한국소음진동공학회 2003년도 추계학술대회논문집, pp. 498~503.

기하학적 비선형성을 갖는 평판의 동특성 해석

Dynamic Analysis of a Geometrical Non-linear Plate

°임 재 훈* · 최 연 선**

Jae-Hoon Lim, and Yeon-Sun Choi

Key Words : Geometrical Non-linearity(기하학적 비선형), Phase Diagram(위상 선도), Continuous-Time System Identification(연속-시간 시스템 규명), Single Mode Approximation(단일 모드 접근)

ABSTRACT

Dynamic analysis of a plate with non-linearity due to large deformation is performed in the study. There have been many researches about the non-linear dynamic behavior of plates examining by means of theoretical or numerical analyses. But it is important how exactly model the actual system. In this respect, the Continuous-Time system identification technique is used to generate non-linear models, for stiffness and damping terms, to explain the observed behaviors with single mode assumptions for the simplicity after comparing the experimental results with the numerical results of a linear plate model.

1. 서 론

평판의 동특성 해석에 대해서 그동안 수많은 연구가 이루어졌다. 평판의 선형적 이론은 Euler-Bernoulli 보의 2차원 상사에 의한 것과 Timoshenko 보의 2차원 상사인 Mindlin 판 이론 등이 있다. 하지만 실제 대부분의 판 구조물은 판의 out-of-plane 또는 in-plane 가진에 의해 그 변형이 커지게 됨으로써 비선형 현상이 발생하게 된다. 예를 들면 큰 변형에 의해서 판 내부에는 굽힘 응력과 막(membrane)구조물에서의 장력에 상응하는 응력이 동시에 발생하게 된다.[1] 이러한 대변형에 의한 판 구조물의 비선형 이론에 관한 연구는 von Karman(1910)에 의해 처음 수행되었다. 그는 대변형에 의한 비선형 장력을 판의 횡방향 운동에 포함시켰다. 그 후에 Love(1944)는 비선형 변형에 기초한 곡률을 사용함으로써 von Karman의 이론을 확장하였으며, Reissner(1957)는 전단변형을 고려한 비선형 운동방정식을 제안하였다. 또한 Hermman(1955)은 작은 신장과 전단 변형을 포함하지만 큰 회전 변형을 갖고 있는 판의 비선형 운동방정식을 유도하였다. 이러한 판 구조물의 비선형 운동에 관한 연구는 앞서의 판 구조물의 비선형 이론을 기초로 현재까지 많은 연구자들에 의해 수행되고 있다. Gorman[2]은 building block 중첩법을 사용하여 캔틸레버 직사각 평판의 자유진동 문제에서 보다 정확한 이론적인 해의 도출에 대해 연구하였다. Kadiri[3]는 Hamilton's principle과 주파수 분석을 이용하여 모든 가장자리가 고정된 사각 평판의 두 번째 비선형 모드를 계산하는 이론적 모델을 제시하였다. 그 결과로써 대변형에 의한 평판의 굽힘응력이 고정단에 가까울수록 선형 모델에서의 응력보다 높게 나타나는 결론을 얻었다. 즉, 모드의 변형으로 인하여 고정단 부분에서의 굽힘응력의 증가량이 선형 모델에서의 결과보다 3배 이상 높게 발생함을 보였다. Haterbouch[4]는 가장자리가 모두 clamped된 원형 평판에서 평판의 대변형이 처음의 두 선대칭 모드형상, 고유진동수, 분포 굽힘 응력 각각에 미치는 효과에 대해 연구하였다. 기존의 고정-고정 보 또는 가장자리가 모드 고정된 사각평판에 적용된 Hamilton's principle과 원형 구조물에서의 파동방정식인 Bessel's function을 사용하여 원형 평판에 대한 이론적 모델을 수립하였고 비선형 모드형상, 비선형 변위 함수와 그에 상응하는 비선형 진동수 등을 수치적으로 도출하였다.

앞서의 비선형 판 구조물에 대한 연구들은 이론적 모델을 성립하거나 수치적으로 해를 도출하는 방법이 대부분이었다. 하지만 비선형 시스템에서는 성립된 이론식 못지않게 실제 실험에서의 응답과 이론 모델과의 일치여부가 중요하다. 즉, 이론상의 모델이 실제 모델을 정확하게 반영하고 있는지 실험을 통해 입증하는 것이 비선형 시스템의 동특성 해석에 있어서 중요한 부분이라 하겠다. 따라서 본 연구에서는 대변형과 실제 모델에 근접하는 비선형 구속조건에 의한 비선형 요소들을 이론적으로 정립하고 실험에 의한 응답으로부터 시스템 규명을 통하여 비선형 항의 파라미터를 추정하는 연구를 수행하였다. 이 결과로부터 보다 실제 시스템에 상응하는 이론적 모델을 수립하고자 한다.

* 성균관대학교 기계공학부
E-mail : meanimal@skku.edu
Tel : (031) 290-7501, Fax : (031) 290-5849

** 성균관대학교 기계공학부

2. 판 구조물의 선형 모델

본 연구에 사용된 평판은 Fig. 1에서와 같이 x, y 방향의 길이가 각각 a, b이고 두께가 h, 밀도 ρ, Young's modulus E, Poisson ratio ν이며, $x=0, 0 \le y \le b$에서 고정(clamped)되었고, $a_0 \le x \le a, 0 \le y \le b$의 위치에 두께가 h', 평판과 같은 물성치의 분포 질량이 평판에 고정되어 있다. 또한 x_0, y_0의 위치에서 $F \quad (\quad t \quad)$로 가진된다. 평판의 전단 변형과 회전관성을 무시하고 평판은 등방성(isotropic)이며 균질(homogeneous)하고 Hooke의 법칙을 만족한다고 가정한다. 또한 평판의 out-of-plane 변형만을 가정하며 또한 그 변위는 평판의 두께에 비해 매우 작다고 가정한다. 분포 질량이 포함된 평판의 선형 운동방정식은 식 (1)과 같다.

$$-\nabla^4(Dz(x,y,t)) + F(x_0,y_0,t) = \frac{\partial^2(\rho hz(x,y,t))}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(\rho h'Az(x,y,t))}{\partial t^2} \tag{1}$$

여기서, 평판의 굽힘강성, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, ∇^4은 중조화 연산자(biharmonic operator)이며, A는 분포 질량의 면적, 즉, $A=(a-a_0)\times b$이다. 우선, 평판의 고유진동수를 계산하기 위하여 해를 식 (2)와 같이 가정한다.

$$z(x,y,t) = W(x,y)sin(wt) \tag{2}$$

평판의 최대 포텐셜 에너지와 운동 에너지는 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \\ &+ \int_0^a\int_0^b\left[2\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]dxdy \\ &+ \int_0^a\int_0^b\left[2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \\ T_{max} &= \frac{\rho hw^2}{2}\int_0^a\int_0^b W^2dxdy+\frac{\rho h'w^2}{2}\int_{a_0}^a\int_0^b W^2dxdy \end{aligned} \tag{3}$$

Rayleigh-Ritz 방법을 적용하기 위해 공간함수, $W(x,y)$를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x,y) = \sum_n\sum_m A_{mn}\phi_n(x)\psi_m(y) \tag{4}$$

여기서 비교함수 $\phi_n(x), \psi_m(y)$는 각각 평판의 x, y방향의 경계조건. 즉, x방향의 고정-자유, y방향의 자유-자유 조건을 만족시키기 위하여 각각 외팔보와 자유-자유인 보 모드형상 함수를 사용하였다. 식 (4)를 (3)에 대입하여

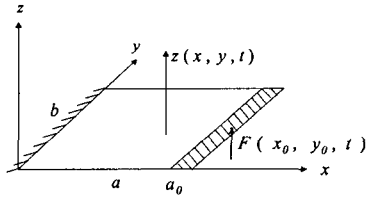


Fig. 1 Schematic of plate

Rayleigh-Ritz 방법을 적용하면 식 (5)과 같은 대수 방정식을 얻는다. 식 (5)에서 $\lambda=\rho hw^2/D$ 이며, $m,n,i,j=1,2,3,\ldots,N$이다.

$$\begin{aligned} &\sum_n\sum_m\left\{\int_0^a\left(\frac{d^2\phi_m}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)dx\int_0^b\psi_n\psi_j dy\right. \\ &+ \int_0^a\phi_m\phi_i dx\int_0^b\left(\frac{d^2\psi_n}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2\psi_j}{dy^2}\right)dy \\ &+ \nu\left(\int_0^a\phi_m\left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)dx\int_0^b\left(\frac{d^2\psi_n}{dy^2}\right)\psi_j dy\right. \\ &+ \int_0^a\left(\frac{d^2\phi_m}{dx^2}\right)\phi_i dx\int_0^b\psi_n\left(\frac{d^2\psi_j}{dy^2}\right)dy \\ &\left.+2(1-\nu)\int_0^a\left(\frac{d\phi_m}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_i}{dx}\right)dx\int_0^b\left(\frac{d\psi_n}{dy}\right)\left(\frac{d\psi_j}{dy}\right)dy\right) \\ &\left.-\lambda\left[\int_0^a\phi_m\phi_i dx\int_0^b\psi_n\psi_j dy+(h'/h)\int_{a_0}^a\phi_m\phi_i dx\int_0^b\psi_n\psi_j dy\right]\right\}A_{mn} \\ &=0 \end{aligned} \tag{5}$$

3. 평판의 가진 실험

평판의 가진 실험을 수행하기 위하여 Fig. 2와 같이 탄소강으로 된 평판과 실험 장치를 제작하였다. 평판의 설계변수는 table 2와 같고 함수 발생기(ED엔지니어링 function ganerator FG-1880)와 액츄에이터(B&K type 4809)로 x_0, y_0위치에서 가진하고 a_1, b_1의 위치에서 레이저 센서(Graham&White laser sensor M5L/20)로 평판의 진동 현상을 측정하였으며, FFT 분석기(ONOSOKKI CF-350)와

Table 1 Parameters of the plate

tested plate	elastic steel
E (Young's modulus)	200 GPa
ρ (density)	7850 kg/m^3
ν (Poisson's ratio)	0.3
a, b (lengths)	0.32, 0.3 m
h (thickness)	0.0007 m
h' (thickness of distributed mass)	0.005 m
$a-a_0, b$ (lengths of distributed mass)	0.02, 0.3 m
a_1, b_1 (position of laser sensor)	0.26, 0.24 m
x_0, y_0 (position of excitation)	0.31, 0.15 m

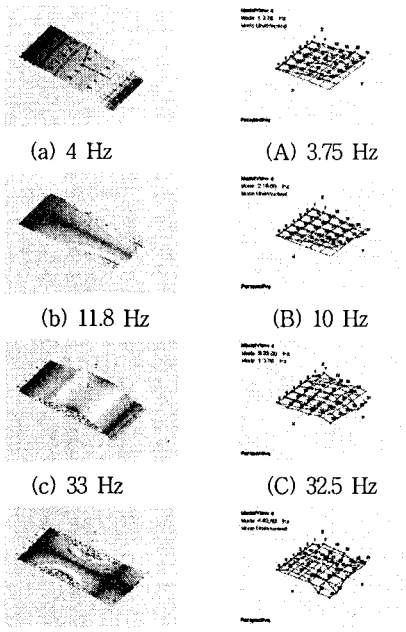
퍼스널 컴퓨터(PC)로 분석하였다. 제작된 평판의 물성치와 설계 변수는 table 1에 명시하였다.

가진실험에 앞서 평판의 고유진동수를 실험적으로 측정하기 위해 충격실험을 통하여 모드해석을 수행하였다. 충격 해머(B&K impact hammer 8202)로 평판을 가진시킨 후 가속도계(B&K type 4371)로 얻은 응답으로부터 주파수 응답(FRF)을 측정하였다. 측정 방법은 한 포인트에서 가진하고 여러 곳에서의 응답을 얻는 방법을 사용하였다. 또한 실험에서 발생하는 잡음을 줄이고 데이터의 신뢰도를 높이기 위해 각 데이터 마다 16번씩 측정하여 평균을 내었다. 측정한 FRF 신호로부터 평판의 고유진동수와 모드형상을 구하기 위해 SMS(Star measurement System Star Modal System) 소프트웨어를 사용하였다. 또한 상용 FEM 프로그램인 Samcef(Samtech)프로그램[5]을 사용하여 이론결과와 유한요소해석, 실험결과 사이를 비교하였다. 유한요소해석과 실험 결과에서 처음 네 번째까지의 모드형상을 Fig. 3에 도시하였다. 또한 table 2에 실험과 유한요소해석, 그리고 식 (5)의 이론해석으로 구한 고유진동수를 나타내었다.

평판의 가진실험은 가진 주파수의 기본 진동수 범위를 1에서 55Hz 사이로 하여 실험을 수행하였다. Fig. 4에는 가진 주파수 변화에 따른, a_1, b_1 위치에서의 평판 응답의 주파수와 입력 가진 주파수의 waterfall diagram을 도시하였다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 입력 가진의 주파수가 기본 주파수와 그것의 hamonics 성분들만을 포함하고 있는 반면, 평판 응답에서는 19 Hz 이상에서부터 기본 주파수의 아조화(subharmonic) 성분과 그것의 배수 성분들이 나타나고 있는 것을 볼 수 있다. Fig. 5에는 각 가진 주파수에 따른 응답의 파워 스펙트럼과 위상선도를 도시하였다. Fig. 5(a)에서는 19 Hz의 입력 가진에 대해 응답의 아조화 성분들이 발생함에 따라 위상 선도 상에서 2주기 이상의 운동을 확인할 수 있고, (b), (c), (d) 각각에 대해서도 응답 주파수의 아조화 성분들에 의해 2주기 이상의 거동을 볼 수 있다.선형 운동방정식의 결과와 실험과의 비교를 위해 식 (1)에서의 해를 식 (6)과 같이 가정하고 Galerkin 방법을 통하여 변수 분리한다.

$$z(x,y,t) = \sum_{n,m} \phi_n(x)\psi_m(y)\,q(t) \qquad (6)$$

Fig. 2 Experimental setup



(a) 4 Hz (A) 3.75 Hz

(b) 11.8 Hz (B) 10 Hz

(c) 33 Hz (C) 32.5 Hz

(d) 61 Hz (D) 62.5 Hz

Fig. 3 Vibration modes of the plate : (a), (b), (c), and (d); by Samcef, (A), (B), (C), and (D) by SMS

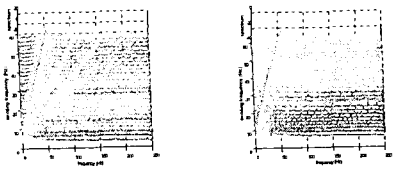
여기서, $\phi_n(x), \psi_m(y)$는 앞에서와 마찬가지로 보 고유 모드 형상을 사용하였다. 실제 실험의 입력 가진 데이터를 대입하여 수치 해석한 결과를 Fig. 6과 Fig. 7에 도시하였다. Fig. 6, 7에서 보는 바와 같이 수치해석에 의한 평판의 응답이 기본 가진 주파수와 그의 배수 성분 외에 어떠한 아조화성분도 나타나지 않음을 알 수 있다. 즉, 선형 모델에서는 실험에서와 같은 비선형 현상을 발견할 수 없다. 즉, 실험에서 측정되었던 2주기 이상의 거동을 선형 모델의 수치해석 결과에서는 확인할 수 없다. 이에 다음 장에서 대변형의 즉, 기하학적 비선형성을 갖는 평판에 대한 모델을 유도하고 보 모델에 사용하는 비선형 댐핑 모델을 적용하여 실험결과와 일치하는 파라미터들을 추정하였다.

4. 평판의 비선형 모델

평판의 횡 방향 진동에 대해서 앞서의 선형 가정에 비하여 그 변형이 클 경우 평판 내부에는 굽힘에 의한 변형 에너지와 막(membrane) 변형 에너지가 존재하게 된다.[1] 대변형에

Table 2 Natural frequencies of plate with different methods

natural frequency	by using FEM program	by analytical	by experiment
w_1	4 Hz	4.47 Hz	3.75 Hz
w_2	11.8 Hz	12.33 Hz	10 Hz
w_3	38 Hz	39.1 Hz	32.5 Hz
w_4	61 Hz	62.05 Hz	62.5 Hz



(a) exciter (b) plate

Fig. 4 Waterfall diagrams of; (a) input excitations and (b) plate responses

의한 각 포텐셜 에너지와 운동에너지를 정리하면 식 (7)과 같다.[6] 식 (7)에서 V_b, V_a는 각각 굽힘에 의한 포텐셜 에너지, 막 포텐셜 에너지이며, s는 판의 면적이다. 식 (7)의 해를 식 (8)과 같이 가정하고 대입하여 정리하면 식 (9)와 같다.

$$V_b = \frac{D}{2}\int_s \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] ds$$

$$V_a = \frac{3D}{2h^2}\int_s \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2 ds, \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{2}\rho h\int_s \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 ds + \frac{1}{2}\rho h'\int_A \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dA,$$

$$z(x,y,t) = \sum_i W_i(x,y)q_i(t) \quad (8)$$

$$V = V_b + V_a$$

$$= \frac{1}{2}q_i q_j \int_s D\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right)\right] ds$$

$$+ \frac{3D}{2h^2}q_i q_j q_k q_l \int_s \left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W_j}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial W_j}{\partial y}\right)\right) \quad (9)$$

$$\left(\left(\frac{\partial W_k}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W_l}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial W_k}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial W_l}{\partial y}\right)\right) ds,$$

$$T = \frac{\rho h}{2}\dot{q}_i\dot{q}_j\int_s W_i W_j\, ds + \frac{\rho h'}{2}\dot{q}_i\dot{q}_j\int_A W_i W_j\, dA$$

$$Q = F(t)W_r(x_0, y_0)$$

여기서, Q, q_i는 각각 비보존 힘(nonconservative force)과 일반화된 시간함수이다. 식 (9)에서 Lagrange 방정식을 이용하면 식 (10)과 같은 비감쇠 Duffing 방정식이 유도된다.

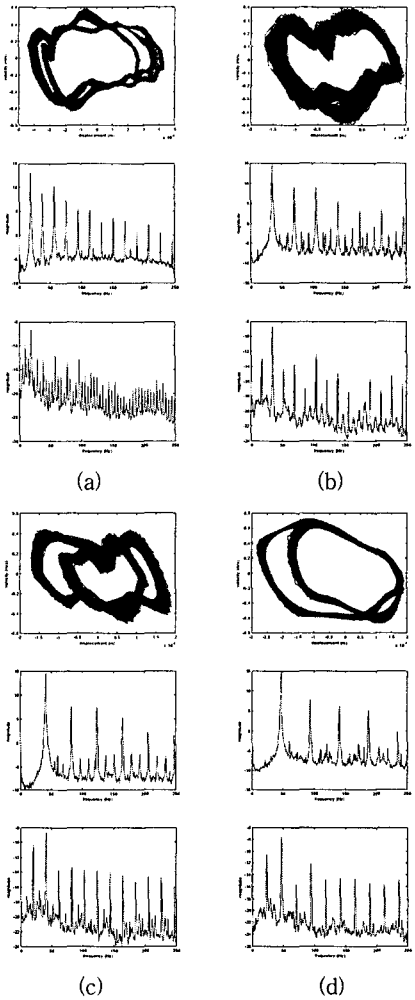
$$m_{ir}\ddot{q}_i + k_{ir}q_i + 2q_i q_j q_k b_{ijkr} = W_i(x_0, y_0)F(t), r = 1, \ldots, n$$

$$m_{ir} = \rho h\left(\int_s W_i W_r ds + \frac{h'}{h}\int_A W_i W_r dA\right),$$

$$k_{ir} = D\int_s \left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W_r}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W_r}{\partial x \partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_r}{\partial y^2}\right)\right] ds, \quad (10)$$

$$b_{ijkr} = \frac{3D}{2h^2}\int_s \left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W_j}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial W_j}{\partial y}\right)\right)$$

$$\left(\left(\frac{\partial W_k}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial W_r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial W_k}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial W_r}{\partial y}\right)\right) ds$$



(a) (b) (c) (d)

Fig. 5 Phase diagrams, power spectra of input excitations and plate responses for; (a) 19 Hz, (b) 35 Hz, (c) 41 Hz, and (d) 47 Hz

앞 장에서 평판의 가진 실험을 1에서부터 55 Hz까지 수행하였으며 가진 주파수 범위 사이에 table 1에서 보는바와 같이 3개의 평판 고유진동수가 존재하므로 식 (10)에서 운동방정식을 3자유도로 모델링 하였다. 평판의 비선형 댐핑을

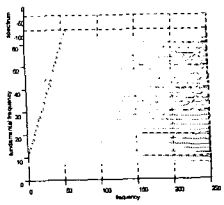


Fig. 6 Waterfall diagram of the plate spectra with linear equation of motion

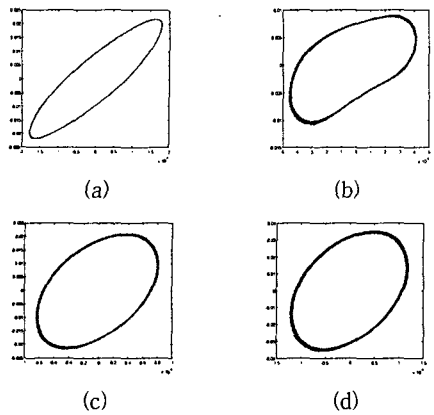


Fig. 7 Phase diagrams by numerical analysis for; (a) 19 Hz, (b) 35 Hz, (c) 41 Hz, and (d) 45 Hz

고려하기 위하여 평판의 비선형성에 대해 간략히 살펴보도록 하겠다. 판 구조물과 같은 연속계(continuous system)에서 비선형성은 선형의 독립적인 고유 모드와 연결이 된다. 이 현상은 각 모드간의 상호 작용을 야기한다.[7] 이러한 상호 작용은 내부 공진(internal resonance), 외부 조합 공진(external combination resonance), 혹은 파라메트릭(parametric) 조합 공진 등에 의한 결과이다. 만약 시스템이 3차의 비선형성을 갖는다면, 위의 세 개의 공진 중 내부 공진은 시스템의 고유진동수가 $w_n \approx w_m$, $w_n \approx 3w_m$, 또는 $w_n \approx |2w_m \pm w_k|$ 일 때 발생할 수 있고 2차의 비선형성을 포함한다면, $w_n \approx 2w_m$, $w_n \approx w_m \pm w_k$ 일 때 발생한다. 또한 외부 조합 공진은 3차 비선형성의 시스템에서는 가진 주파수, $\Omega \approx |2w_m \pm w_n|$, $\Omega \approx \frac{1}{2}(w_m \pm w_n)$, 또는 $\Omega \approx |w_m \pm w_n \pm w_k|$ 일 때 발생하며 2차 비선형일 때는 가진 주파수가 $\Omega \approx w_m \pm w_n$ 이면 발생할 수 있다. 가진 주파수 19 Hz는 평판의 $\frac{1}{2}(w_2 + w_3)$에 근접하며 앞서의 Fig. 5(a)에서 두 번째 고유진동수와 세 번째 고유진동수 부근에서 극치를 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 이 시스템은 3차의 비선형성을 갖고 있음을 알 수 있다. 또한 입력 가진 주파수 41 Hz는 두 번째와 세 번째 고유진동수의 합에 가까우며 Fig. 5(d)에서 보다시피 응답 스펙트럼은 가진 주파수의 극치 외에 10 Hz와 32.5 Hz에 근접한 위치에서 극치를

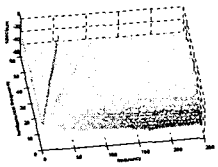


Fig. 8 Waterfall diagram of the plate spectra with non-linear equation of motion

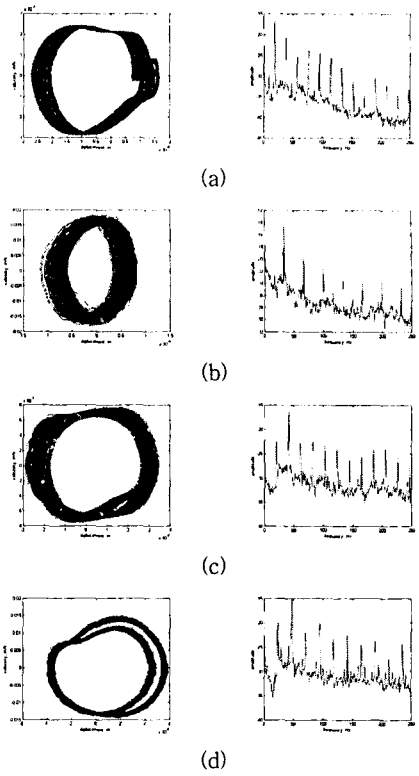


Fig. 9 Phase diagrams and power spectra of the plate by numerical analysis for; (a) 19 Hz, (b) 35 Hz, (c) 41 Hz, and (d) 45 Hz

나타내고 있다. 이에 시스템은 2차의 비선형성 또한 포함하고 있음을 알 수 있다. 따라서 식 (11)과 같은 Duffing 형식의 보 모델에 사용되는 3차 비선형 댐핑 모델과 Baker에 의해 Duffing 방식의 운동식에서 경험적인 방법을 통하여 설계된 2차 댐핑 모델[8]을 함께 적용하여 각 항에 대한 미지의 계수들을 single mode approximation[6]과 연속-시간(continuous-time) system identification으로부터 추정한다. 즉, 1, 2, 3차 각 고유진동수에 가장 근접한 가진과 응답 데이터로 단일 모드로 가정하여 그에 상응한 변수를 찾는다.

$$\alpha_{1i}\dot{q}_i + \alpha_{2i}\dot{q}_i q_i^2 + \alpha_{3i}\dot{q}_i^2 q_i + \alpha_{4i}\dot{q}_i|\dot{q}_i| \qquad (11)$$

단일 모드로 가정한 평판의 운동방정식은 식 (12)와 같다.

Table 3 Parameter estimates via C-T system id.

identified parameter	1st mode	2nd mode	3rd mode
α_{1i}	0.166×10^3	0.129×10^3	0.275×10^2
α_{2i}	4.250×10^7	7.522×10^6	1.113×10^5
α_{3i}	0.166×10^5	0.869×10^5	0.229×10^4
α_{4i}	0.226×10^4	0.210×10^3	0.972×10

$$m_{ii}\ddot{q}_i + \alpha_{1i}\dot{q}_i + \alpha_{2i}\dot{q}_i q_i^2 + \alpha_{3i}\dot{q}_i^2 q_i + \alpha_{4i}\dot{q}_i|\dot{q}_i| + k_{ii}q_i + 2b_{iii}q_i^3 = 0 \quad (12)$$
$$i = 1,2,3.$$

실험 데이터로 미지의 파라미터를 추정하기위하여 식 (12)를 식 (13)과 같은 $K = A \cdot P$의 행렬 형태로 나타낸다.

$$[m_{ii}\ddot{q}_i + k_{ii}q_i + 2b_{iii}q_i^3 - F] = [-\ddot{q}_i - \dot{q}_i q_i^2 - \dot{q}_i^2 q_i - |\dot{q}_i|\dot{q}_i] \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \\ \alpha_{4i} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서, K, A는 실험에서 구한 데이터이며 P는 구하고자 하는 변수이다. 사용된 데이터의 time step은 0.002 sec이고 개수는 1000개이다. Table 3에 파라미터를 추정한 결과를 나타냈다. Table 3의 결과로부터 식 (10), 평판의 비선형 운동방정식의 해석 결과를 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서 볼 수 있듯이 앞 장의 실험결과에서와 마찬가지로 가진 주파수 19 Hz 이상에서부터 기본 가진 주파수의 아조화 성분들이 응답의 스펙트럼 상에 나타나기 시작한다. 또한 실험상의 결과와 비교를 하기위해 Fig. 9에는 19 Hz, 35 Hz, 41 Hz 그리고 45 Hz로 가진 하였을 때 응답의 위상선도를 도시하였다. 실험에서와 마찬가지로 아조화성분과 그것의 배수 성분들에 의해서 2주기 이상의 거동을 확인 할 수 있다. 이에 시스템 규명을 통하여 모델링 된 시스템이 실제의 실험 시스템을 잘 반영하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Fig. 5와 Fig. 9를 비교해 보면 평판 변위의 크기가 정확히 일치 하지 않았고, 실험에서 스펙트럼상의 극치를 갖는 아조화 성분들을 수치해석상에서는 정확하게 구현할 수 없었지만 응답의 경향은 거의 정확하게 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 대변형에 의하여 비선형 특성을 갖는 평판에 대한 동특성 해석을 실험적, 수치 해석적 방법으로 수행하였다. 우선 평판 모델에 해당하는 선형 운동방정식을 유도하였고, 평판의 고유진동수와 모드형상을 이론적 해석과 유한요소해석으로 구하였다. 그리고 이론모델에 해당하는 실험장치를 제작하여 모달 실험과 가진 실험을 수행하였다. 실험적 모달 실험의 결과와 선형 이론모델과 서로 비교하여 거의 일치하고 있음을 알 수 있었지만 가진 실험에 의해서는 실험에서 측정 되었던 비선형 현상이 선형 모델에서는 나타나지 않음을 알 수 있었다. 이에 평판에 비선형 모델을 유도하고 또한 비선형 댐핑 모델을 추가하여 미지의 댐핑 계수를 실험에서 구한 데이터로부터 연속 시간 시스템 규명법을 사용하여 추정한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

대변형에 의해 평판의 응답에는 가진 주파수 이외의 성분이 나타나며 그것에 의해 단주기 운동이 아닌 여러 개의 주기운동이 발생함을 실험과 비선형 모델의 수치해석에 의해 확인 할 수 있었다. 또한 평판의 가진 실험에서 얻은 데이터로부터 비선형 모델의 파라미터를 추정하여 실험결과와 거의 일치하는 결론을 얻을 수 있었다. 그러나 실험에서 얻은 평판의 응답과 비선형 모델의 수치해석에 의한 결과가 약간 일치하지 않았던 가장 큰 원인은 시스템 규명을 하는 과정에서 각각의 단일 모드의 조합으로 가정할 때 각 모드의 연성에 의한 효과를 고려할 수 없었기 때문이다. 따라서 이후의 연구에서는 이러한 효과의 고려를 위해 단일 모드에 의한 시스템 규명이 아닌 다중 모드 시스템 규명을 수행하여야할 것이다.

참 고 문 헌

(1) Timoshenko, S., and Woinowsky-Kreiger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, second edition, New York.

(2) Gorman, D. J., 1995, "Accurate Free Vibration Analysis of the Orthotropic Cantilever Plate", Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 4, pp. 605~618.

(3) Kadiri, M. E., Benamar, R., and White, R. G., 1999, " The Non-linear Free Vibration of Fully Clamped Rectangular Plates : Second Non-linear Mode for Various Plate Aspect Ratios", Journal of Sound and Vibration, Vol. 228, No. 2, pp. 333~358.

(4) Haterbouch, M., and Benamar, R., 2003, "The Effect of Large Vibration Amplitude on the Axisymmetric Mode Shapes and Natural Frequencies of Clamped Thin Isotropic Circular Plates. Part 1 : Iterative and Explicit Analytical Solution for Non-linear Transverse Vibrations", Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, pp. 123~154.

(5) "Samcef Field", ableMAX, Inc., 2003.

(6) Kadiri, M. E., and Benamar, R., 2003, "Improvement of the Semi-analytical Method, Based on Hamilton's Principle and Spectral Analysis, for Determination of the Geometrically Non-linear Response of Thin Straight Structures. Part III: Steady State periodic Forced Response of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 264, pp. 1~35.

(7) Malatkar, P., and Nayfeh, A. H., 2003, "A Plethora of Nonlinear Dynamics Phenomena Observed in a Simple Cantilever Plate", ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference.

(8) Ghanbari, M., and Dunne, J. F., 1998, " An Experimentally Verified Non-linear Damping Model for Large Amplitude Random Vibration of a Clamped -Clamped Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 215, No. 2, pp. 343~379.