

변조좌표계를 이용한 비대칭/비등방 회전체의 모드 해석 Modal analysis of asymmetric/anisotropic rotor system using modulated coordinates

서정환*·홍성욱**·이증원***

Jeong-Hwan Suh, Seong-Wook Hong and Chong-Won Lee

Key Words : asymmetric rotor system(비대칭성 회전체), anisotropic stator(비등방성 정지자), modulated coordinates(변조좌표계), directional frequency response function(dFRF, 방향성주파수응답함수), modal analysis(모드해석), stability(안정성)

ABSTRACT

A new modal analysis method for rotor systems with periodically time-varying parameters is proposed. The essence of method is to introduce modulated coordinates to derive the equivalent time-invariant equation. This paper presents a modal analysis method using modulated coordinates for general rotors, of which rotating and stationary parts both possess asymmetric properties. The equation of motion with time-varying parameters is transformed to an infinite order matrix equation with the time-invariant parameters. A theory of modal analysis for the system is presented with the infinite order equation and a couple of reduced order equations. A numerical example with simple asymmetric rotor is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

1. 서론

본 연구에서는 변조복소좌표계를 활용한 비대칭 회전체의 새로운 모드해석기법을 제시하였다. 비대칭 회전체는 회전자 및 정지자 모두 비대칭성을 포함하는 것으로, 회전자에 국한되어 비대칭성이 존재하는 것과는 달리 회전좌표계에서 운동방정식을 표현할 경우 시변 운동방정식으로 기술되는 매개변수가진계(Parametrically exciting system)의 특징이 있다. 한편, 회전자의 비대칭성 및 정지자의 비등방성을 모두 고려하여 고속으로 회전하는 회전체 진동 및 동특성을 분석하는 경우, 복소좌표 및 방향성 주파수응답함수의 개념을 활용하면 여러가지 잇점이 있다. 특히, 이 때 적용되는 역방향성 주파수응답함수는 회전체의 비등방성 및 비대칭성 정도를 판별하는 주요한 인자로 활용될 수 있다 [1,2]. 비대칭 회전체의 경우 운동방정식이 정지좌표계에서 일정한 주기로 반복되는 시변계로 표시되는 반면 회전좌표계에서는 시불변계로 나타난다. 이 경우에 모드해석 기법은 이론적인 관점에서 정지자만 비대칭성을 갖는 비등방성 회전체의 모드해석과 동일한 방법론으로 귀착된다는 장

점이 있다 [1,2,3]. 그런데, 이 때 발생하는 측정상의 단점을 보완하기 위해 보다 유용한 실용적인 모드해석 및 측정기법이 변조좌표기법을 활용하여 개발되었으며 [4], 더 나아가 등가시불변계를 이용한 모드해석기법도 개발되었으나 [5] 일반 비대칭/비등방 회전체에 대해서는 적용되지 않았다.

회전자의 비대칭성 뿐만 아니라 정지자의 비등방성도 포함된 비대칭/비등방 회전체의 운동방정식 관련 모드해석 문제를 이론적으로 해결하는 한 가지 방법으로 푸리에급수 형태로 일반해를 가정하고 운동방정식을 분석하는 조화성분분석법(HBM)이 있다[6]. 이 방법론은 주기적인 시변계의 고유치를 계산하고 특정주파수 성분으로 야기된 응답을 계산하는데 유용하다. 많은 연구자들이 비대칭성/비등방성 회전체 중 특히 집중질량과 굽힘탄성으로 모형 가능한 단순 회전체에 관하여 조화성분분석법을 활용하여 해석하고 실험도 수행하였다 [7,8]. 또한, 탄성변형에 의한 고차모드를 포함하는 회전축에 대한 해석한 결과도 도출하였다 [9]. 그러나 조화성분분석법으로 모드형상 및 주파수응답함수를 비대칭/비등방 회전체에 직접 적용하여 구하기는 실험적으로나 이론적으로나 매우 복잡하고 난해하다. 일반 시변특성을 포함하는 회전체에 대한 조화성분분석법을 이용한 주파수응답함수 및 고유치 고유벡터 등에 대한 직접적인 계산법도 제시되었다 [10]. 이 방법은 플로케 이론(Floquet theory)을 기반으로, 시변고유벡터를 상정하고 모드해석을 수행하게 되어 있다. 그런데, 근본적으로 실수좌표계를 근간으로 하였기 때문에

* KAIST 대학원 기계공학과

** 금오공과대학교 기계공학과

*** 책임저자, KAIST 기계공학과

E-mail : cwlee@novic.kaist.ac.kr

Tel : (042) 869-3016, Fax : (042) 869-8220

회전체의 비대칭성 및 비등방성 정도에 진단에 유용한 방향성주파수응답함수에 관련된 해석이 어려워지는 단점이 있다. 본 논문에서는 변조복소좌표계를 이용하여 비대칭/비등방 회전체의 이론적인 모드해석기법을 제안하고 이를 활용하여 비대칭도 및 비등방도를 실험적으로 규명할 수 있는 방향성주파수응답함수 방법 등에 대하여 설명하고 예제를 통하여 개발된 이론의 효용성을 보인다.

2. 모드해석

2.1 운동방정식

복소정지좌표계를 이용하면 비대칭/비등방 회전체의 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다 [2,6].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{M}_r e^{j2\Omega t} \ddot{\mathbf{p}}(t) \\ + \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_r e^{j2\Omega t} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ + \mathbf{K}_r \mathbf{p}(t) + \mathbf{K}_b \bar{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}_r e^{j2\Omega t} \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{g}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

하첨자 $i=f$ 는 질량, 감쇠 및 강성행렬의 평균적인 값이고 $i=b, r$ 는 비등방성 및 비대칭성을 나타내는 편차의 값이다. 여기에 대응되는 무한차수의 등가운동방정식을 다음과 같이 변조복소좌표계를 이용하여 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{M}_{(\infty)} \ddot{\mathbf{p}}_{(\infty)}(t) + \mathbf{C}_{(\infty)} \dot{\mathbf{p}}_{(\infty)}(t) + \mathbf{K}_{(\infty)} \mathbf{p}_{(\infty)}(t) = \mathbf{g}_{(\infty)}(t) \quad (2)$$

변조좌표관계식은 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{p}_{i,n}(t) \equiv \mathbf{p}(t) e^{j2n\Omega t}, \quad \mathbf{g}_{i,n}(t) \equiv \mathbf{g}(t) e^{j2n\Omega t} \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{i,n}(t) \equiv \overline{\mathbf{p}(t) e^{j2n\Omega t}} = \bar{\mathbf{p}}(t) e^{-j2n\Omega t}, \quad \bar{\mathbf{g}}_{i,n}(t) \equiv \bar{\mathbf{g}}(t) e^{-j2n\Omega t}$$

등가의 무한 변위벡터와 가진벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left\{ \cdots \mathbf{p}_{-1}^T(t) \quad \bar{\mathbf{p}}_0^T(t) \quad \mathbf{p}_0^T(t) \quad \bar{\mathbf{p}}_1^T(t) \quad \cdots \right\} \\ \mathbf{g} &= \left\{ \cdots \mathbf{g}_{-1}^T(t) \quad \bar{\mathbf{g}}_0^T(t) \quad \mathbf{g}_0^T(t) \quad \bar{\mathbf{g}}_1^T(t) \quad \cdots \right\} \end{aligned}$$

그리고 부행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{C}_{i,n} = \mathbf{C}_i - j4n\Omega \mathbf{M}_i$$

$$\mathbf{K}_{i,n} = \mathbf{K}_i - j2n\Omega \mathbf{C}_i - 4n^2\Omega^2 \mathbf{M}_i$$

$$i=r, b, f, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

이 때, 등가의 무한 질량, 감쇠 및 강성행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_{(\infty)} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ * & \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_b & \bar{\mathbf{M}}_b & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_r & \mathbf{M}_r & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_b & \bar{\mathbf{M}}_b \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_r & * \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{(\infty)} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ * & \tilde{\mathbf{C}}_{r,-1} & \tilde{\mathbf{C}}_{b,-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{C}_{b,-1} & \mathbf{C}_{r,-1} & \mathbf{C}_{r,0} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{r,-1} & \tilde{\mathbf{C}}_{b,0} & \tilde{\mathbf{C}}_{b,0} & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & \mathbf{C}_{b,0} & \mathbf{C}_{r,0} & \mathbf{C}_{r,1} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{r,0} & \tilde{\mathbf{C}}_{r,1} & \tilde{\mathbf{C}}_{b,1} \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{b,1} & \mathbf{C}_{r,1} & * \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{(\infty)} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ * & \tilde{\mathbf{K}}_{r,-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{b,-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{K}_{b,-1} & \mathbf{K}_{r,-1} & \mathbf{K}_{r,0} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{r,-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{b,0} & \tilde{\mathbf{K}}_{b,0} & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b,0} & \mathbf{K}_{r,0} & \mathbf{K}_{r,1} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{r,0} & \tilde{\mathbf{K}}_{r,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{b,1} \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b,1} & \mathbf{K}_{r,1} & * \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

2.2 모드특성

식 (3)에 관련된 우측 및 좌측 잠복고유치문제(latent-value problem)는 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{(\infty)}(\lambda_{r(m)}^i) \cdot \mathbf{u}_{cr(m)}^i = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{v}}_{cr(m)}^T \cdot \mathbf{D}_{(\infty)}(\lambda_{r(m)}^i) = \mathbf{0}^T \quad (4a, b)$$

$$r = \pm 1, \pm 2, \dots, N, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = B, F.$$

이 때의 2 차 램다행렬은 다음과 같다

$$\mathbf{D}_{(\infty)}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M}_{(\infty)} + \lambda \mathbf{C}_{(\infty)} + \mathbf{K}_{(\infty)} \quad (5)$$

여기서 우/좌측 고유벡터는 다음과 같이 표기된다.

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \begin{Bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_c = \left\{ \cdots \bar{\mathbf{u}}_{-1}^T \quad \mathbf{u}_{-1}^T \quad \bar{\mathbf{u}}_0^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \bar{\mathbf{u}}_1^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \cdots \right\}^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_c = \left\{ \cdots \bar{\mathbf{v}}_{-1}^T \quad \mathbf{v}_{-1}^T \quad \bar{\mathbf{v}}_0^T \quad \mathbf{v}_0^T \quad \bar{\mathbf{v}}_1^T \quad \mathbf{v}_1^T \quad \cdots \right\}^T.$$

고유치문제의 해는 다음 형태로 상정할 수 있다.

$$\mathbf{p}_{(\infty)}(t) = \left\{ \cdots \bar{\mathbf{u}}_{-1}^T \quad \mathbf{u}_{-1}^T \quad \bar{\mathbf{u}}_0^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \bar{\mathbf{u}}_1^T \quad \mathbf{u}_1^T \quad \cdots \right\}^T e^{i\omega t}, \quad (7)$$

이 때 직교조건에서 다음 조건을 만족한다.

$$\bar{\mathbf{v}}_c^T \left[\frac{d}{d\lambda} \mathbf{D}_{(\infty)}(\lambda) \right] \mathbf{u}_c = 1 \quad (8)$$

더 나아가 각각의 고유치문제해는 다음 조건을 만족한다. 여기서 논의의 편의상, 식 (6)~(8)의 상/하첨자를 생략하였다. 식(7)에서 다음 관계식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{p}_{i,n}(t) = \mathbf{u}_{r(m);n}^i e^{\lambda_{r(m)}^i t}, \quad \bar{\mathbf{p}}_{i,n}(t) = \bar{\mathbf{u}}_{s(\ell);n}^k e^{\bar{\lambda}_{s(\ell)}^k t} = \bar{\mathbf{u}}_{r(m);n}^i e^{\lambda_{r(m)}^i t} \quad (9a)$$

이로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}}_{s(\ell);n}^k = \bar{\mathbf{u}}_{r(m);n}^i, \quad \lambda_{r(m)}^i = \bar{\lambda}_{s(\ell)}^k. \quad (9b)$$

여기서 n 은 변조좌표계의 차수를 뜻한다. 관계식 $i=k, s=-r, \ell=m$ 을 위 식 (9a)와 (9b)가 만족하

므로 고유치 $\lambda_{r(m)}^i$ 와 관련된 잠복고유벡터(latent vector), $(\bar{\mathbf{u}}_{r,n}^T, \mathbf{u}_{r,n}^T)^T$ 는 다음 관계식을 만족한다.

$$\bar{\mathbf{u}}_{-r(m);n}^i = \bar{\mathbf{u}}_{r(m);n}^i, \quad \lambda_{r(m)}^i = \bar{\lambda}_{-r(m)}^i. \quad (10)$$

한편 다음식도 만족한다.

$$\mathbf{p}_{r,n}(t) = \mathbf{p}_{r,0}(t) e^{j2n\Omega t} = \mathbf{u}_{s(t);0}^i e^{\lambda_{s(t);0}^i t} e^{j2n\Omega t} = \mathbf{u}_{r(m);n}^i e^{\lambda_{r(m)}^i t} \quad (11a)$$

이로부터 잠복고유벡터 $\mathbf{u}_{r,n}$ 및 $\mathbf{u}_{-r,0}$ 에 관한 고유치들은 다음 상관관계식을 만족한다.

$$\lambda_{r(m)}^i = \lambda_{s(l)}^i - j2m\Omega, \quad (11b)$$

$$\lambda_{-r(m)}^i = \bar{\lambda}_{r(m)}^i = \lambda_{-s(l)}^i + j2m\Omega = \overline{\lambda_{s(l)}^i - j2m\Omega}$$

방향성주파수응답행렬은 모드확장이론으로부터 다음 식과 같이 표현된다.

$$\mathbf{H}_{(\infty)}(j\omega) = \sum_{i=B,F} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-N}^N \left[\frac{\mathbf{u}_{cr(m)}^i \bar{\mathbf{v}}_{cr(m)}^{iT}}{j\omega - \lambda_{r(m)}^i} \right], \quad (12)$$

급수에서 특별히 상첨자가 붙은 것은 $r=0$ 인 경우를 제외하고 합한다는 의미이며, 기호 m 은 사용된 변조좌표계의 최대차수를 뜻한다.

3. 예제: 단순 일반회전체의 모드해석

3.1 운동방정식

비대칭관성 모멘트의 강체 디스크가 2 차 굽힘 모드로 진동하는 비대칭 굽힘강성을 갖는 유연한 축에 부착되어 있으며, 비등방성 비틀림강성을 갖는 베어링에 지지된 경우 이를 다음과 같이 모형화 가능하다 [2,4].

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + (2\zeta - j\alpha\Omega)\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{p}(t) + \Delta e^{j2\Omega t} \bar{\mathbf{p}}(t) + \delta \mathbf{p}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (13)$$

디스크의 몸체의 주축방향에 부착된 ξ 과 η 이 관성좌표계에 대하여 회전속도 Ω 로 회전하고 있다. $\mathbf{p} = \mathbf{y} + j \cdot \mathbf{z}$ 는 디스크의 복소 회전각 좌표, $\mathbf{g} = \mathbf{f}_y + j \cdot \mathbf{f}_z$ 는 각각 및 회전우력이다. Δ 와 δ 는 축굽힘강성의 비대칭도 및 베어링강성계수의 비등방성도이다. $\alpha = J_p/J_t$ 는 디스크의 자이로효과 관련 형상계수이다.

3.2 고유치 수렴성의 보장

앞장에서 설명한 확장법으로 식(13)을 식(2)를 이용하여 시불변형태의 무한확장된 운동방정식으로 쓸 수 있다. 축약된 차수에서의 수렴성이 보장되는지의 여부를 이 절에서 검증한다. Table 1 은 시뮬레이션에 사용된 매개변수들을 나열하고 있다. Table 2 에서는 비대칭도 (Δ) 및 비등방도 (δ)를 0.2 로 설정하여 두 가지 효과가 뚜렷하게 포함되

도록 하였다. Table 2 에서 각 열은 축약된 시스템의 차수가 증가되면서 나타나는 고유치를 모두 표시하고 있다. 0 차 시스템은 $\bar{\mathbf{p}}_0, \mathbf{p}_0$ 관련 항들만 사용된 경우에 구성된 등가시스템이다. 시스템행렬의 크기를 하나 증가시킬 때마다 네 개의 고유치가 추가로 나타난다. 고유치의 수렴성은 비대칭도 및 비등방도에 영향을 받는다. 수치해석 결과로부터 1 차이상의 시스템에서 고유치가 급격하게 각 모드의 고유치로 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 1 차 근사시스템의 휠차트를 조화성분분석법으로 구한 것과 비교하여 Fig.1 에 도시하였다. 시스템 차수별 고유진동수의 수렴성은 Fig. 2 에서 확인 가능하다.

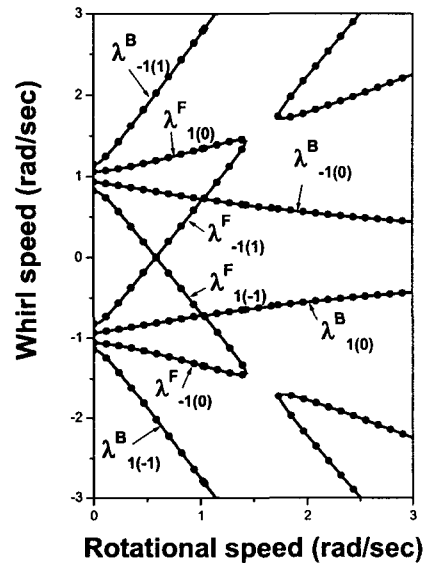


Fig. 1 Whirl chart of asymmetric rotor with anisotropic stator

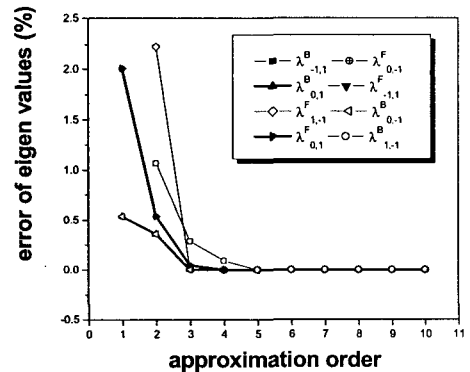


Fig. 2 Convergence of error whirl speeds vs. order of matrix size, $\Omega = 1.0$ rad/sec

3.3 축약된 시스템의 모드해석

-1 차 근사식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}_{(-1)}\ddot{\mathbf{p}}_{(-1)}(t) + \mathbf{C}_{(-1)}\dot{\mathbf{p}}_{(-1)}(t) + \mathbf{K}_{(-1)}\mathbf{p}_{(-1)}(t) = \mathbf{g}_{(-1)}(t) \quad (14)$$

여기서 변위 및 가진벡터 및 질량, 감쇠 및 강성 행렬은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_{(1)} &= \{\mathbf{p}_{-1}^T(t) \quad \mathbf{p}_0^T(t) \quad \mathbf{p}_{-1}^T(t)\}^T, \\ \tilde{\mathbf{g}}_{(1)} &= \{\mathbf{g}_{-1}^T(t) \quad \mathbf{g}_0^T(t) \quad \mathbf{g}_{-1}^T(t)\}^T, \\ \mathbf{M}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 2\zeta - j(4-\alpha)\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta - j\alpha\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta + j\alpha\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta + j(4-\alpha)\Omega \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1-2(2-\alpha)\Omega^2 - j4\zeta & \Delta e^{j2\varphi} & 0 & 0 \\ \Delta e^{j2\varphi} & 1 & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 1 & \Delta e^{j2\varphi} \\ 0 & 0 & \Delta e^{j2\varphi} & 1-2(2-\alpha)\Omega^2 + j4\zeta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이와 관련된 잠복고유치문제(Latent value problem)는 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{(-1)}(\lambda)\mathbf{u}_c = \mathbf{0}_{(-1)}, \quad \bar{\mathbf{v}}_c^T \mathbf{D}_{(-1)}(\lambda) = \mathbf{0}_{(-1)}^T \quad (15)$$

여기서 2 차 람다행렬(Lambda matrix)은 다음식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(-1)}(\lambda) &= \lambda^2 \mathbf{M}_{(-1)} + \lambda \mathbf{C}_{(-1)} + \mathbf{K}_{(-1)} \\ &= \begin{bmatrix} b(\lambda) & \Delta \\ \Delta & \tilde{a}(\lambda) & \delta \\ & \delta & \tilde{a}(\lambda) & \Delta \\ & & \Delta & b(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 각 요소는 다음과 같다

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^2 + (2\zeta - j\alpha\Omega)\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_{1(0)}^{oF})(\lambda - \lambda_{1(0)}^{oB}) \\ b(\lambda) &= \lambda^2 + \{2\zeta + j(4-\alpha)\Omega\}\lambda + 1 - 2(2-\alpha)\Omega^2 + j4\zeta \\ &= (\lambda - \lambda_{1(-1)}^{oF})(\lambda - \lambda_{1(-1)}^{oB}) \\ \tilde{a}(\lambda) &= \lambda^2 + (2\zeta + j\alpha\Omega)\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_{-1(0)}^{oF})(\lambda - \lambda_{-1(0)}^{oB}) \\ \tilde{b}(\lambda) &= \lambda^2 + \{2\zeta - j(4-\alpha)\Omega\}\lambda + 1 - 2(2-\alpha)\Omega^2 - j4\zeta \\ &= (\lambda - \lambda_{-1(-1)}^{oF})(\lambda - \lambda_{-1(-1)}^{oB}) \end{aligned}$$

대칭 회전체의 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda_{r(m)}^{oi}, i = B, F; r = \pm 1; m = 0, -1$$

즉, $\Delta = \delta = 0$ 인 경우로, 특성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$|\mathbf{D}_{(-1)}(\lambda)| = \prod_{\substack{m=0, -1 \\ i=B, F}} (\lambda - \lambda_{1(m)}^i)(\lambda - \lambda_{-1(m)}^i), \quad (17)$$

급수형태 곱셈에서 특별히 상첨자가 붙은 것은 $r=0$ 인 경우를 제외하고 곱한다는 의미이며, 고유치와 고유벡터는 다음 관계를 만족한다

$$\lambda_{r(n)}^i = \lambda_{r(0)}^i + j2n\Omega, \quad \mathbf{u}_{0,r}^i = \bar{\mathbf{u}}_{-r(n)}^i, \quad \mathbf{v}_{r(0)}^i = \bar{\mathbf{v}}_{-r(n)}^i \quad (18a)$$

$$\lambda_{-r(n)}^i = \bar{\lambda}_{r(0)}^i + j2n\Omega, \quad \mathbf{u}_{-r(n)}^i = \bar{\mathbf{u}}_{r(n)}^i, \quad \mathbf{v}_{-r(n)}^i = \bar{\mathbf{v}}_{r(n)}^i, \quad (18b)$$

$$r = \pm 1, i = B, F, n = 0, -1$$

고유치 $\lambda_{r(n)}^i$ 에 대한 고유벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_{cr(n)}^i = \{\mathbf{u}_{-1}^T \quad \bar{\mathbf{u}}_0^T \quad \mathbf{u}_0^T \quad \bar{\mathbf{u}}_{-1}^T\}_{r(n)}^{iT}, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_{cr(n)}^i = \{\mathbf{v}_{-1}^T \quad \bar{\mathbf{v}}_0^T \quad \mathbf{v}_0^T \quad \bar{\mathbf{v}}_{-1}^T\}_{r(n)}^{iT}.$$

중요한 방향성주파수응답행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_{gp}(j\omega) = \sum_{i=B, F} \sum_{n=0, -1} \sum_{r=-1}^1 \left[\frac{\mathbf{u}_{r(n);0}^i \bar{\mathbf{v}}_{r(n);0}^{iT}}{j\omega - \lambda_{r(n)}^i} \right] \quad (20a)$$

$$\mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) = \sum_{i=B, F} \sum_{n=0, -1} \sum_{r=-1}^1 \left[\frac{\mathbf{u}_{r(n);0}^i \bar{\mathbf{v}}_{r(n);0}^{iT}}{j\omega - \lambda} \right] \quad (20b)$$

$$\mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) = \sum_{i=B, F} \sum_{n=0, -1} \sum_{r=-1}^1 \left[\frac{\mathbf{u}_{r(n);0}^i \bar{\mathbf{v}}_{r(n);-1}^{iT}}{j\omega - \lambda} \right] \quad (20c)$$

$$\mathbf{H}_{(-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \end{bmatrix}_{(-1)} \quad (21)$$

식(21)은 [2]에서 이미 제시한 방향성주파수응답 함수의 1 차 근사형태를 포함하고 있다. 실선의 사각형내의 세 개의 방향성주파수응답함수들은 각기: $\mathbf{H}_{gp}(s)$, n-dFRFs; 0 차 r-dFRFs $\mathbf{H}_{\bar{g}p}(s)$; $\mathbf{H}_{\bar{g}p}(s)$, -1 차 r-dFRFs 이다. 일반 단순회전체의 비대칭성 및 비등방성의 효과를 분석하기 위해 Table 2 의 기본 매개변수를 사용하고 Table 3 과 같이 네가지 대조군을 설정하였다. Figs. 3-6 은 네가지 종류의 방향성 주파수응답함수를 보여준다. Fig. 3 는 n-dFRF 로서 (1F,1B)의 대칭적인 특성을 갖는 모드를 명확하게 보여주고 나머지는 모드에 관련된 공진점은 잘 드러나지 않는다. n-dFRF 는 비대칭도나 비등방도에 민감하지 않다. Fig. 4 는 비등방도에 민감한 0 차 r-dFRFs 를 도시하고 있다. 여기서의 공진점의 분리는 자이로효과로 인한 것이다. Fig. 5 는 비대칭도와 민감한 -1 차 r-dFRFs 를 도시하고 있다. 비등방도에는 크게 영향 받지 않는 것을 확인 가능하다.

비대칭모드의 고유치값인, $\lambda_{1(1)}^F (= \bar{\lambda}_{1(0)}^F + j2\Omega)$, $\lambda_{-1(1)}^B (= \bar{\lambda}_{1(0)}^B + j2\Omega)$ 에 해당되는 주파수에서 -1 차

r-dFRF 상에서 비등방도의 영향이 적다.

4. 결론

본 논문에서는 복소변조좌표계를 활용하여 비대칭성 및 비등방성이 모두 포함된 회전체의 일반화된 모드해석기법을 제안하였다. 등가의 무한차수의 시불변운동방정식을 변조복소정지좌표계를 활용한 형태로 유도하였다. 제안된 방법은 모드확장이론으로 표기된 주파수 응답함수 및 관련 고유치, 고유벡터를 간단하게 구할 수 있는 기법이다. 제안된 기법의 효용성을 보이기 위해 간단한 단순회전체에서 비대칭성 및 비등방성이 존재할 경우를 예제로 수치해석 결과를 도시하고 설명하였다. 차수가 증가하더라도 고유치가 잘 수렴하며, 조화 성분분석법의 결과와도 잘 일치하는 것을 수치적으로 검증하였으며, 방향성주파수응답함수의 특징을 분석하고 정리하였다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소에서 지원하는 장기 기초 연구(TECD-413-001115) 결과의 일부로서 관계자 여러분에게 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Lee, C.W., 1993, *Vibration analysis of rotors*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (2) Joh, C.Y. and Lee, C.W., 1996, "Use of dFRFs for diagnosis of asymmetria/anisotropic properties in rotor-bearing system," *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp.64-69.
- (3) Dimentberg, F.M., 1961, *Flexural vibration of rotating shafts*, Butterworths, London.
- (4) Lee, C.W. and Kwon, K.S., 2001, "Identification of Rotating Asymmetry in Rotating Machines by Using Reverse Directional Frequency Response Functions," *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, Vol.215, Part C, 1053-1063.
- (5) Suh, J.H., Hong, S.W. and Lee, C.W. 2003, "A generalized modal analysis of asymmetrical rotor system using modulated coordinates," Inter-Noise 2003, Jeju, Korea.
- (6) Ibrahim, R.A., 1985, *Parametric Random Vibration*, Research Studies Press Ltd., Letchworth, England.
- (7) Brosens, P.J. and Crandall, S.H. 1961, "Whirling of Asymmetric rotors," *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, pp.355-362.
- (8) Yamamoto, T., 1968, "On the Unstable Vibrations of a Shaft with Unsymmetrical Stiffness Carrying Unsymmetrical Rotor," *Journal of Applied Mechanics*, pp.313-321.

- (9) Genta, G., 1988, "Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach Based on Complex Coordinates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.124(1), pp.27-53.
- (10) Iretier, H., 1999, "Mathematical Foundations of Experimental Modal Analysis in Rotor Dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.13(2), pp.183-191.

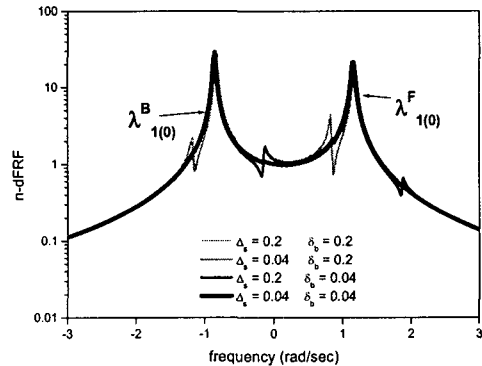


Fig. 3 Comparisons of n-dFRFs

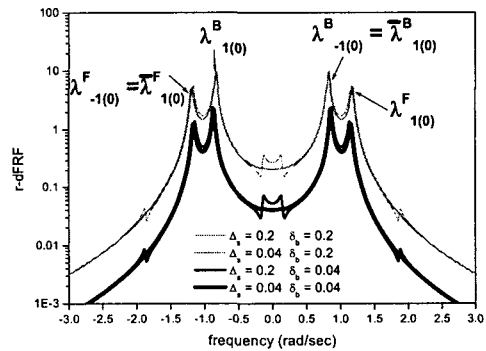


Fig. 4 Comparison of 0th order r-dFRFs

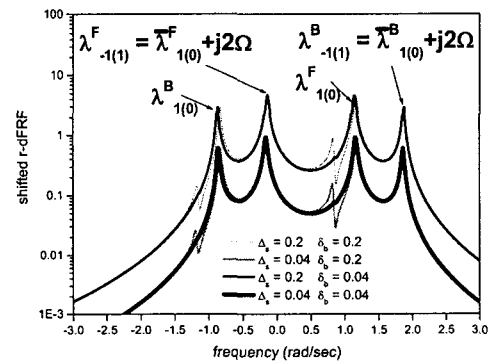


Fig. 5 Comparison of -1st order r-dFRFs

Table 1 Numerical data for the simple, analytical model						
Parameter	α	ω_0	ζ	Δ	δ	Ω
Data	0.6	1.0 rad/s	0.02	0.2	0.2	1.0 rad/s

Table 2 Comparison of eigenvalues computed by the generalized modal analysis method with the system matrix order changed

Eigenvalues						Mode	Remarks
System matrix order							
0	1	2	3	4			
				-0.0255-j5.3554	$\bar{\lambda}^F-j4\Omega$	$\lambda_{-2(-)}^F$	
				-0.0127-j3.2858	$\bar{\lambda}^B-j4\Omega$	$\lambda_{-2(-)}^B$	
			-0.0291-j2.6861	-0.0269-j2.6712	$\lambda^F-j4\Omega$	$\lambda_{-2(1)}^F$	
			-0.0143-j4.7477	-0.0146-j4.7266	$\lambda^B-j4\Omega$	$\lambda_{-2(1)}^B$	
		-0.0255-j3.3554	-0.0254-j3.3359	-0.0273-j3.3281	$\bar{\lambda}^F-j2\Omega$	$\lambda_{-1(-)}^F$	
		-0.0127-j1.2858	-0.0131-j1.2812	-0.0131-j1.2812	$\bar{\lambda}^B-j2\Omega$	$\lambda_{-1(-)}^B$	
	-0.0291-j0.6861	-0.0269-j0.6712	-0.0269-j0.6712	-0.0269-j0.6712	$\lambda^F-j2\Omega$	$\lambda_{-1(1)}^F$	
	-0.0143-j2.7477	-0.0146-j2.7266	-0.0112-j2.7162	-0.0131-j2.7187	$\lambda^B-j2\Omega$	$\lambda_{-1(1)}^B$	
-0.0255-j1.3553	-0.0254-j1.3359	-0.0273-j1.3281	-0.0269-j1.3287	-0.0269-j1.3287	λ^F	$\lambda_{0(-)}^F$	
-0.0255+j0.7226	-0.0112+j0.7161	-0.0131+j0.7187	-0.0131+j0.7187	-0.0131+j0.7187	$\bar{\lambda}^B$	$\lambda_{0(-)}^B$	
-0.0255-j0.7226	-0.0112-j0.7161	-0.0131-j0.7187	-0.0131-j0.7187	-0.0131-j0.7187	λ^B	$\lambda_{0(1)}^B$	
-0.0255+j1.3553	-0.0254+j1.3359	-0.0273+j1.3281	-0.0269+j1.3287	-0.0269+j1.3287	λ^F	$\lambda_{0(1)}^F$	
	-0.0143+j2.7477	-0.0146+j2.7266	-0.0112+j2.7162	-0.0131+j2.7187	$\bar{\lambda}^B+j2\Omega$	$\lambda_{1(-)}^B$	
	-0.0291+j0.6861	-0.0269+j0.6712	-0.0269+j0.6712	-0.0269+j0.6712	$\bar{\lambda}^F+j2\Omega$	$\lambda_{1(-)}^F$	
		-0.0127+j1.2858	-0.0131+j1.2812	-0.0131+j1.2812	$\lambda^B+j2\Omega$	$\lambda_{1(1)}^B$	
		-0.0255+j3.3554	-0.0254+j3.3359	-0.0273+j3.3281	$\lambda^F+j2\Omega$	$\lambda_{1(1)}^F$	
			-0.0143+j4.7477	-0.0146+j4.7266	$\bar{\lambda}^B+j4\Omega$	$\lambda_{2(-)}^B$	
			-0.0291+j2.6861	-0.0269+j2.6712	$\bar{\lambda}^F+j4\Omega$	$\lambda_{2(-)}^F$	
				-0.0127+j3.2858	$\lambda^B+j4\Omega$	$\lambda_{2(1)}^B$	
				-0.0255+j5.3554	$\lambda^F+j4\Omega$	$\lambda_{2(1)}^F$	

Table 3 Classification of the simulation cases with regard to the degrees of anisotropy and asymmetry

Case #	Characteristics	Parameter values	
		Δ_s (asymmetry)	δ_b (anisotropy)
1	$0 \ll \text{asymmetry} \cong \text{anisotropy} < 1$	0.2	0.2
2	$\text{asymmetry} \ll \text{anisotropy}$	0.04	0.2
3	$\text{asymmetry} \gg \text{anisotropy type}$	0.2	0.04
4	$\text{asymmetry} \cong \text{anisotropy} \cong 0$	0.04	0.04