

# 평균속도 개념을 적용한 상태공간에서의 과도동적응답 해석

## A Transient Dynamic Response Analysis in the State-Space Applying the Average Velocity

이 안성\* · 김 병옥\*\* · 김 영철\*\* · 김 영춘\*\*\*

An Sung Lee, Byung Ok Kim, Young-Cheol Kim and Yeong-Chun Kim

**Key Words** : Average velocity(평균속도), State-space vector(상태공간벡터), Transient Dynamic Response(과도동적응답) Stability(안정성), Accuracy(정확도), Newmark method(뉴마크기법)

### ABSTRACT

In this study, the state-space Newmark method based on average velocity is presented to analyse the transient dynamic response for general dynamic system. The conventional Newmark method based on average acceleration cannot be directly to the first-order state-space differential equations introducing the state-space vector. To overcome this problem, the time-step integration algorithm, based on average velocity concept, suitable for the first-order state-space differential equations is proposed. In results, the proposed method has the numerical stability and order of accuracy, which is proved analytically, equal to those of the conventional Newmark method based on average acceleration. Also, the formulation for numerical solution is very simple and the calculation time is nearly equal to that of the conventional Newmark method based on average acceleration in spite of an increase of two times over matrix size. This method will be look forward to applying the general dynamic system to calculate the transient dynamic response.

### 1. 서 론

일반적인 동적시스템의 과도응답(Transient response)을 구하기 위한 직접적분(Direct-integration)법에는 중앙차분법(Central difference method), Runge-Kutta법 등의 Explicit 법과 Newmark법, Wilson- $\theta$ 법, Houbolt법 등의 Implicit 법으로 분류할 수 있다<sup>(1-6)</sup>. Explicit법은 각 단계별 계산시간 및 메모리 공간면에서 Implicit법에 비해 장점을 가지고 있으나, 수치적 안정성(Numerical stability)을 확보하기 위해서는 미세한 시간간격  $\Delta t$ 를 설정하여야 한다<sup>(7)</sup>. 반면, Implicit법은 각 단계별 연립방정식의 해를 파악해야 되기 때문에 연산시간 및 메모리 공간면에서 Explicit법보다 불리하다. 그러나 implicit법은 어떠한  $\Delta t$ 를 설정하여도 수치적 안정성을 가지며, 적절한  $\Delta t$ 를 설정한다면 정확성도 보

장된다. 실제로 implicit법이 선호되는 이유는 시간간격  $\Delta t$ 가 정확성 보다는 수치적 안정성에 매우 제한적인 조건을 가지기 때문이다. Implicit법 중에서 가장 널리 사용되는 방법은 Newmark법으로써, 수치적 안정성이 보장되며, 2<sup>nd</sup> order의 정확성을 가진 평균가속도(Average velocity)를 기반으로 한 Newmark법이 주로 사용된다<sup>(8)</sup>.

일반적인 동적시스템은 감쇠가 관성 및 강성항에 비례하지 않는 비보존(Non-conservative)시스템이고, 특히 로터-베어링 시스템의 경우, 자이로스코픽 효과 및 베어링 감쇠와 강성의 비대칭으로 인하여 고유치(Eigenvalue)문제 및 응답 해석을 위해 상태공간 벡터(State-space vector)를 도입한 1차 상태공간 미분방정식이 주로 사용된다. 이 방정식의 동적응답을 구하기 위해 평균가속도 Newmark법을 적용할 경우, 방정식에 가속도항이 명시적으로 표현되어 있지 않아 적용할 수 없다.

따라서, 본 연구에서는 1차 상태공간 미분방정식에 적용할 수 있는 직접적분법을 제안하고자 한다. 제안된 수치기법은 평균속도(Average velocity)를 기반으로 한 수정된 Newmark법으로써 상태공간 Newmark법이라 칭하고, 2절에서는 제안된 방법으로 수치해를 구하기 위한 정식화에

\* 한국기계연구원 구조연구부 회전체그룹  
E-mail : aslee@kimm.re.kr  
Tel: (042)838-7356, Fax: (042)838-7440

\*\* 한국기계연구원 구조연구부 회전체그룹

\*\*\* 두산중공업(주) 기술연구원

대해 언급함과 동시에, 해석적인 방법을 사용하여 수치적 안정성 및 정확도 해석을 수행하여 제안된 기법의 타당성을 제시하였다. 제안된 기법은 저자가 아는 한 기존문헌에서는 찾아볼 수 없으며, 평균속도 상태공간 Newmark법은 일반적인 동적시스템의 과도응답 해석에 적용될 수 있다.

## 2. 상태공간 Newmark법

### 2.1 정식화(Formulation)

일반적인 동적시스템은 상태공간(State-space) 벡터를 이용하여 식 (1)과 같은 1차 상태공간 미분방정식으로 표현될 수 있다.

$$\{\dot{q}\} = [A]\{q\} + \{F\} \quad (1)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ 는 각각 관성, 감쇠 및 강성행렬이고,  $\{x\}$ 는 변위벡터, 상태공간 벡터는  $\{q\} = [\{\dot{x}\} \{x\}]^T$ 이며, 외력벡터 및 행렬  $[A]$ 는 각각 식 (2), (3)과 같다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} [M]^{-1}f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (3)$$

상태공간 Newmark법을 정식화하기 위하여 Fig. 1과 같이 시간간격  $\Delta t$  사이의 속도변화를 평균속도로 가정한다.

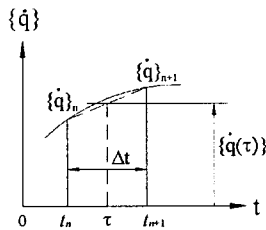


Fig. 1 State-space Newmark's constant average velocity

시간간격 내의 시간을  $\tau (0 \leq \tau \leq \Delta t)$ 로 정의하면, 평균속도는

$$\{\dot{q}(\tau)\} = \frac{1}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (4)$$

초기조건  $\tau = 0$ 에서  $\{q\}_n$ 을 고려하여 식 (4)를 적분하면 변위는 다음과 같다.

$$\{q(\tau)\} = \{q\}_n + \frac{\tau}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (5)$$

$\tau = \Delta t$ , 즉 시간  $t_{n+1}$ 에서의 변위는 식 (5)로부터

$$\{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \frac{\Delta t}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (6)$$

식 (6)으로부터 시간  $t_{n+1}$ 에서의 속도는

$$\{\dot{q}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} [\{q\}_{n+1} - \{q\}_n] - \{\dot{q}\}_n \quad (7)$$

식 (1)에 대해 시간  $t_{n+1}$ 에서의 운동방정식을 고려하고, 식 (7)을 대입하여 정리하면,

$$\{q\}_{n+1} = ([I] - \frac{\Delta t}{2} [A])^{-1} (\{q\}_n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{q}\}_n + \frac{\Delta t}{2} \{F\}_{n+1}) \quad (8)$$

시간  $t_n$ 에서의 상태값을 이용하여 식 (8)을 계산하면 시간  $t_{n+1}$ 에서의 상태값 또는 변위 및 속도벡터가 구해진다. 이 상에서 제안된 상태공간 Newmark법은 기존의 방법에 비해 정식화가 보다 간편하게 이루어지며, 프로그램 코딩이 용이하다.

### 2.2 안정성 및 정확도 해석(Stability & accuracy analysis)

여기서는 제안된 상태공간 Newmark법의 수치적 안정성 및 정확도 검증을 위하여 외력벡터를 제외한 식 (1)과 함께 검증의 편의를 위해 1 자유도계가 고려된다.

#### (1) 안정성 해석(Stability analysis)

식 (1)에서 외력벡터를 제외한 시간  $t_n$ 에서의 방정식은

$$\{\dot{q}\}_n = [A]\{q\}_n \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하고 회귀관계(Recursive relationship)를 구성하면, 시간  $t + n\Delta t$ 에서의 상태벡터는

$$\{q\}_{t+n\Delta t} = [A_m]^n \{q\}_t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

여기서, 행렬  $[A_m]$ 은 증폭행렬(Amplification matrix)로 식 (11)과 같이 얻어지며,  $w = \sqrt{k/m}$ ,  $\zeta = c/2\sqrt{km}$  이다.

$$\{A_m\} = \begin{bmatrix} \frac{4-4\zeta w\Delta t - w^2\Delta t^2}{4+4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} & -\frac{4w^2\Delta t}{4+4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} \\ \frac{4\Delta t}{4+4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} & \frac{4+4\zeta w\Delta t - w^2\Delta t^2}{4+4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (10)은 제한된 상태공간 Newmark법의 안정성 검증에 사용되는 관계식으로써, 시간이 증가함에 따라 수치적 근사해가 임의로 증폭되지 않을 조건은 증폭행렬의 스펙트럼 반경(Spectral radius)  $\rho(A_m)$ 이 1보다 작거나 같아야 한다<sup>9)</sup>. 이러한 조건이 만족되면 제한된 수치기법은 무조건적 안정성(Unconditionally stable)을 가지게 된다. Fig. 2는 동적 시스템의 주기가  $T$ 인 경우, 시간간격  $\Delta t$ 에 대한 스펙트럼 반경을 보이고 있으며, 감쇠와는 무관하게 어떠한 시간간격을 설정하더라도  $\rho(A_m)$ 이 1보다 작거나 같기 때문에 제시한 상태공간 Newmark법은 무조건적 안정성을 지닌다. 이는 기존의 평균가속도를 기반으로 한 Newmark법과 동일한 안정성 가짐을 알 수 있다<sup>2)</sup>.

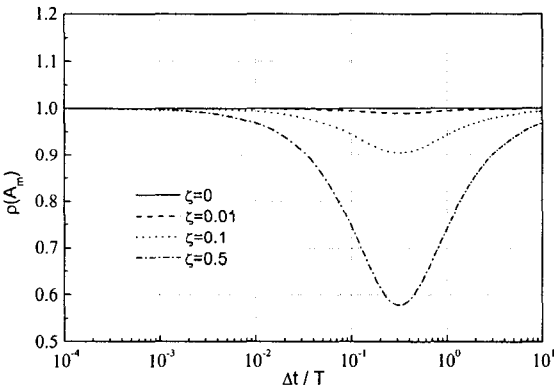


Fig. 2 Spectral radius as a function of  $\Delta t/T$  for different  $\zeta$  values

## (2) 정확도해석(Accuracy analysis)

1차 미분방정식을 차분방정식(Difference equation)으로 표현하기 위하여 시간  $t_n$ 과  $t_{n+1}$ 에서의 운동방정식을 고려하여 식 (6)에 대입한 후 정리하면, 평균속도 개념이 적용된 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} [A]\right) \{q\}_{n+1} - \left(I + \frac{\Delta t}{2} [A]\right) \{q\}_n = \{0\} \quad (12)$$

식 (12)의 해의 형태는<sup>10)</sup>

$$\{q\}_n = \{r\} e^{\lambda n \Delta t} = \{r\} \rho^n \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입한 후 정리하면 다음과 같은 고유치 문제가 된다.

$$\{A_m\} \{r\} = \rho \{r\} \quad (14)$$

식 (14)로부터 고유치와 고유벡터는 각각 다음과 같다.

$$\rho_{1,2} = \frac{4 - w^2\Delta t^2 \pm j4w\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} \quad (15)$$

$$\{r\}_{1,2} = \left\{ \frac{w(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})}{1} \right\} \quad (16)$$

여기서,  $j = \sqrt{-1}$  이다. 식 (15)와 식 (16)을 이용하면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$\{q\}_n = a_1 \{r\}_1 \rho_1^n + a_2 \{r\}_2 \rho_2^n \quad (17)$$

식 (17)에서 실수화 과정을 거치고 초기조건을 고려한 후 변위 성분  $x$ 만 추출하면

$$x_n = R^n \left( \frac{\dot{x}_0 + x_0 w \zeta}{w\sqrt{1-\zeta^2}} \sin n\phi + x_0 \cos n\phi \right) \quad (18)$$

여기서,  $R = \sqrt{\frac{4 + w^2\Delta t^2 - 4\zeta w\Delta t}{4 + w^2\Delta t^2 + 4\zeta w\Delta t}}$ ,  $\phi = \tan^{-1} \frac{4w\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}{4 - w^2\Delta t^2}$

비교를 위하여 1 자유도계의 감쇠자유진동의 변위응답 엄밀해(Exact solution)<sup>11)</sup>는

$$x(t) = e^{-\zeta w t} \left( \frac{\dot{x}_0 + x_0 \zeta w}{w\sqrt{1-\zeta^2}} \sin w_d t + x_0 \cos w_d t \right) \quad (19)$$

여기서,  $w_d = \sqrt{1-\zeta^2}$  이다.

식 (18)의 수치해와 식 (19)의 엄밀해가 유사한 형태로 표현되고 있지만, 수치적 방법에 의한 진동응답에서는 Fig. 3과 같이 주기오차(Period error) 및 진폭오차(Amplitude error)가 발생할 수 있기 때문에, 보다 정확한 수치해의 정확도는 두 해 사이의 진동주파수와 진폭을 분석함으로써 파악될 수 있다<sup>12)</sup>.

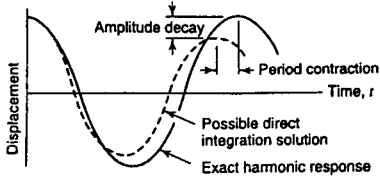


Fig. 3 Possible amplitude and period errors in State-space Newmark method

수치해의 진동주기 파악을 위해 식 (18)에서의  $\sin n\phi$ 는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\sin \frac{\phi}{\Delta t} n \Delta t = \sin w^* t^* \quad (20)$$

$$\text{여기서, } w^* = \frac{\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{4w\Delta t \sqrt{1-\zeta^2}}{4-w^2\Delta t^2}$$

식 (20)의 진동주파수  $w^*$ 를  $w\Delta t$ 에 대해 Taylor 전개를 수행하면,

$$w^* = w\sqrt{1-\zeta^2} + \frac{w^3\Delta t^2}{3} \left( \frac{3\sqrt{1-\zeta^2}}{4} + \sqrt{1-\zeta^2}(\zeta^2-1) \right) + O(w\Delta t)^4 \quad (21)$$

식 (21)의 우변 첫 번째 항은  $w_d$ 이므로 엄밀해의 진동주파수와 동일하다. 그러나 나머지 항들로 인하여 주기오차가 발생됨을 알 수 있다. 엄밀해의 주기  $T = 2\pi/w_d$ 와 수치해의 주기  $\bar{T} = 2\pi/w^*$ 사이의 주기오차는 다음과 같은 백분율로 나타낼 수 있다.

$$e_p = \frac{\bar{T} - T}{T} \times 100 \text{ [%]} \quad (22)$$

Fig. 4는  $\Delta t/T$ 에 대한 주기오차를 백분율로 나타낸 그림이다. 시스템의 주기  $T$ 가 주어져 있을 때 수치해를 구하기 위한 적당한 시간간격  $\Delta t$ 의 설정영역을 Fig. 4로부터 알 수 있다. 감쇠가 작은 경우( $\zeta = 0.01, 0.05, 0.1$ )는 주기오차가  $\Delta t/T$ 에 대해 2<sup>nd</sup> order의 오차를 가지나, 감쇠가 큰 경우( $\zeta = 0.5$ )는  $\Delta t/T$ 에 대해 4<sup>th</sup> order의 오차를 가짐을 알 수 있다. 기존의 평균가속도 Newmark법은 감쇠와는 무관하게 2<sup>nd</sup> order의 오차를 가진다<sup>(2)</sup>.

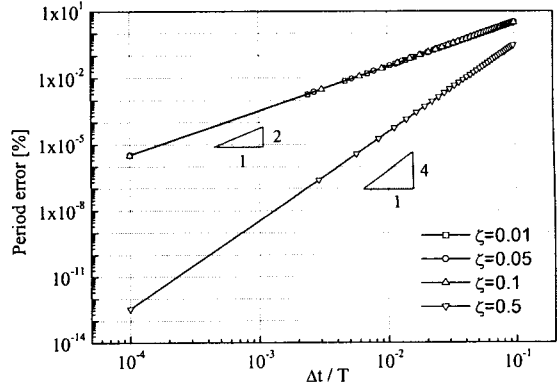


Fig. 4 Period error as a function of  $\Delta t/T$  for different  $\zeta$  values

식 (18)로부터 수치해의 진폭성분  $R^n$ 을  $w\Delta t$ 에 대해 Taylor 전개하면,

$$R^n = 1 - \zeta n(w\Delta t) + \frac{1}{2}\zeta^2 n^2(w\Delta t)^2 + \frac{1}{12}\zeta n(23) \\ (3 - 2(2 + n^2)\zeta^2)(w\Delta t)^3 + O(w\Delta t)^4$$

또한 식 (19)에서의 엄밀해 진폭성분  $e^{-\zeta wt}$ 를  $wt$ 에 대해 Taylor 전개하면,

$$e^{-\zeta wt} = 1 - \zeta(wt) + \frac{\zeta^2(wt)^2}{2} - \\ \frac{\zeta^3(wt)^3}{6} + O(wt)^4 \quad (24)$$

식 (23)의 우변 세 번째 항까지는 식 (24)의 엄밀해와 동일하나, 나머지 항들로 인하여 진폭오차가 발생됨을 알 수 있다. 특정시간  $t$ 에 대한 엄밀해의 진폭을  $q(t)$ , 동일한 시간에서 구간  $n$ 에 대한 수치적 진폭을  $q_n$ 이라 하면, 진폭오차  $e_A$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$e_A = |q_n - q(t)| \quad (25)$$

Fig. 5는  $\Delta t/T$ 에 대한 진폭오차를 나타낸 그림이다. Fig. 4와 마찬가지로 시스템의 주기  $T$ 가 주어져 있을 때 수치해를 구하기 위한 적당한 시간간격  $\Delta t$ 의 설정영역을 Fig. 5로부터 알 수 있다. 진폭오차의 경우 감쇠에 관계없이  $\Delta t$ 에 대해 2<sup>nd</sup> order의 오차를 가짐을 알 수 있으며, 기존의 평균가속도 Newmark법과 동일한 진폭오차를 가진다<sup>(2)</sup>.

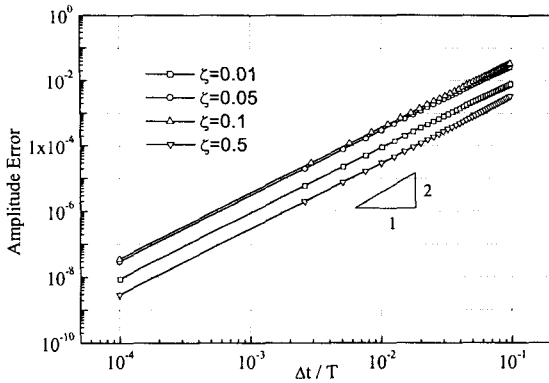


Fig. 5 Amplitude error as a function of  $\Delta t/T$  for different  $\zeta$  values

### 3. 수치 시뮬레이션(Numerical simulation)

#### 3.1.2 자유도 진동시스템

2절에서 언급한 상태공간 Newmark법의 적용을 위하여 Fig. 6과 같은 2 자유도 진동시스템을 예로 수치 시뮬레이션을 수행하였다.

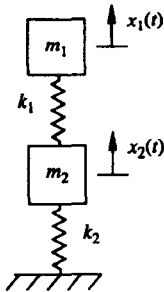


Fig. 6 Two-degree-of-freedom model

Fig. 6에서  $m_1 = 2000\text{ kg}$ ,  $m_2 = 50\text{ kg}$ ,  $k_1 = 10^3\text{ N/m}$ ,  $k_2 = 10^4\text{ N/m}$ 이고, 모달감쇠는  $\zeta_1 = 0.01$ ,  $\zeta_2 = 0.2$ , 가진력은  $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \cos 3t \end{Bmatrix} \text{ N}$ , 초기조건은  $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  이다.

상태공간 Newmark법과 Runge-Kutta법에서 공히 사용된 시간간격  $\Delta t = 0.05\text{ sec}$ 이다. Fig. 7과 8은  $m_1$ 과  $m_2$ 의 변위응답을 보이며, Fig. 7에서 상태공간 Newmark법의 경우  $m_1$ 의 변위응답이 엄밀해와 잘 일치하나, Runge-Kutta법의 경우는  $m_1$ 의 변위응답이 엄밀해와 많은 오차를 가지고 있음을 알 수 있다. Runge-Kutta법의 경우 동일수준의 정확도를 얻기 위해서는 상태공간 Newmark법 보다 미세한 시

간간격이 요구된다<sup>(13)</sup>. Fig. 8에서는 감쇠가 커서 정상상태 도달이 빠르게 진행되기 때문에 Newmark법과 Runge-Kutta법 모두 엄밀해와 잘 일치함을 보인다. 본 예제에서는 기존의 Newmark법과 상태공간 Newmark법의 수치해는 동일하고, 상태공간 Newmark법 적용 시 비록 행렬의 크기가 2배로 증가되지만 수치해를 얻기 위한 수식표현이 보다 단순화 되어 연산작업이 줄어들었기 때문에 연산시간도 기존 평균가속도 Newmark법과 거의 동일함을 Table 1.에서 보이고 있다.

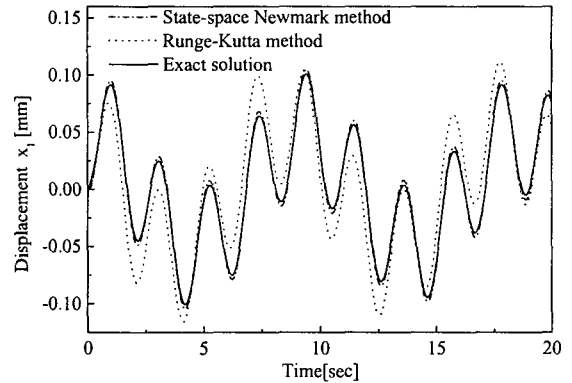


Fig. 7 Displacement of  $x_1(t)$  for  $\Delta t = 0.05\text{ sec}$

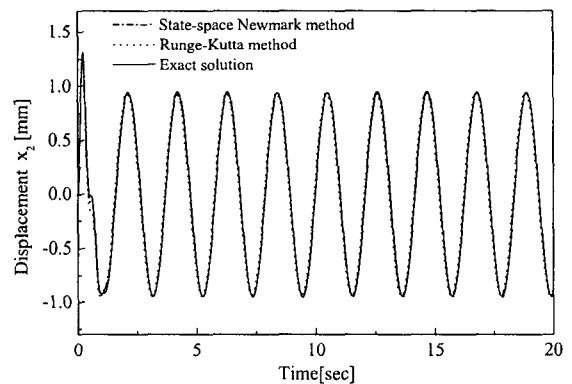


Fig. 8 Displacement of  $x_2(t)$  for  $\Delta t = 0.05\text{ sec}$

Table. 1 Comparison of calculation times [Matlab 6.5]

Method	Elapse time[sec]
Conventional	
Average Acceleration	0.0320
Newmark Method	
State-Space	0.0310
Newmark Method	

#### 4. 결론

본 연구에서는 일반적인 동적시스템 과도응답의 수치해를 구하기 위하여, 평균속도 개념을 도입한 상태공간 Newmark법을 제안하였으며, 아울러 본 기법의 안정성과 주기 및 진폭의 정확도를 해석적으로 검증하였다. 연구결과는 다음과 같다. 첫째 : 제안된 상태공간 Newmark법은 수치해를 구하기 위한 정식화가 기존 평균가속도 Newmark법에 비해 간단하고 프로그램 코딩이 용이하며, 둘째 : 수치적 안정성 및 정확성에서도 기존 평균가속도 Newmark법과 동등한 결과를 보였으며, 셋째 : 행렬의 크기가 2배로 증가됨에도 불구하고 수치해 계산을 위한 수식표현이 단순화 되어 연산시간이 기존 평균가속도 Newmark법과 거의 비슷하였다. 이상에서, 제안된 평균속도 개념을 사용한 상태공간 Newmark법은 일반적인 동적시스템의 과도응답 해석에 일반적으로 적용될 수 있다.

#### 후 기

본 연구는 한국기계연구원 기본사업 '동역학 시뮬레이션 기술개발' 과제 및 두산중공업(주) 수탁 '터빈축계 과도응답 진동해석 기술개발 및 검증시험' 과제의 지원을 받아 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

(2) Hughes, T. J. R., 1987, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

(3) Doyle, J. F., 1991, Static and Dynamic Analysis of Structures, Kluwer Academic Publisher.

(4) Humar, J. L., 1990, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

(5) Newmark, N. M., 1959, "A method of computation for structural dynamics," ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, pp. 67~94.

(6) Houbolt, J. C., 1950, "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft," Journal of Aeronautical Science, Vol. 17, pp. 540~550.

(7) Krieg, R. D., 1973, "Unconditional stability in numerical time integration methods," Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 417~421.

[8] Hughes, T. J. R., 1983, "A precis of developments in computational methods for transient analysis," Vol. 50, pp. 1033~1041.

[9] Strang, G., 1980, Linear Algebra and its Applications, Academic Press Inc.

[10] J. F. Doyle, 1991, Static and Dynamic Analysis of Structures, Kluwer Academic Publisher.

[11] D. J. Inman, 2001, Engineering Vibration, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[12] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha and R. J. Witt, 2002, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

[13] Ratan, S. and Rodriguez, J., 1992, "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using SMAC Techniques: Part 2, Numerical Study," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, No. 2, pp. 477~481.