

# 일정속도를 갖는 유체를 포함하는 곡관의 유한요소 진동해석

## Finite Element Vibration Analysis of Curved Beam Conveying Fluid of Uniform Velocity

서영수\*· 정의봉\*\*· 오준석 \*

Young Soo Seo, Weui Bong Jeong and Jun Seok Oh

**Key Words** : curved beam element (곡관 요소), straight beam element(직관 요소)

### ABSTRACT

A method for the dynamic analysis of curved beam conveying fluid presents. The dynamics of curved beam is based on inextensible theory and the fluid in curved beam has uniform velocity. The equations of motion of curved beam are decoupled by in-plane motion and out-of-plane motion. The solutions of equations are presented by a finite element method and validate by comparing the natural frequency with analytical solution, straight beam theories and Nastran. The influence of fluid velocity on the frequency response function is illustrated and discussed.

### 1. 서론

내부에 유체를 포함하는 관은 산업현장에서 다양하게 적용되고 있다. 연료를 수송하는 관, 열교환기 그리고 원자로 내의 냉각기 등 중요한 역할을 하고 있다. 따라서 이에 대한 많은 연구가 진행 되어왔다. 대부분의 경우 유체를 포함하는 관은 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli) 혹은 관이 두꺼울 경우 티모셴코(Timoshenko) 보 이론을 사용하여 연구되어졌다. 그리고 두께가 얇은 직관의 경우는 유체를 포함하는 shell 이론을 통해서도 연구되어졌다.

일반적으로 직관의 경우 내부 유체의 속도가 증가함에 따라서 관의 고유진동수가 줄어들고 위험속도에 이르면 관의 상태가 불안정 해진다.

상대적으로 유체를 포함하는 곡관에 대한 연구는 적은데 이는 형상의 복잡성이 해석을 다소 어렵게 만들기 때문이다. 곡관에 대한 해석은 Svetlitsky 이후로 Chen[1]등 많은 학자들에 의해서 연구되어 왔다. 특히 곡관에 대한 연구는 크게 두 가지로 나누어진다. 곡관의 중심길이가 변형에 따라서 변하는 경우(extensible)와 변하지 않는 경우(inextensible)이다. 곡관의 중심의 길이가 변하지 않는 경우는 두가지 변위 사이에 어떤 상관 관계가 존재하게 되어서 다소 쉽게 운동방정식을 다룰 수가 있다.

따라서 본 연구에서는 내부에 유체를 포함하는 곡관을 중심길이가 변하지 않는 이론을 사용하여

운동 방정식을 구하고 유한 요소법을 이용하여 고유진동수와 주파수 응답함수를 구한다. 곡관에서 구한 결과를 오일러-베르누이 보 이론을 적용한 직관 요소 이론[2] 등 다양한 방법을 통해서 구한 값들을 비교하여 곡관 요소 이론의 타당성을 검증한다. 또한 내부유체의 유속이 증가함에 따라서 발생하는 불안정성에 대해서도 살펴본다.

### 2. 문제의 정식화

#### 2.1 운동 방정식

유체를 포함하는 곡관의 요소를 그림 1에 나타내었다. 곡관은 단면적  $A_p$ , 단위길이당 질량  $m$ , 굽힘 강성  $EI$ , 비틀림 강성  $GJ$ , 곡률  $R_0$ 로 구성되어 있다. 이 곡관 내에 단위길이당 질량  $M$ 을 갖는 유체가 일정한 유속  $U$ 를 가진다고 가정한다. 곡관의 운동 방정식을 유도하기 위하여 곡관의 지름은 곡관의 길이와 곡률에 비해 작다고 가정하고 중력, 곡관의 감쇠 그리고 전단 효과를 무시한다.

곡관에 작용하는 힘과 모멘트의 평형 방정식을

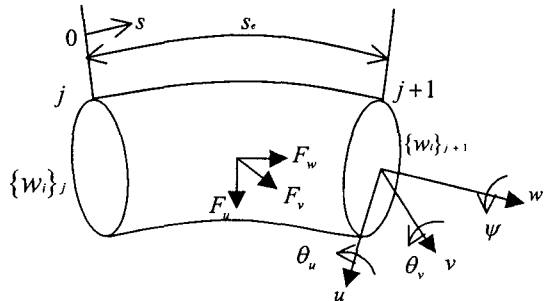


Fig. 1 Curved Beam Element

\* 부산대학교 기계설계공학과 대학원

E-mail : ysseo@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510-3087, Fax : (051) 517-3805

\*\* 부산대학교 기계공학부

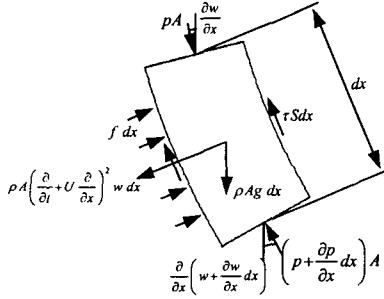


Fig 2. Fluid element

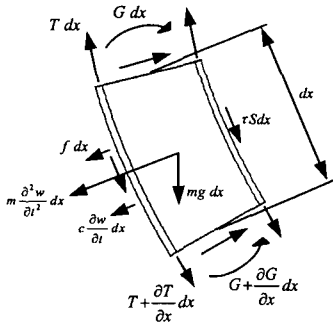


Fig 3. Pipe element

## 2.2 운동방정식

배관길이에 비해 단면적이 작은 경우에 대해서 오일러 보의 이론을 적용하고, 횡 방향 변위가 아주 작다고 가정하면 미소 변형 후  $dx$  구간에서의 유체 및 배관 요소를 Fig 2. 와 Fig 3. 에서와 같이 나타낼 수 있다.

여기서  $A$  는 배관의 내부단면적,  $S$  는 내부단면적의 원주길이,  $m$  은 배관의 단위길이당 질량,  $\rho$  는 유체의 밀도,  $p$  는 양 단면에서의 압력,  $\tau$  는 전단응력의 접선방향 성분,  $f$  는 전단응력에 의한 수직방향으로 단위길이당 작용하는 힘,  $T$  는 배관에서의 인장력,  $G$  는 배관에서의 전단력,  $c$  는 배관의 감쇠계수,  $g$  는 중력가속도를 나타낸다.

운동방정식의 유도를 위해 유체요소와 배관요소에서  $x$  및  $y$  방향 힘의 평형식을 쓰면 다음과 같다.

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - \tau S + \rho A g - f \frac{\partial w}{\partial x} = \rho A \frac{dU}{dt} \quad (1)$$

$$f - A \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \tau S \frac{\partial w}{\partial x} = \rho A \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) w \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \tau S + mg + f \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} - f + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau S \frac{\partial w}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial t} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

위 식들로부터 공통되는 부분을 소거하고 압력과 속도의 관계식을 이용하여 압력항을 속도항으로 대체한뒤 전체 운동방정식을 유도하면 다음과 같이 된다. 이때 출구에서의 압력과 인장력은 없다고 가정한다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ \rho A U^2 - \left[ (\rho A + m)g + \rho A \frac{dU}{dt} \right] (L-x) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \rho A U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho A + m)g \frac{\partial w}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (\rho A + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

## 3. 식의 무차원화 및 이산화

수식의 일반화를 위해 앞에서 유도한 운동방정식을 무차원 방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\eta'''' + \{u^2 + (\beta^{1/2} \dot{u} - \gamma)(1 - \xi)\} \eta'' + 2\beta^{1/2} u \eta' + \gamma \eta' + \sigma \eta + \dot{\eta} = 0 \quad (6)$$

이때의 무차원변수들은 다음과 같다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \left[ \frac{EI}{\rho A + m} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2}$$

$$u = \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{1/2} LU, \quad \beta = \frac{\rho A}{\rho A + m}, \quad \gamma = \frac{(\rho A + m)L^3}{EI} g$$

$$\sigma = \frac{cL^2}{[EI(\rho A + m)]^{1/2}}$$

위 운동방정식으로부터 응답을 구하기 위해 우선 무차원 변위인  $\eta$  를 Galerkin 근사에 의해 이산화된 항으로써 표현할 수 있으며 다음과 같다.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) \alpha_j(\tau) \quad (7)$$

여기서  $\phi_j(\xi)$  는 유체가 없는 상태에서 배관의 고유함수로서 양단고정 경계조건일 경우에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_j(\xi) = \cosh(\lambda_j \xi) + \cos(\lambda_j \xi) - \sigma_j (\sinh(\lambda_j \xi) + \sin(\lambda_j \xi)) \quad (8)$$

여기서  $\sigma_j$ 와  $\lambda_j$ 는 아래식으로 구할 수가 있다.

$$\sigma_j = \frac{\sinh(\lambda_j L) - \sin(\lambda_j L)}{\cosh(\lambda_j L) + \cos(\lambda_j L)} \quad (9)$$

$$\lambda_j = (2j+1) \frac{\pi}{2L} \quad (10)$$

이때,  $\lambda_j$ 는 배관의 무차원 고유치이다.

또한 조화가진항을 포함한 유체의 속도식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(\tau) = u_0 + u_1 \cos \omega \tau \quad (11)$$

여기서,  $u_0$ 는 평균 속도 성분이고  $u_1$ 은 속도진폭,  $\omega$ 는 유체 맥동 주파수,  $\tau$ 는 무차원 시간이다.

식(7)과 (11)을 운동방정식 (6)에 대입하고 전체 식에  $\phi_j(\xi)$ 를 곱한 뒤 전 구간  $[0, 1]$ 에 대하여 적분을 취하면 고유함수인  $\phi(\xi)$ 의 직교성에 의해 운동방정식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} & \ddot{\bar{\mathbf{a}}} + \{\mathbf{C} + 2\beta^{1/2}(u_0 + u_1 \cos \omega \tau)\mathbf{P}\} \dot{\bar{\mathbf{a}}} \\ & + \{\mathbf{\Lambda} + [(u_0 + u_1 \cos \omega \tau)^2 - \gamma - \beta^{1/2}u_1 \omega \sin \omega \tau]\mathbf{Q} \\ & + [\gamma + \beta^{1/2}u_1 \sin \omega \tau]\mathbf{R} + \gamma\mathbf{P}\} \bar{\mathbf{a}} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_j^4), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(\sigma)$$

이고,

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 은 각각

$$p_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi$$

$$q_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi$$

$$r_{ij} = \int_0^1 \phi_i \xi \phi_j'' d\xi$$

을 요소로 가지는 행렬로써 경계조건에 의해서 구할 수가 있다.

그리고,  $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}^T$ 는 일반좌표계로써 여기서는 N차의 모드좌표계를 나타낸다.

## 4. 수치 해석

### 4.1 안정성 해석과 시간응답

식 (12)에서 속도진폭  $u_1=0$ 이 되면 정상상태 유동에서의 배관의 진동에 대한 문제로서 식은 흔히 접하는 다음식

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (13)$$

의 형태가 되어 좌변 행렬의 고유치해석을 통해 복소고유치의 실수부가 0이 되는 임계유속값을 알 수 있고, 유속이 임계유속보다 빨라지면 배관의 좌굴현상이 관찰되는 것과 같게 된다.<sup>(2)</sup>

그러나 속도진폭  $u_1 \neq 0$ 인 유동에서는 평균유속이 임계유속에 미치지 못하여도 조화맥동의 주파수와 배관의 고유진동수의 관계에 따라 공진현상이 관찰 된다. 이는 parametric resonance 라고 알려져

져 있는 것으로 맥동주파수  $\omega$ 가  $\frac{2\omega_n}{k}$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$  근처의 특정범위내에 포함되면 공진이 발생하게 되고, 유체의 속도 및 질량등에 의해 그 범위가 결정되어 진다. 여기서  $\omega_n$ 은 배관의 고유진동수 이다.

이러한 공진에 의한 불안정영역을 판별하는 가장 쉽고 널리 알려진 방법으로 Bolotin's method<sup>(6)</sup>가 있다. 이것은 시스템이 주기적으로 변할때의 전체 해를 그 주기 T와 2T에서의 해로서 표현하는 방법으로 여기서는 맥동주파수의 k/2 배와 k 배에 대한 푸리에 급수전개로서 해를 가정하여 그 계수들에 대한 행렬식을 이용하는 방법이다. 즉, 다음식

$$\bar{\mathbf{a}} = \sum_k \left\{ \bar{\mathbf{a}}_k \sin\left(\frac{1}{2}k\omega\tau\right) + \bar{\mathbf{b}}_k \cos\left(\frac{1}{2}k\omega\tau\right) \right\} \quad (14)$$

을 식(12)에 대입하여 sin 함수와 cos 함수들의 계수들로 행렬을 구성할 수가 있고, 주어진 유체의 속도와 주파수 등의 특성에 따라 행렬식이 0이 되는 조건을 찾으면 안정영역과 불안정영역의 경계를 알 수가 있게 된다.

특히,  $k=1, 3, 5, \dots$ 일 때를 primary resonance 라 하고  $k=0, 2, 4, \dots$ 일 때를 secondary resonance 라 한다. 여기서 가장 큰 영향을 미치는  $k=1$  즉,  $\omega \approx 2\omega_n$ 일 때를 principal resonance 라 한다.

## 4. 해석결과(I)

### 4.1 해석 모델(I)

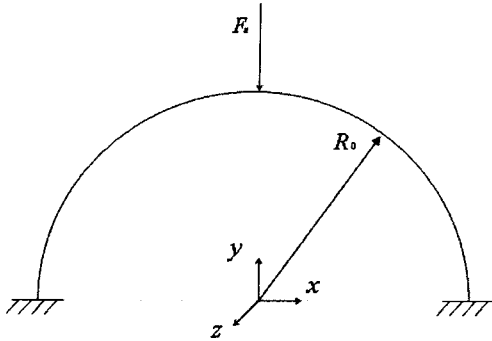


Fig.2 Analysis Model(I)

그림 2 와 같은 양단이 고정된 반원형 곡관에 대해서 해석을 수행하였다. 곡관 요소(Curved Beam Element)의 타당성을 검증하기 위하여 내부에 유체가 없을 경우 이론 해(Analytical Solution), 직관 요소(Straight Beam Element), 상용프로그램(Nastran)과 결과를 비교하였다. 해석을 위해서 사용 되어진 모델의 치수는 아래와 같다.

$$R_0 = 0.4, d_i = 0.008, d_o = 0.01$$

$$E = 2 \times 10^{11}, \rho_p = 7850, \nu = 0.3$$

### 4.2 내부 유체가 없을 경우

곡관 내에 유체가 없을 경우 각 방법으로 구한 고유진동수를 표 1 에 나타내었다. 1,3,5 차 고유진동수는 out-of-plane 변형에 해당하고 2,4,6 차 고유진동수는 in-plane 변형에 대한 결과이다. 해석적인 방법[5]의 경우는 1,2 차 모드만 나타내었다. 각 방법들이 서로 비슷한 경향을 보이고 있으나 곡관 요소를 사용한 경우가 좀더 해석적인 방법과 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 3 은 곡관에 힘이 가해질 때 주파수 응답 함수를 나타내었다. 상용 프로그램과 비교해 볼 때 서로 잘 일치하므로 곡관 요소를 사용한 방법이 타당함을 표 1 과 그림 3 을 통해서 알 수 있다.

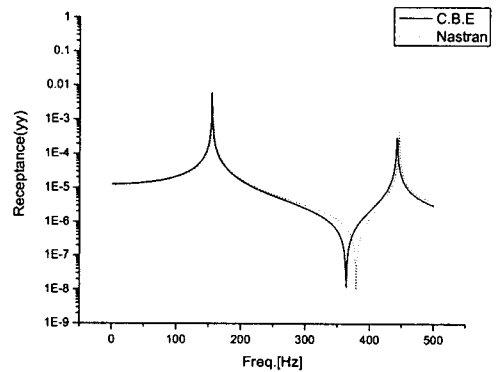
### 4.3 내부 유체가 있을 경우

표 2 는 곡관 내에 유체가 존재하는 경우 직관 요소와 곡관 요소를 비교하고 있다. 상용프로그램의 경우 직관 요소에 유체를 포함하는 경우를 해

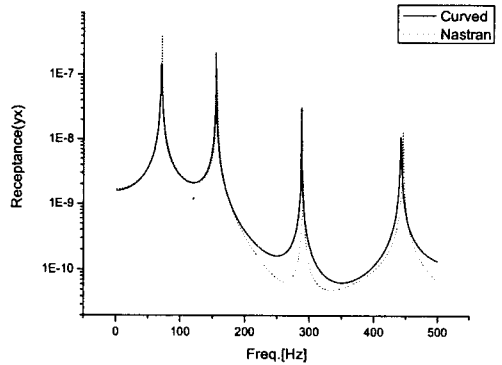
석할 수 없고 셸(Shell) 요소에만 고려할 수 있으므로 제외하였다. 고려 되어진 유체는 물이며 정지한 상태이다.

Table 1 Natural Frequency of Curved Pipe without Fluid [Hz]

	Analytical	Nastran	S.B.E	C.B.E
1 <sup>st</sup> mode	30.6	29.6	29.6	29.8
2 <sup>nd</sup> mode	70.5	71.1	71.3	70.5
3 <sup>rd</sup> mode	X	85.3	85.4	85.9
4 <sup>th</sup> mode	154.8	156.4	156.9	155.2
5 <sup>th</sup> mode	X	178.8	179.2	180.2
6 <sup>th</sup> mode	283.2	290.4	291.8	288.1



(a) Radial Direction



(b) Tangential Direction

Fig.3 Receptance of the Model(I)

Table 2 Natural Frequency of Curved Pipe Containing Fluid [Hz]

	S.B.E	C.B.E
1 <sup>st</sup> mode	26.7	26.9
2 <sup>nd</sup> mode	64.4	63.6
3 <sup>rd</sup> mode	77.4	77.6
4 <sup>th</sup> mode	141.7	140.1

5 <sup>th</sup> mode	163.9	162.7
6 <sup>th</sup> mode	263.5	260.1

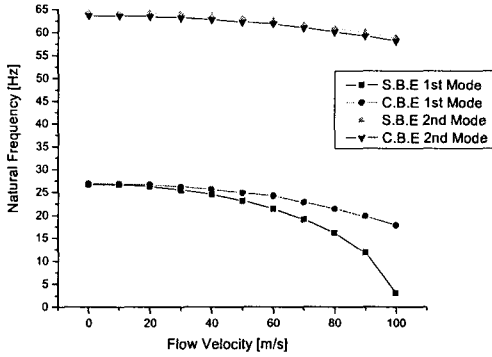


Fig. 4 Effect of Flow Velocity on Natural Frequency

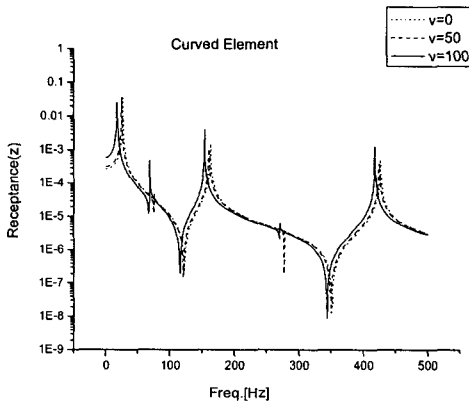


Fig. 5 Receptance of the Model(I) by Curved Beam Element

그림 4는 곡관 내부의 유체가 균일한 속도를 가지고 움직일 때 직관 요소와 곡관 요소로 구한 고유 진동수의 변화를 나타낸 그림이다. 내부 유체의 속도가 증가함에 따라서 고유 진동수가 서서히 줄어드는 것을 알 수 있다. 1차 모드의 경우 직관 요소로 구한 경우와 곡관 요소로 구한 고유 진동수의 차이가 나타나고 있음을 알 수 있다.

그림 5와 6은 두 가지 요소로 구한 주파수 응답 함수를 나타내고 있다. 속도가 증가함에 따라서 공진 점이 아래로 이동하는 것을 볼 수 있으며 직관 요소의 위험속도[4]에 부근에서는 곡관 요소로 풀어야 한다는 것을 알 수 있다.

## 5. 해석결과(II)

### 5.1 해석 모델(II)

앞에 제시한 곡관 모델과 달리 형상과 경계조건이 다른 모델에 대해서 해석을 수행하였다. 모

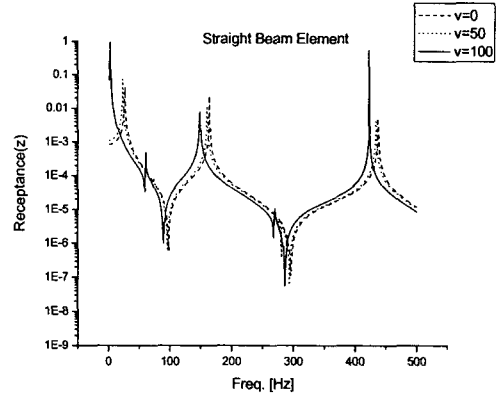


Fig. 6 Receptance of the Model(I) by Straight Beam Element

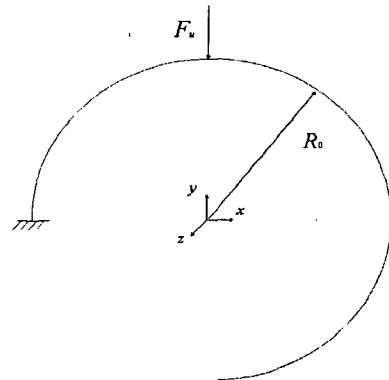


Fig. 7 Analysis Model(II)

Table 3 Natural Frequency of the Model(II)

	without Fluid [Hz]		
	Nastran	S.B.E	C.B.E
1 <sup>st</sup> mode	47.8	47.8	47.9
2 <sup>nd</sup> mode	53.5	53.5	52.8
3 <sup>rd</sup> mode	112.0	112.0	113.4
4 <sup>th</sup> mode	116.8	117.2	115.8
5 <sup>th</sup> mode	338.4	338.6	343.3
6 <sup>th</sup> mode	349.7	352.2	348.3

델의 형상은 그림 7에 나타내었다. 그리고 곡관의 치수는 아래와 같고 재질은 모델(I)과 동일하다.

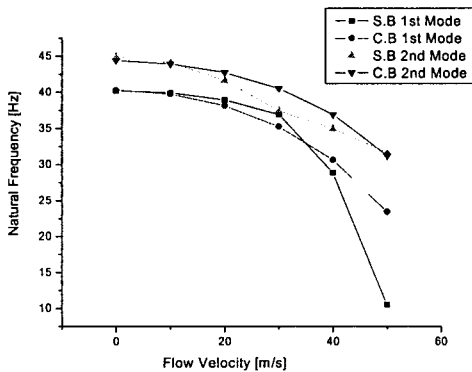
$$R_0 = 0.1, d_i = 0.007, d_o = 0.008$$

### 5.2 내부 유체가 없을 때

표 3 은 곡관 내에 유체가 없는 경우를 나타내었다. 1,3,5 차는 out-of-plane 의 결과이고 2,4,6 차는 in-plane 에 해당하는 고유 진동수이다. 세가지 모두 비슷한 경향을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

**Table 4** Natural Frequency of the Model(II) Containing Fluid [Hz]

	S.B.E	C.B.E
1 <sup>st</sup> mode	79.5	83.7
2 <sup>nd</sup> mode	86.7	85.1
3 <sup>rd</sup> mode	412.4	415.6
4 <sup>th</sup> mode	434.6	424.4
5 <sup>th</sup> mode	946.1	950.4
6 <sup>th</sup> mode	991.5	959.6



**Fig. 8** Effect of Flow Velocity on Natural Frequency

### 5.3 내부 유체가 있을 때

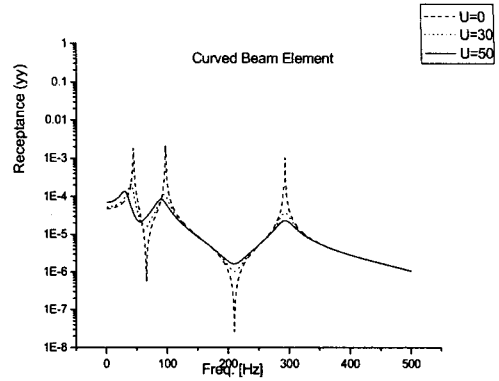
표 4 는 곡관 내에 유체(물)이 존재하는 경우에 두 가지 요소의 방정식을 통해서 구한 고유진동수의 값을 나타내고 있다. 그림 8 은 유속의 변화에 따른 각 요소로 구한 고유 진동수의 변화를 나타낸 그림이다. 1 차 모드는 직관 요소로 구한 고유진동수가 곡관 요소로 구한 고유진동수 보다 빨리 감소하고 2 차 모드의 경우는 같은 비율로 감소하는 것을 알 수 있다.

내부 유체의 속도가 증감함에 따라서 공진 점의 변화를 그림 9,10 에 나타내었다. 두 가지 이론 모두 공진 점이 아래로 이동하고 감쇠의 효과가 나타나는 것을 알 수 있다. 그리고 첫번째 모델의 결과와 직관 요소의 위험속도 부근에서는 곡관 요소로 풀어야 하는 것을 알 수 있다.

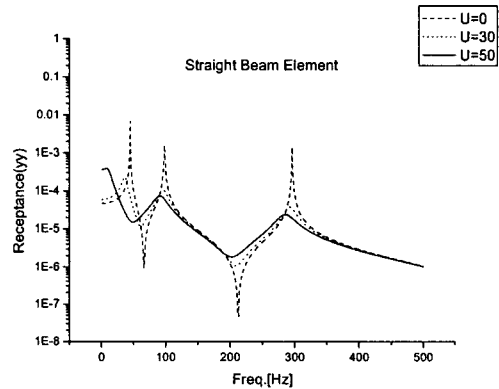
## 6. 결론

내부에 일정한 속도를 갖는 유체를 포함하는 곡관에 대한 운동방정식을 유한 요소 법을 적용하여 고

유 진동수와 주파수 응답함수를 구하였다. 기존의 직관 요소와 곡관 요소를 비교하여 곡관 요소의 우수성을 제시하였다. 유속이 증가하여 직관



**Fig. 9** Receptance of the Model(II) by Curved Beam Element



**Fig. 10** Receptance of the Model(II) by Straight Beam Element

요소의 위험 속도 부근에서는 곡관 요소의 해석이 바람직 하다는 것을 알 수 있었다. 그리고 경계조건에 따라서 감쇠의 영향이 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

## 참고 문헌

- (1) Chen, S. S., 1987, Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures, Hemisphere Publishing, Inc., New York.
- (2) 서영수 등, 2002, "맥동하는 유체를 포함하는 3 차원 배관 계의 진동 해석", 추계학술발표회 논문집, 한국소음진동공학회, pp. 933~938.
- (3) Païdoussis, M. P., 1987, Fluid-Structure Interactions, Academic Press, San Diego.
- (4) Blevins, R. D., 1990, Flow-Induced Vibration, Van Nostrand Reinhold, New York.
- (5) Blevins, R. D., 1990, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold, New York.