

탄성기초위에 놓인 파이프의 고유치 분기와 플러터 모드 Eigenvalue Branches and Flutter Modes of Pipes on Elastic Foundations

류봉조* · 류시웅** · 김희중***

B. J. Ryu, S. U. Ryu and H. J. Kim

Key Words : Elastic Foundation(탄성기초), Pipe Conveying Fluid (유체 이송 파이프), Eigenvalue Branch(고유치 분기), Flutter Modes(플러터 모드)

ABSTRACT

The paper presents the relationship between the eigenvalue branches and the corresponding flutter modes of cantilevered pipes conveying fluid. The pipes are located on elastic foundations which can be regarded as a soil model. In this paper, elastic foundations are assumed as linear distributed translational springs. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the numerical scheme using finite element method is applied to obtain the discretized equations. The critical flow velocity and stability maps of the pipe are investigated according to the variation of elastic foundation parameters, mass ratios of the pipe and internal damping parameter. Also, the vibrational modes associated with flutter are shown.

1. 서 론

본 논문은 탄성기초위에 놓여있고 내부 유동유체에 의해 유체력을 받는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동 모드에 대한 연구를 보여준다. 여기서 탄성기초란 지반모델로 가정될 수 있는 병진 분포 스프링으로 가정되며, 파이프를 지지하는 탄성기초의 강성변화가 파이프의 동적안정성과 진동에 미치는 영향은 큰 것으로 알려져 왔다.

지금까지 내부 유동유체가 흐르는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동에 대한 문제는 외팔 파이프 자체뿐만 아니라 집중질량을 갖는 경우, 병진 스프링 지지된 경우, 외부 감쇠기가 부착된 경우 등 다양한 모델에 대한 연구가 이루어져 왔다⁽¹⁻⁶⁾. 특히, 스프링 지지된 경우에 있어, Becker⁽⁴⁾는 한 단고정-타단자유인 수평 외팔 파이프의 자유단만이 병진 스프링으로 지지된 경우 스프링 상수의 변화가 계의 동적안정성에 미치는 영향에 대해 연구하였고, Sugiyama⁽⁵⁾는 2자유도 분절된 수평파이프의 동적안정성에 미치는 부가 집중질량과 지지 스프링의 영향에 대하여 연구하였다. 또한,

Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽⁶⁾은 복수 탄성 스프링 지지되고 집중질량을 갖는 파이프에 대해 탄성 스프링 지지와 집중질량이 계의 동적안정성에 미치는 복합효과에 대하여 조사하였다.

그러나, 지반위에 놓인 파이프 모델과 같이 병진 분포 스프링 지지된 파이프에 대한 연구에 있어서는 단순히 임계유속 값의 산출에만 국한되어 왔던 것이 사실이다. 실제로 불안정일 때의 파이프의 모드 형상은 불안정 메카니즘의 보다 세밀한 이해나 불안정 진동을 제어하기 위해서라도 연구할 필요성이 증대되고 있다.

이러한 파이프의 불안정일 때의 모드 형상과 고유치 분기에 대한 상세한 연구가 최근 외팔 수평 파이프 자체만에 대해 연구 되어진 바 있다⁽⁷⁾.

따라서, 본 논문의 목적은 분포 스프링 지지된 외팔 파이프 내부를 유동 유체가 흐르는 경우 파이프의 임계유속을 탄성기초 파라미터의 변화와 파이프 질량비의 변화에 따라 구하고, 고유치 분기의 안정성 지도와 플러터에 따른 진동형 모드를 얻는데 있다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델

탄성기초위에 놓여있고 내부 유동유체에 의한 파이프의

* 정회원, 한밭대학교 기계공학부

E-mail : biryu701@hanbat.ac.kr

Tel : (042)821-1159, Fax: (042)821-1587

** 한밭대학교 생산기반기술연구소

*** 한밭대학교 대학원

수학적 모델은 Fig. 1과 같다. Fig. 1에서 L 은 보의 길이, EI 는 파이프의 굽힘강성, k 는 단위길이 당 분포 스프링 상수, v 는 내부 유동유체의 유속을 나타낸다.

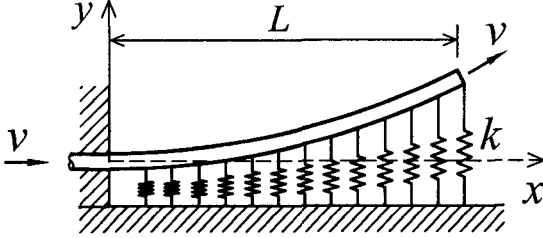


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered pipe with elastic foundations conveying fluid.

2.2 운동방정식

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위해 확장된 해밀톤 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0. \quad (1)$$

여기서, T 는 운동에너지, W_c 는 유체력의 보존성분에 의한 일, U 는 탄성 포텐셜 에너지, δW_{id} 는 내부감쇠에 의한 가상일, 그리고 δW_{nc} 는 비 보존성분에 의한 가상일을 나타낸다.

$$T = \int_0^L \left[\frac{m_p}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_f}{2} \left\{ v^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{m_f}{2} v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k y^2 dx, \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx, \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = - m_f v \left(\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} \delta y. \quad (6)$$

식 (2)에서 (6)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[(m_p + m_f) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + m_f v \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right. \right.$$

$$\left. - E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_f v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right.$$

$$\left. + m_f v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - k y \delta y \right] dx dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[m_f v \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\}_{x=L} \delta y \right] dt = 0 \quad (7)$$

계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화 된 좌표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \quad \kappa = \frac{kL^4}{EI},$$

$$\beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \quad u = vL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}. \quad (8)$$

식 (8)에서 ξ 와 η 는 각각 무차원화 된 x 와 y 의 좌표를 나타내고, τ 와 κ 는 각각 무차원화 된 시간과 탄성기초 파라미터를 나타낸다. 또한, β 는 파이프의 질량비, γ 는 내부감쇠 파라미터, u 는 무차원화 된 유속을 나타낸다.

식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left[\eta_t \delta \eta_t + \beta \frac{1}{2} u (\eta_t \delta \eta_t + \eta_\xi \delta \eta_\xi) + u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi \right.$$

$$\left. - \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - \gamma \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - K \eta \delta \eta \right] d\xi dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[\beta \frac{1}{2} u \eta_t \delta \eta_t - u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi \right]_{\xi=1} dt = 0. \quad (9)$$

2.3 유한요소법의 적용

식 (9)의 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하며, 외팔 파이프를 N 개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

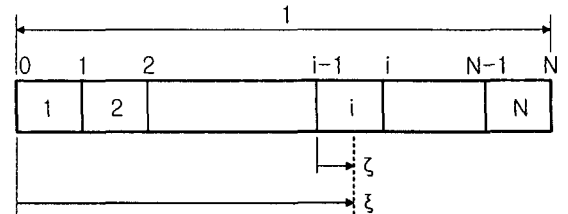


Fig. 2 Finite element model of the pipe.

Fig. 2의 국부좌표 ($\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 이산화 된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[\sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^1 \eta_r^{(i)} \delta \eta_r^{(i)} + \beta^{\frac{1}{2}} u N (\eta_r^{(i)} \delta \eta_r^{(i)} + u^2 N^2 \eta_r^{(i)} \delta \eta_r^{(i)} - N^4 \eta_{rr}^{(i)} \delta \eta_{rr}^{(i)} - \gamma N^4 \eta_{rr}^{(i)} \delta \eta_{rr}^{(i)}) d\xi - \{K \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \beta^{\frac{1}{2}} u n \eta_r^{(N)} \delta \eta^{(N)} + u^2 N^2 \eta_r^{(N)} \delta \eta^{(N)}\}_{\xi=1} \right\} \right] d\tau = 0 \quad (10)$$

이제 변위함수 $\eta^{(i)}(\xi, \tau) = \{e^{i(\xi)}\} \cdot \{v^{(i)}(\tau)\}$ 를 도입하여 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻는다.

$$[M]\{v_{rr}\} + [C]\{v_r\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (11)$$

여기서 $[M]$ 은 조합 질량행렬, $[C]$ 는 조합 감쇠행렬, $[K]$ 는 조합 강성행렬을 나타낸다.

2.4 안정성과 불안정 모드형상

식 (11)에 있어서 변위벡터 $\{v(\tau)\}$ 를 식 (12)와 같이

$$\{v(\tau)\} = \{X\} \exp(\lambda\tau), \quad (12)$$

가정하면 식 (11)은 식 (13)의 표준 고유치문제라 된다.

$$\lambda [J]\{Z\} = [A]\{Z\}, \quad (13)$$

여기서, $\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{W\} \end{Bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \{0\} & \{I\} \\ \{-M^{-1}K\} & \{-M^{-1}C\} \end{bmatrix}$

계의 안정성은 특성근 ($\lambda = \sigma \pm i\omega$)의 실수부분인 σ 의 부호에 의해 판별된다.

즉, $\sigma > 0$ 일 때, 계는 불안정하게 되고, $\sigma < 0$ 일 때 계는 안정하게 된다. 따라서, $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건으로 이 때의 유속이 임계유속 (u_{cr}) 이 된다.

플러터가 발생하는 임계유속 ($u_{cr} = u_*$)에서 고유벡터 $\{X\}$ 에 의해서 다음 식의 횡방향의 변위 $\{V(\tau)\}$ 를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

$$\{V(\tau)\} = \{ \{X_i\} \cos(\omega_* \tau + \phi_i) \}, \quad (14)$$

여기서, 위상각 ϕ_i 는 다음과 같다.

$$\tan \phi_i = \text{Im}\{X_i\} / \text{Re}\{X_i\}. \quad (15)$$

3. 수치해석결과 및 고찰

3.1 임계유속 값

탄성기초를 갖고 내부 유동유체에 의해 운동하는 파이프의 동적안정성과 진동에 관한 연구 결과들의 그래프는 탄성기초 파라미터의 변화, 파이프의 질량비 변화, 내부 감쇠 파라미터의 변화에 따라 얻어졌다.

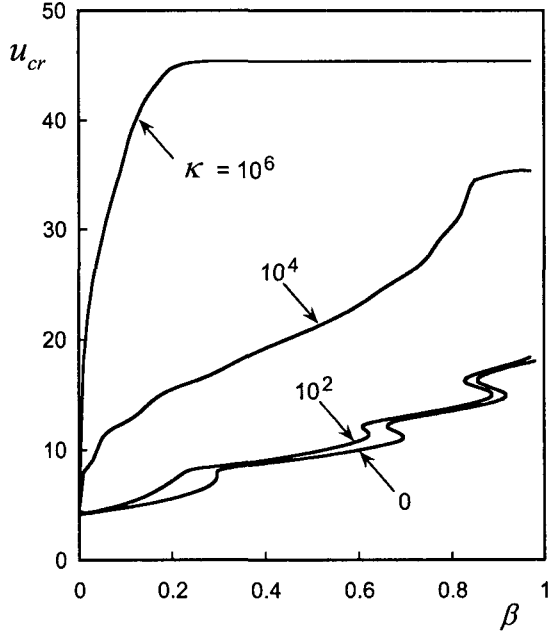


Fig. 3 Critical flow velocity depending on the mass ratio of the pipe and elastic foundation parameter. ($\gamma=0.0$)

Fig. 3과 Fig. 4는 각각 내부 감쇠가 없는 경우($\gamma=0.0$)와 있는 경우($\gamma=0.001$)에 대해 탄성기초 파라미터 κ 값과 파이프의 질량비 β 값의 변화에 따른 임계 유속 값을 나타낸 그림들이다. 이 그림들에서 알 수 있는 것은 파이프의 질량비의 변화나 내부감쇠에 관계없이 탄성기초 파라미터 값이 증가되면 임계 유속 값은 증가된다는 것이다. 이는 탄성기초의 강성의 증가는 파이프를 안정화 시키는 역할을 할 수 있다는 것이다.

Fig. 5는 탄성기초 파라미터 κ 값이 $\kappa=100$ 과 $\kappa=1000$ 에 대해 파이프의 질량비 β 의 변화와 내부감쇠 파라미터 값 γ 의 변화에 따라 임계 유속 값을 얻은 그림이다. 여기에서 알 수 있는 것은 첫째, 파이프의 질량비 β 값이 대략 $\beta > 0.6$ 부분에서는 내부 감쇠의 존재는 내부감쇠가 없는 경우에 비해 임계유속 값을 감소시킨다는 것이고, 둘째, β 가 0.6보다 작은 부분에서는 내부감쇠가 임계유속 값의 변화에 미치는 영향은 거의 없다는 것이다. κ 가 100이하인 경우에 있어서도 저자들이 조사한 바에 의하면 이와 유사한 경향이 나타났다.

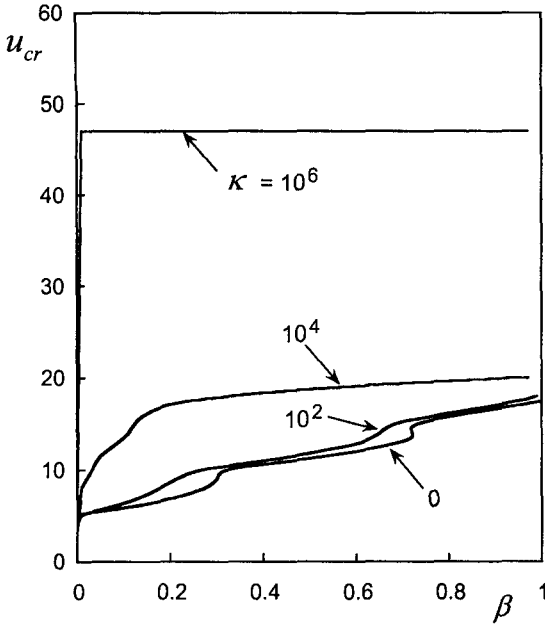


Fig. 4 Critical flow velocity depending on the mass ratio of the pipe and elastic foundation parameter. ($\gamma=0.001$)

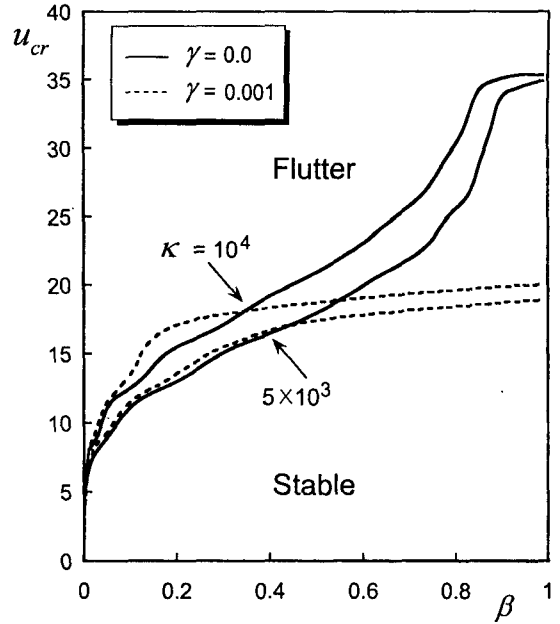


Fig. 6 Effect of internal damping on the critical flow velocity for $\kappa=5000$ and $\kappa=10000$.

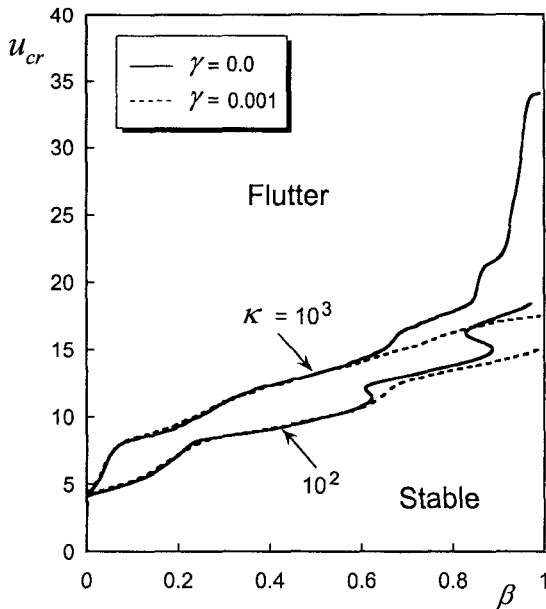


Fig. 5 Effect of internal damping on the critical flow velocity for $\kappa=100$ and $\kappa=1000$.

Fig. 6은 탄성기초 파라미터 κ 값이 $\kappa=5000$ 과 $\kappa=10000$ 에 대해 파이프의 질량비 β 와 내부감쇠 파라미터 값 γ 의 변화에 따라 임계 유속 값을 얻은 그림이다.

이 그림에서는 Fig. 5와는 달리 파이프의 질량비 β 값이 대략 0.4부근 이하에서는 파이프의 내부 감쇠의 존재는 파이프를 더 안정화시키는 역할을 한다는 것이다. 그러나, 파이프의 질량비 β 가 0.4부근 이상에서는 내부감쇠의 존재가 오히려 파이프를 불안정하게 함을 알 수 있다.

따라서, 탄성기초위에 놓인 내부 유동유체를 갖는 파이프의 동적안정성 해석에 있어 내부감쇠의 존재와 파이프의 질량비의 적절한 조합으로 파이프의 최대 안정성을 기할 수 있을 것으로 사료된다.

3.2 고유치 분기

Fig. 7은 내부감쇠가 있는 없고, 탄성기초 파라미터 κ 값이 $\kappa=100$ 인 경우, 파이프의 질량비 β 값의 변화에 따른 고유치 분기와 준 모드(quasi-mode)의 변화를 보여준다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 첫째, 플러터를 유발하는 고유치 분기에 있어, 2차에서 3차로의 천이는 파이프의 임계질량비 $\beta_{cr}=0.302$ 이며, 3차에서 1차로의 천이는 $\beta_{cr}=0.585$ 에서 이다. 또한, 진동형 모드에 있어서는 준 2차에서 준 3차로, 준 3차에서 준 4차로, 준 4차에서 준 5차로의 천이를 나타내는 파이프의 임계질량비는 각각 $\beta_{cr}=0.215, 0.622, 0.888$ 임을 알 수 있다.

Fig. 8은 내부감쇠가 있고, 탄성기초 파라미터 κ 값이 $\kappa=100$ 인 경우, 파이프의 질량비 β 값의 변화에 따른 고유치

분기와 준 모드(quasi-mode)의 변화를 보여준다.

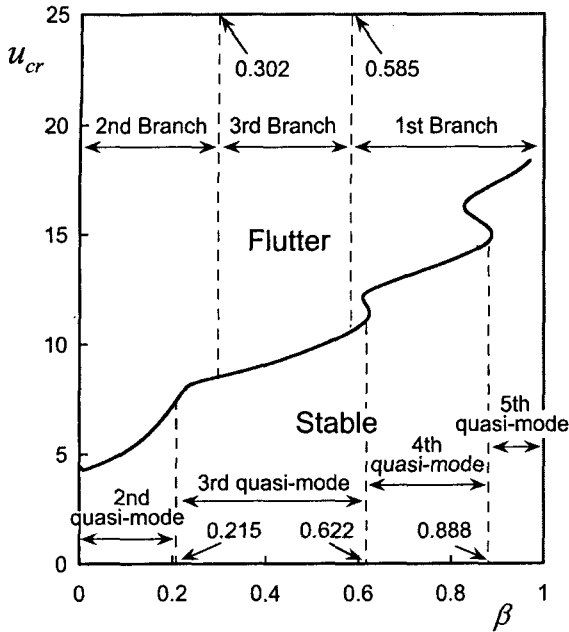


Fig. 7 Eigenvalue branches and quasi-modes depending on the mass ratios of the pipe for $\gamma=0.0$, $\kappa=100$.

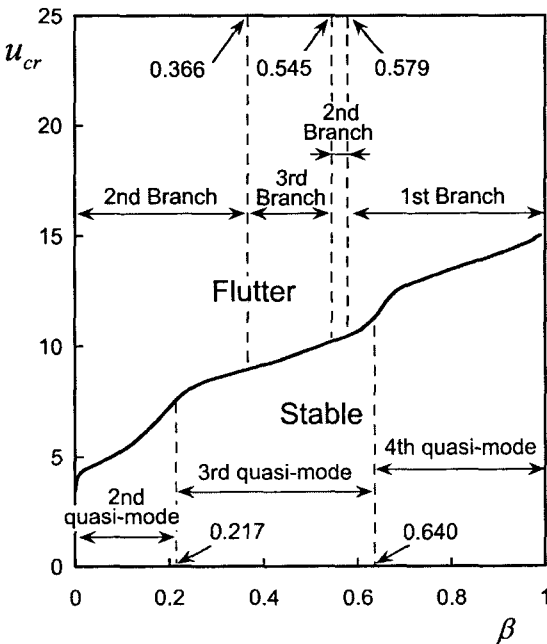
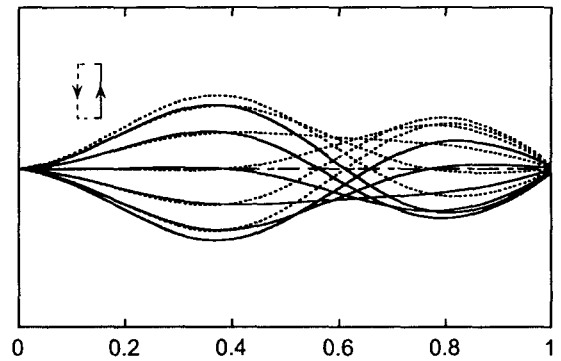


Fig. 8 Eigenvalue branches and quasi-modes depending on the mass ratios of the pipe for $\gamma=0.001$, $\kappa=100$.

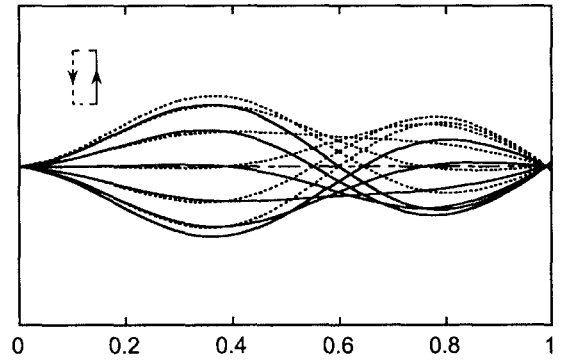
여기서 알 수 있는 것은 첫째, 플러터를 유발하는 고유치 분기에 있어, 2차에서 3차로의 천이는 파이프의 임계질량비 $\beta_{cr}=0.366$ 이며, 3차에서 다시 2차로의 천이는 $\beta_{cr}=0.545$ 이며, 2차에서 1차로의 천이는 $\beta_{cr}=0.579$ 이다. 한편, 진동형 모드에 있어서는 준 2차에서 준 3차로, 준 3차에서 준 4차로의 천이를 나타내는 파이프의 임계질량비는 각각 $\beta_{cr}=0.217$, 0.640 임을 알 수 있다.

3.3 불안정 모드형상

Fig. 9는 내부감쇠가 없는 경우, 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림으로 각각 1/12의 주기로 최대 진폭이 파이프 전체길이의 1/10에 해당된다. Fig.9(a)는 β 가 0.214일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 하나의 이동절점(moving node)을 가지며 준(quasi) 2차 모드 형이다. Fig. 9(b)는 β 가 0.215일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 두개의 이동절점을 가진 준 3차 모드 형이다.



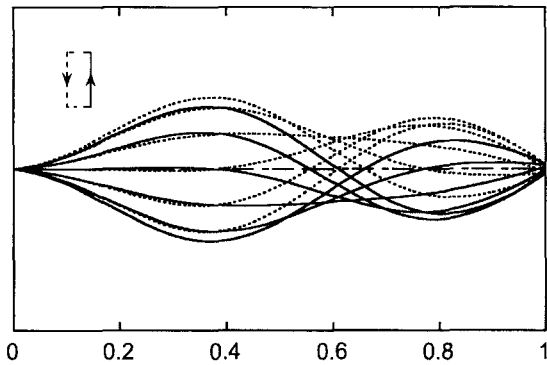
(a) $\beta=0.214$



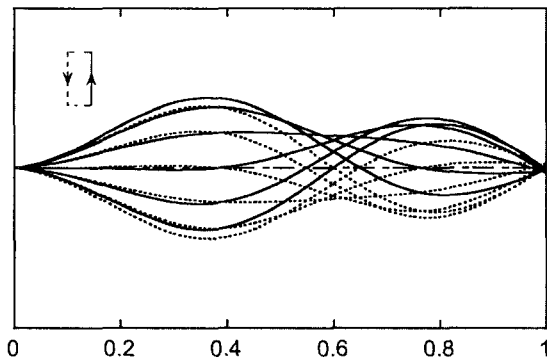
(b) $\beta=0.215$

Fig. 9 Unstable mode configurations for $\gamma=0.0$, $\kappa=100$.

Fig. 10은 내부감쇠가 있는 경우, 불안정에 관계하는 진동 모드 형상을 나타낸 그림이다. 먼저, Fig. 10(a)의 경우 β 가 0.216일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 Fig. 9(a)와 마찬가지로 1개의 이동절점을 가진 준 2차 모드 형상을 알 수 있고, Fig. 10(b)는 β 가 0.217일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 Fig. 9(b)와 마찬가지로 2개의 이동절점을 가진 준 3차 모드 형상을 알 수 있다. 또한, Fig. 9나 Fig. 10 모두 필터에 관계하는 고유치 분기와 준 모드 사이의 관계는 파이프의 질량비에 대해 서로 일치하지 않음을 알 수 있다.



(a) $\beta=0.216$



(b) $\beta=0.217$

Fig. 10 Unstable mode configurations for $\gamma=0.001$, $\kappa=100$.

4. 결론

본 논문에서는 탄성기초위에 놓여있고, 내부 유동유체의 흐름을 받는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동에 관한 연구를 파이프의 필터에 관계하는 고유치 분기와 불안정 모드를 중심으로 상세하게 고찰하였으며, 그 결과 다음과 같은

결론을 얻었다.

첫째, 내부감쇠의 존재여부에 관계없이 탄성기초 파라미터 κ 값이 증가함에 따라 임계유속 값은 증가한다.

둘째, 탄성기초 파라미터 κ 값이 대략 $\kappa \leq 1000$ 와 파이프의 질량비 β 값이 대략 $\beta \leq 0.6$ 에 대해서는 내부감쇠의 존재가 임계유속 값의 변화에 미치는 영향은 거의 없는데 비해, $\beta > 0.6$ 에 대해서는 내부감쇠의 존재가 오히려 파이프의 안정성을 저감시킨다. 그러나, $\kappa > 1000$ 인 경우는 파이프의 질량비가 작은 영역에서도 내부감쇠로 인해 파이프의 안정성은 증가된다.

셋째, 탄성기초 파라미터 값 κ 가 $\kappa=100$ 인 경우, 내부감쇠의 존재에 관계없이 필터가 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수와의 관계가 일치하지 않는 경우도 있다.

참고문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.17, pp.229~232.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.457~486.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.487~499.
- (4) Becker, O., 1979, "Zum Stabilitätsverhalten des durchströmten geraden Rohres mit elastischer Ouerstützung", Maschinenbautechnik, Vol.28, pp.325~327.
- (5) Sugiyama, Y., 1984, "Studies on Stability of Two-Degree-of-Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Spring Support and a Lumped Mass)", Bulletin of the JSME, Vol.27, pp.2658~2663.
- (6) Sugiyama, Y., Katayama, T., Akesson, B. and Sällström, J.H., 1991, "Stability of Cantilevered Pipes Conveying Fluid and Having Intermediate Spring Support", 11th International Conference on SMIRT, ToKyo, Paper J10/1.
- (7) Ryu, S. U, Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Computers and Structures, Vol. 80, pp.1231~1241.