \psi\phi_i(\xi_b)\phi_j(\xi_b) + \gamma_{ijkl}q_i q_j]^{-1} \sim [\delta_{ij} - \psi\phi_i(\xi_b)\phi_j(\xi_b) - \gamma_{ijkl}q_i q_j]$$

### 3. 부가 질량의 영향

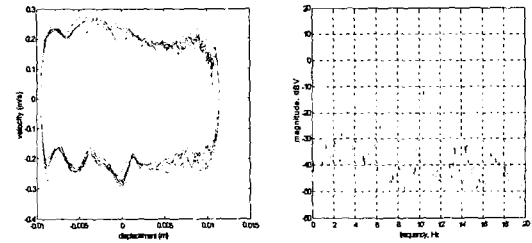
#### 3.1 관의 진동실험

본 연구에서 관의 진동현상을 실험으로 확인하기 위해 Fig. 2와 같은 실험 장치를 제작하였다. 실험 장치의 설계변수는 table 1에 명시하였다.<sup>(9)</sup> 유량의 변화를 위해 펌프에 연결된 인버터(Starvert sv-iG inverter)를 사용하여 펌프 모터 회전수를 조절하였다. 관의 진동현상은 레이저센서(Graham&White laser sensor M5L/20)로 측정하고 FFT 분석기(ONOSOKKI CF-350)로 분석하고 동시에 AD 보드(NI 707E)를 통해 변환된 데이터를 퍼스널 컴퓨터에 저장하였다.

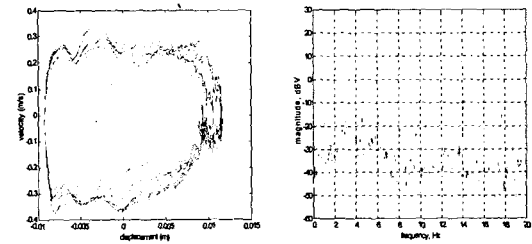
외팔 수직관의 특징은 유속이 증가함에 따라 플러터(flutter)에 의해 불안정해지는 것이다. 이것은 부가질량이 있을 때도 마찬가지로 실험을 통해 확인할 수 있으며 Fig. 3에서 보는 바와 같이 플러터가 발생하는 현상, 즉 호프 분기(Hopf bifurcation)가 발생한 후에는 위상선도에서의 거동



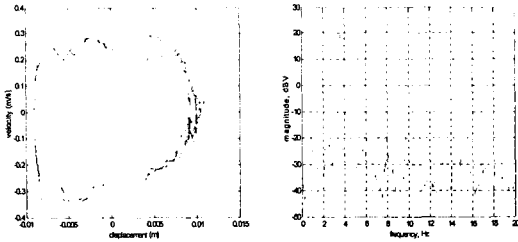
(a)  $U=5.256\text{m/s}$



(b)  $5.305\text{m/s}$

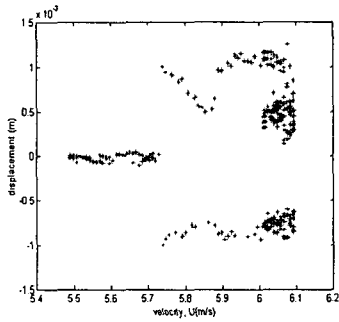


(c)  $5.466\text{m/s}$

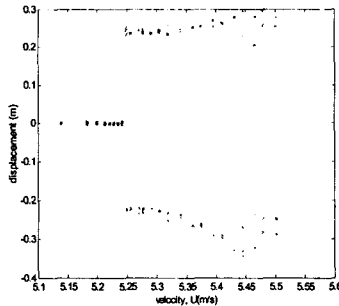


(d) 5.530m/s

Fig. 3 Phase diagrams and power spectra of the tube for  $\psi = 0.1$



(a)



(b)

Fig. 4 Bifurcation diagrams of the system; (a) without attached mass and (b) with attached mass  $\psi = 0.1$

이 한계 사이클(limit cycle)로 나타난다. 또한 Fig. 3에서 유속이 증가함에 따라 응답 스펙트럼 상에 기본주파수의 아조화(subharmonics)성분들이 나타남에 따라 위상선도에서는 2주기 이상의 거동, 즉 주기 배가 분기(period doubling bifurcation) 현상이 발생함을 알 수 있다. Fig. 4에는 부가 질량이 없을 경우와 있을 경우 각각에 대해서 관의 응답의 분기 선도를 도시하였다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 부가 질량에 의해 호프분기 유발 유속 뿐 아니라 주기배가 분기 유발 유속 또한 감소하는 것을 알 수 있다.

### 3.2 수치해석 및 비교

앞장에서 유도한 운동방정식을 수치해석하기위해 식 (6)을 식 (7)과 같이 상태 방정식 형태로 변환한다.

$$\{\dot{y}\} = [A]\{y\} + F(\{y\}) \quad (7)$$

여기서,  $\{y\} = \{q \dot{q}\}^T$ 이다. 시스템을 2차유도로 가정하여 식 (7)을 Runge-Kutta 알고리즘으로 해석을 수행하였다. 이 때 step size는 0.005로 하였고, 초기속도는 0, 변위를 0.01로, 관과 구속바와의 거리로 하여 끝단의 변위와 속도를 계산하였다.

부가질량의 위치가  $\xi_2 = 1$ 이고 질량이 각각  $\psi = 0.1, 0.2$  일 때의 결과를 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 5(a)에서는  $\psi = 0.1, U = 5.533\text{m/s}$ 일 때 호프분기 이후의 리밋 사이클을 (b)에서는 구속바에 부딪히면서 나타나는 안정한 리밋 사이클을 나타내고 (c)에서는 여러 주기의 운동을 나타낸다. 또한 Fig. 5(A), (B), (C)에서는 부가질량이 증가함에 따라 호프분기가 발생하는 임계유속이 감소함을 알 수 있으며 유속

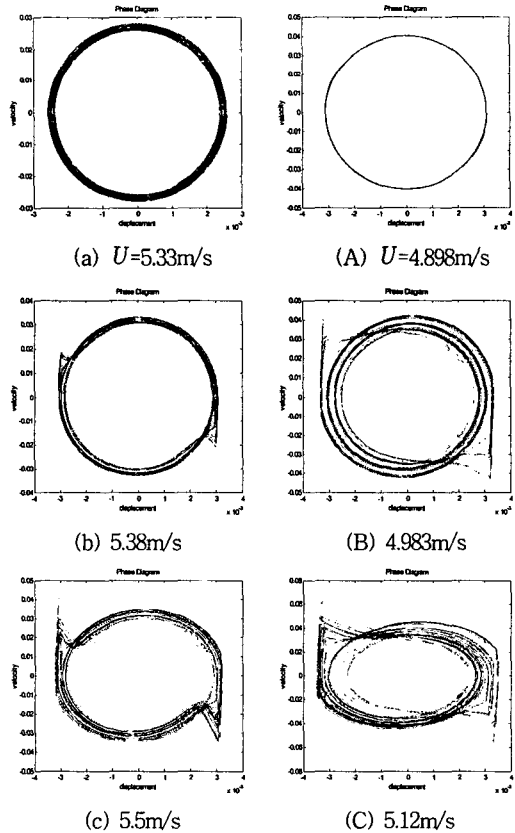


Fig. 5 Phase diagrams of the system for  $\xi_a=1$  and  $\psi=0.1$  : (a), (b) and (c),  $\psi=0.2$  : (A), (B) and (C)

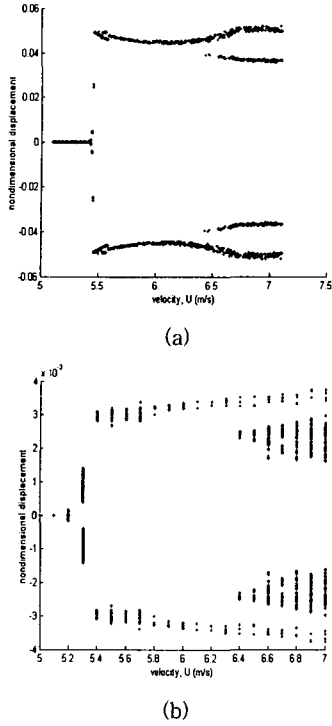


Fig. 6 Bifurcation diagrams of the system by numerical analysis; (a) without attached mass and (b) with attached mass  $\psi = 0.1$

이 증가함에 따라 주기배가분기와 혼돈운동이 발생함을 알 수 있다. 부가질량의 증가에 따른 임계유속 변화에 대해 실험 결과와 수치해석결과를 비교한 것을 table 2에 나타내었다. Table 2에서는 실험과 수치해석이 거의 일치함을 보여 준다. 따라서 끝단의 부가질량에 의해 시스템이 같은 유속에서도 더욱 불안정해지며 혼돈운동의 발생 가능성도 존재함을 알 수 있었다.

Fig. 6에서는 부가질량이 없을 때와 있을 때 각각에 대해서 수치해석을 수행하여 분기 선도를 비교 도시한 것이다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 부가 질량에 의해 임계유속이 감소하였음을 알 수 있고, 또한 보다 넓은 범위의 혼돈운동

Table 2 Comparison between experiment and theory of the flow velocity corresponding to the Hopf bifurcation

	by experiment	by theory
$\psi = 0.1$	$U_H=5.24\text{m/s}$	$U_H=5.28\text{m/s}$
$\psi = 0.2$	$U_H=4.98\text{m/s}$	$U_H=4.85\text{m/s}$
$\psi = 0.3$	$U_H=2.61\text{m/s}$	$U_H=2.45\text{m/s}$

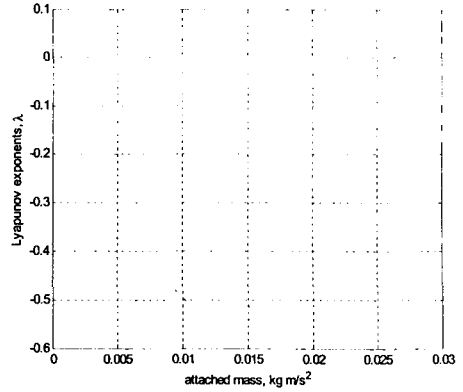


Fig. 7 Lyapunov exponents of the system for  $\xi_a = 1$ ,  $U=5\text{m/s}$

이 발생한다.

Fig. 7에는 유속,  $U=5\text{m/s}$ 일 때 부가질량의 변화에 따른 Lyapunov 지수를 계산하여 도시하였다. Fig. 7에서는 끝단의 질량이 증가함에 따라 같은 유속에서도 혼돈운동이 발생함을 알 수 있다.

### 3.3 부가질량의 위치에 의한 영향

부가질량의 위치에 의한 영향에 대해 조사하기 위해서 Fig. 5에서와 같이 부가질량이  $\psi=0.1, 0.2$ 이고,  $\xi_a=0.35$ 일 때의

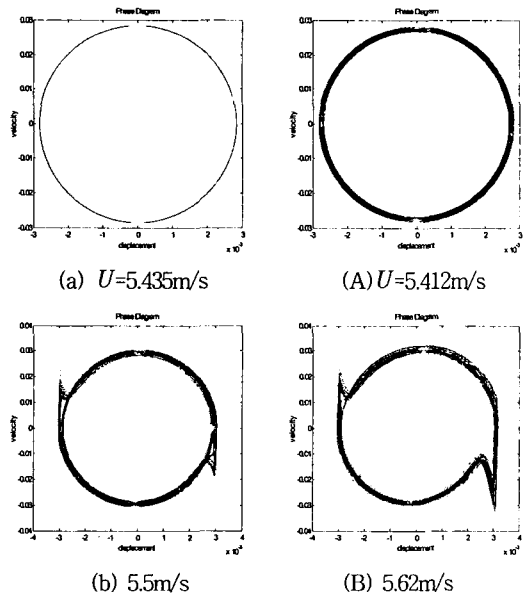


Fig. 8 Phase diagrams of the system for  $\xi_a=0.35$  and  $\psi=0.1$  : (a) and (b),  $\psi=0.2$  : (A) and (B)

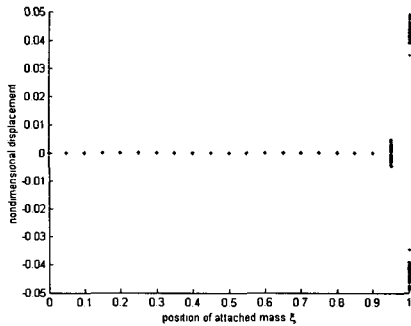


Fig. 9 Bifurcation diagram of the system for  $\psi = 0.2$

관의 거동을 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서 보는 바와 같이 부가질량의 위치가 고정단 방향으로 옮겨감에 따라 호프 분기 유발 임계유속이 증가하는 것을 확인하였다. 즉  $\psi = 0.1$ 일 때는 임계유속이 5.28m/s에서 5.43m/s로 증가하였고,  $\psi = 0.2$ 일 때는 임계유속이 4.85m/s에서 5.4m/s로 증가하였다. 또한 Fig. 9에는 질량의 크기가  $\psi = 0.2$ 이고 끝단에 있을 때 혼돈운동이 발생하였던 유속  $U = 5.12$ m/s에 대해서 질량 위치의 변화에 따른 분기 선도를 도시하였다. Fig. 9에서는 일정한 유속에 대해서 부가질량이 자유단에서 고정단으로 이동함에 따라 불안정, 즉, 혼돈운동이 발생하였던 관이 안정해 지는 것을 확인할 수 있다. 따라서, 부가질량의 위치에 따라 관의 동특성이 변하게 되며, 혼돈운동의 발생까지 방지할 수 있게 된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 부가질량이 유체 송수관의 동특성에 미치는 영향에 대해 살펴보았다. 이 연구를 위해 실험 장치를 구성하여 부가질량의 크기 변화에 대한 실험을 수행하였고 이를 모델링한 비선형 운동방정식의 수치해와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

부가질량의 크기 변화에 따라 관의 거동 현상이 바뀌게 되는데 부가질량의 위치는 일정하고 크기가 증가함에 따라 호프 분기가 발생하는 임계유속이 감소한다. 즉, 같은 유속에서도 부가질량의 크기가 커짐에 따라 안정적이던 관의 거동이 불안정해지고 또한 혼돈운동의 가능성도 커짐을 확인할 수 있었다. 부가질량의 위치에 따른 관의 동특성의 변화에 대하여도 조사한 바 질량이 일정하고 위치가 자유단에서 고정단으로 옮겨 갈수록 임계유속이 증가하며 다시 말해서 관의 거동이 더욱 안정화됨을 알 수 있었다.

따라서 부가질량의 위치와 크기에 의해 관의 동특성이 현저하게 달라질 수 있으며, 이에 설계 시 부가질량이 시스템에 미치는 영향을 고려해야 함을 알았다.

#### 참고 문헌

- (1) Paidoussis, M. P., Li, G. X., and Moon, F. C., 1989, "Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 1~19.
- (2) Paidoussis, M. P., and Semler, C., 1998, "Non-linear Dynamics of a Fluid-Conveying Cantilevered Pipe with a Small Mass Attached at the Free End," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 33, No. 1, pp. 15~32.
- (3) 류봉조, 정승호, 이종원, 2000, "유체유동에 의한 유연한 파이프의 불안정과 진동억제에 미치는 부가질량의 영향," *한국소음진동공학회지*, 제 10권, 제 2호, pp. 280~290.
- (4) Fricker, A. J., 1992, "Numerical Analysis of the Fluidelastic Vibration of a Steam Generator Tube with Loose Supports," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 6, pp. 85~107.
- (5) Jin, J. D., 1997, "Stability and Chaotic Motions of a Restrained Piped Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 208, No. 3, pp. 427~439.
- (6) Lee, S. I., and Chung, J., 2002, "New Non-linear Modelling for Vibration Analysis of a Straight Pipe Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2, pp. 313~325.
- (7) Li, G. X., and Paidoussis, M. P., 1994, "Stability, Double Degeneracy and Chaos in Cantilevered Pipes Conveying Fluid," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 83~107.
- (8) Semler, C., 1996, "Pipe Conveying Fluid: a paradigm of Nonlinear Dynamics," Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering, McGill University, Montreal, Canada.
- (9) 임재훈, 정구충, 최연선, 2003, "시스템 규명을 통한 외팔 송수관의 비선형 동적 거동 해석," *한국소음진동공학회 2003년도 춘계학술대회논문집*, pp. 495~500.
- (10) Yamashita, K., Yoshizawa, M., Agata, J., and Motoki, A., 2003, "Nonlinear Dynamics of a Pipe Conveying Pulsatile Flow (Effect of an Asymmetric Spring Supported End)," *Proceedings of DETC'03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA.*