

# 원판의 비대칭진동의 대역분기해석

## Global Bifurcations in the Asymmetric Vibrations of a Circular Plate

여명환\*·이원경\*\*

Myeong Hwan Yeo and Won Kyoung Lee

**Key Words :** nonlinear vibration of circular plate(원판의 비선형진동), global bifurcation(대역분기), Silnikov type homoclinic orbit(실니코프형 호모클리닉 궤도)

### ABSTRACT

We investigate global bifurcation in the subharmonic motion of a circular plate with one-to-one internal resonance. A system of autonomous equations are obtained from the partial differential equations governing the system by using Galerkin's procedure and the method of multiple scales. A perturbation method developed by Kovačič and Wiggins is used to find Silnikov type homoclinic orbits. The conditions under which the orbits occur are obtained.

### 1. 서론

동역학계(dynamical system)의 분기해석은 국소분기해석과 대역분기해석으로 나누어진다. 국소분기해석은 벡터장이나 사상(map)의 고정점들의 분기와 관련된 것으로 계의 매개변수의 변화에 따른 고정점들의 정성적 변화를 해석하는 것이다. 대역분기해석은 확장된 위상공간에서 궤적구조의 정성적 변화를 해석하는 것이다.

대역분기해석을 위하여, Sethna 와 그의 동료들 [1~3]은 해밀턴(Hamiltonian) 계의 헤테로클리닉 궤도(heteroclinic orbit)가 섭동에 의해 깨어져서 Smale horseshoes 구조를 가지는 것을 확인함으로써 혼돈(chaos)운동을 예측하였다. 이들과는 달리, Kovačič 과 Wiggins[4]는 고차원 멜니코프이론(higher dimensional Melnikov theory)을 비롯한 여러 이론을 조합함으로써 섭동 후에 실니코프형 호모클리닉 궤도(Silnikov type homoclinic orbit)가 존재하는 조건을 확인함으로써 혼돈운동을 예측하였다. 이후, 몇몇 연구자들은 Kovačič 과 Wiggins[4]의 방법을 사각판 등에 적용하였다[5~9].

한편, 원판에 관해서는 Sridhar, Mook, Nayfeh[10, 11], Nayfeh 와 Vakakis[12], Lee 와 그의 동료들[13~16] 등에 의해 국소분기해석은 수행되어 왔으나 대역분기해석에 관한 연구는 전무한 실정이다. 본 연구에서는 일대일 내부공진을 가진 불완전원판(Fig. 1)의 저조화 공진응답에

대한 대역분기해석을 수행하여 실니코프형 호모클리닉 궤도가 존재하는 조건을 발견하였다.

불완전원판의 비감쇠자유진동의 운동방정식 [17]에 감쇠와 가진을 추가한 후, 갤러킨 방법으로 연립 상미분방정식을 구하고 가진진동수가 고유진동수의 3 배에 가까운 부공진을 조사하였다. 가진진동수가 고유진동수에 가까운 주공진의 경우에는 실니코프형 호모클리닉 궤도가 존재하지 않는다[18]. 다중시간법을 적용하여 자율상미분방정식을 구하고, Kovačič 과 Wiggins[4]의 대역분기해석방법을 적용하였다.

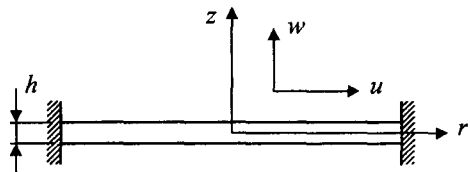
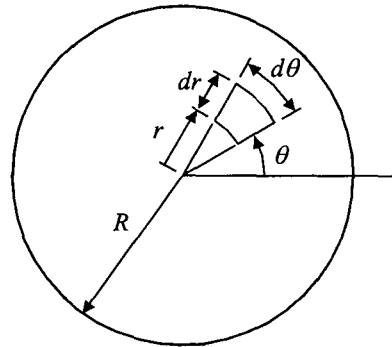


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate.

\* 영남대학교 대학원

E-mail : yeomh@yumail.ac.kr  
Tel : (053) 814-4288, Fax : (053) 813-3703

\*\* 영남대학교 기계공학부

## 2. 문제의 공식화

운동방정식은 Efstathiades[17]가 유도한 불완전 원판의 비감쇠자유진동의 운동방정식에 감쇠항, 가진항을 추가하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 (D \nabla^2 w) = (1-\nu) L_1(w, D) + L_2(w, F) - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial t} + p(r, \theta, t) \quad (1a)$$

$$\nabla^2 (S \nabla^2 F) = (1+\nu) L_3(F, S) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (1b)$$

여기서,

$$L_1(w, D) = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$L_2(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$L_3(F, S) = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

식 (1)에서  $F$ 는 면내 관성(in-plane inertia)을 무시할 경우, 면내 평형조건을 만족하는 힘 함수(force function)이고,  $w(=w_0/z_0)$ 는 중간평면 횡변

형  $w_0$ 와 중심에서의 두께  $z_0$ 로 정의되는 무차원 중간평면의 횡변형이다.  $r(=r_0/R)$ 은 반경  $r$ 과 최대반경  $R$ 로 정의되는 무차원 반경이다.  $\theta$ 는 각,  $p(r, \theta, t)$ 는 가진함수이다.  $D$ 는  $D=D_0/E_0 z_0^3$ 로 정의되는 무차원 flexural rigidity 이다.  $D_0(=Eh_0^3/12(1-\nu^2))$ 는 탄성계수  $E$ 와 두께  $h_0$ , 포와송 비  $\nu$ 로 정의되는 flexural rigidity 이고,  $E_0$ 는 중심에서의 탄성계수이다.  $S$ 는  $S=E_0 z_0/Eh_0$ 로 정의되는 무차원함수이다.  $\rho$ 는  $\rho=\rho_0 R^4/E_0 z_0$ 로 정의되는 함수로 밀도  $\rho_0$ 에 비례한다.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2.$$

$F$ ,  $w$ 와 면내 변위  $u_r$ ,  $u_\theta$ 의 관계식은 다음과 같다.

$$e_r = S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right), \quad (2a)$$

$$e_\theta = S \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right) \right], \quad (2b)$$

$$e_{r\theta} = 2S(1+\nu) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right). \quad (2c)$$

여기서,

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2,$$

$$e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2,$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

원판의 불완전성이 작고( $S=1$ ), 불완전성은  $\rho h$ 의 변화에 의해서만 기인한다고 가정하자. 즉,  $\rho h$ 는  $r$ 과  $\theta$ 의 함수인 반면,  $D$ 와  $\delta$ 은  $r$ 만의 함수로 가정하자. 그리고, 동일한 절경(nodal diameter) 개수를 가지는 두 모드의 상호작용만을 고려하면, 식 (1)~(2)의 정상상태해는 다음과 같이 나타낼 수 있다[17].

$$w(r, \theta, t) = \phi(r) \{x_1(t) \cos(n\theta - \theta_0) + x_2(t) \sin(n\theta - \theta_0)\} \quad (3)$$

여기서,  $\phi(r)$  은 경계조건에 의해 결정되는 형상함수이고,  $x_1(t)$  와  $x_2(t)$  는 시간에 따른 모드의 진폭을 나타내며,  $n$  은 절경의 개수를 나타낸다.  $\theta_0$  는 원판의 불완전성에 의해 기인하는 것으로  $\rho h$  의 함수 형태에 의해 다음과 같이 결정되는 상수이다.

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2A_0}{A_{11} - A_{21}} \quad (4)$$

여기서,

$$A_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho h \phi^2 r \cos^2 n\theta dr d\theta,$$

$$A_{21} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho h \phi^2 r \sin^2 n\theta dr d\theta,$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho h \phi^2 r \sin 2n\theta dr d\theta. \quad (5)$$

$\theta_0$  는 불완전원판에서 절경의 위치를 결정하는 값이다. 완전원판( $\rho h$  가  $r$  만의 함수)의 경우, 식 (4)에서  $A_0 = 0$  이고  $A_{11} = A_{21}$  이므로 절경의 위치가 결정되지 않는다.  $\rho h$  와  $D$  가 모두  $\theta$  의 함수인 경우 식 (3)에 나타나는 두  $\theta_0$  의 값은 서로 다르므로 두 모드의 절경은 직교하지 않는다[17].

식 (3)의  $x_1(t)$  와  $x_2(t)$  는 갤러킨방법(Galerkin's procedure)을 이용하면 다음과 같은 두 상미분방정식에 의해 결정된다[17].

$$\ddot{x}_i + \varepsilon \delta \omega_i^2 \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i + \varepsilon \gamma \omega_i^2 x_i (x_1^2 + x_2^2) = \mu_i \cos \lambda t, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

여기서,  $\dot{\phantom{x}} = d/dt$ ,  $\varepsilon$  은 작은 매개변수를 나타낸다.  $\omega_i$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega_i^2 = \frac{C_i}{M}, \quad \varepsilon \delta = \frac{F_{11}}{K_{11}}, \quad \varepsilon \gamma = \frac{B_0}{K_{11}},$$

$$\mu_i = \frac{N_i}{M}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

여기서,

$$C_1 = K_{11} (A_{11} \tan^2 \theta_0 - 2A_0 \tan \theta_0 + A_{21}),$$

$$C_2 = K_{11} (A_{21} \tan^2 \theta_0 + 2A_0 \tan \theta_0 + A_{11}),$$

$$N_1 = \sec \theta_0 \{A_{21} P_1 - A_0 P_2 - (A_0 P_1 - A_{11} P_2) \tan \theta_0\},$$

$$N_2 = \sec \theta_0 \{A_{11} P_2 - A_0 P_1 + (A_0 P_2 - A_{21} P_1) \tan \theta_0\}.$$

$$M = (A_{11} A_{21} - A_0^2) (1 + \tan^2 \theta_0),$$

$$P_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 p^*(r, \theta) \phi r \cos n\theta dr d\theta,$$

$$P_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 p^*(r, \theta) \phi r \sin n\theta dr d\theta,$$

$$K_{11} = -\pi \int_0^1 \bar{A}_1 \phi^2 r dr, \quad F_{11} = \pi \int_0^1 c \phi^2 r dr,$$

$$B_0 = -\frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} \phi (2\bar{A}_2 + \bar{A}_3 - \bar{B}_2) r dr. \quad (8)$$

그리고,  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{A}_3$ ,  $\bar{B}_2$  는  $n$ ,  $r$ ,  $\nu$ ,  $\phi$  와 힘 함수  $F$  의 형상함수( $r$  만의 함수)에 의해서 정의된 함수이다[17].  $\theta_0$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_0$  는 식 (4)와 (5)에서 정의된 상수이다. 가진함수  $p(r, \theta, t)$  는  $p(r, \theta, t) = p^*(r, \theta) \cos \lambda t$ , 즉 가진진동수가  $\lambda$  인 조화가진으로 가정하였다.

계 (6)에서 두 고유진동수  $\omega_1$  과  $\omega_2$  의 차이는 작고, 가진진동수  $\lambda$  는 고유진동수의 3 배와 가깝다고 가정하자. 즉 이 세 진동수는  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \lambda/3$  인 관계가 있다고 가정하자.  $\lambda$  가 고유진동수와 가까운 주공진의 경우에는 대역분기해석에서 실니코프형 호모클리닉케도가 존재하지 않는다[18]. 또한 두 가진진폭  $\mu_1$  과  $\mu_2$  중 하나는 실니코프형 호모클리닉케도의 존재 조건에 기여하지 못한다. 따라서, 본 연구에서는 해석의 간결함을 위해  $\mu_1 = 0$  인 경우로 가정한다. 이 경우는 식 (7)에서  $N_1 = 0$  일 때이고, 이로부터  $P_1$  과  $P_2$  가 다음과 같은 관계식을 만족해야 한다.

$$(A_0 - A_{11} \tan \theta_0) P_2 = (A_{21} - A_0 \tan \theta_0) P_1 \quad (9)$$

이 때  $\mu_2$  는 다음과 같이 정리된다.

$$\mu_2 = \frac{N_2}{M} = \frac{P_1 \sec \theta_0}{A_0 - A_1 \tan \theta_0}$$

or

$$\frac{P_2 \sec \theta_0}{A_{21} - A_0 \tan \theta_0} \quad (10)$$

계 (6)에서  $\mu_1 = 0$  인 경우 부공진을 조사하기 위해서 다음과 같이 이탈변수  $\beta$  와  $\sigma$  를 도입하자.

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\beta, \quad \lambda = 3\omega_2 + \varepsilon\sigma \quad (11a, b)$$

여기서,  $\beta$  는 두 고유진동수들 간의 이탈정도를 나타내고,  $\sigma$  는  $3\omega_2$  에 대한 가진진동수  $\lambda$  의 이탈정도를 나타낸다.

$\mu_1 = 0$  인 경우, 계 (6)에 다중시간법을 적용하기 위해  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2$  를 다음과 같이 가정하자.

$$x_i(t) = x_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{i1}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

여기서,  $T_i = \varepsilon^i t$ ,  $i=1, 2, \dots$   $\mu_1 = 0$  인 경우, 식 (6)에 식 (12)를 대입하고  $\varepsilon$  의 동일차수 계수들을 같게 두면 다음과 같다.

$\varepsilon^0$  의 계수;

$$D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} = 0, \quad (13a)$$

$$D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 x_{20} = \mu_2 \cos \lambda T_0. \quad (13b)$$

$\varepsilon^1$  의 계수;

$$D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = -2D_0 D_1 x_{10} - \delta\omega_1^2 D_0 x_{10} - \gamma\omega_1^2 (x_{10}^3 + x_{10}x_{20}^2), \quad (14a)$$

$$D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} = -2D_0 D_1 x_{20} - \delta\omega_2^2 D_0 x_{20} - \gamma\omega_2^2 (x_{20}^3 + x_{20}x_{10}^2). \quad (14b)$$

식 (13)의 해  $x_{10}$  와  $x_{20}$  는 다음과 같다.

$$x_{10} = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + cc,$$

$$x_{20} = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \Lambda \exp(i\lambda T_0) + cc. \quad (15)$$

여기서,  $\Lambda = \mu_2 / 2(\omega_2^2 - \lambda^2)$ ,  $cc$  는 앞 항들의 공액복소수를 나타내고,  $A_1(T_1)$  와  $A_2(T_1)$  는 복소함수이다. 식 (14)에 식 (15)를 대입하고 식 (11)을 적용하면

가해조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & i(2A_1' + \delta\omega_1^2 A_1) \\ & + \gamma\omega_1 \{A_1 \{3|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2\Lambda^2\} \\ & + \bar{A}_1 A_2^2 \exp[2i\beta T_1] \\ & + 2\Lambda \bar{A}_1 \bar{A}_2 \exp[(2\beta + \sigma)T_1]\} = 0 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} & i(2A_2' + \delta\omega_2^2 A_2) \\ & + \gamma\omega_2 \{A_2 \{2|A_1|^2 + 3|A_2|^2 + 6\Lambda^2\} \\ & + A_1^2 \bar{A}_2 \exp[-2i\beta T_1] + \Lambda \bar{A}_1^2 \exp[i(2\beta + \sigma)T_1] \\ & + 3\Lambda \bar{A}_2^2 \exp[i\sigma T_1]\} = 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

여기서,  $(\cdot)' = d(\cdot)/dT_1$  이다. 식 (16)을 실수부와 허수부로 분리하기 위해 다음과 같이 복소함수  $A_1(T_1)$  과  $A_2(T_1)$  를 정의하자.

$$A_i = \sqrt{2a_i} \exp[i\hat{\theta}_i], \quad i=1, 2 \quad (17)$$

여기서,  $a_i$ ,  $\hat{\theta}_i$ ,  $i=1, 2$  는  $T_1$  의 실함수이다. 식 (17)을 식 (16)에 대입하고 실수부와 허수부로 분리하면 다음과 같은 자율상미분방정식을 얻는다.

$$a_1' = -\delta\omega_1^2 a_1 + 2\gamma\omega_1 a_1 \{a_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) + \sqrt{2}\Lambda\sqrt{a_2} \sin(2\theta_1 + \theta_2)\}, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \theta_1' = & -\beta - \frac{\sigma}{3} + \gamma\omega_1 \{3a_1 + 2a_2 + \Lambda^2 \\ & + a_2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ & + \sqrt{2}\Lambda\sqrt{a_2} \cos(2\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} a_2' = & -\delta\omega_2^2 a_2 - \gamma\omega_2 \{2a_1 a_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \\ & - \sqrt{2}\Lambda a_1 \sqrt{a_2} \sin(2\theta_1 + \theta_2) \\ & - 3\sqrt{2}\Lambda a_2 \sqrt{a_2} \sin 3\theta_2\} \end{aligned}, \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} \theta_2' = & -\frac{\sigma}{3} + \gamma\omega_2 \{ (2a_1 + 3a_2 + 3\Lambda^2) \\ & + a_1 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ & + \frac{\Lambda a_1}{\sqrt{2}\sqrt{a_2}} \cos(2\theta_1 + \theta_2) \\ & + \frac{3\Lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{a_2} \cos 3\theta_2 \} \end{aligned}. \quad (18d)$$

여기서,  $\theta_1 = \hat{\theta}_1 - (\beta + \sigma/3)T_1$  이고  $\theta_2 = \hat{\theta}_2 - (\sigma/3)T_1$  이

다. 식 (18)을 Kovačić 과 Wiggins[4]의 섭동법을 적용하기 위한 적절한 형태로 변환하기 위해 다음과 같은 표준변환을 고려하자.

$$q_1 = \theta_1 - \theta_2, \quad q_2 = \theta_2, \quad p_1 = a_1, \quad p_2 = a_1 + a_2. \quad (19)$$

식 (18)을 식 (19)를 이용하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = & 2p_1(p_2 - p_1)\sin 2q_1 \\ & + 2\epsilon p_1[-c - \gamma b(p_2 - p_1)\sin 2q_1 \\ & + \sqrt{2}f\sqrt{p_2 - p_1}\sin(2q_1 + 3q_2)] + O(\epsilon^2), \quad (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ & + 2\epsilon p_1[-c - \gamma b(p_2 - p_1)\sin 2q_1] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & -b + (2p_1 - p_2)(1 - \cos 2q_1) \\ & + \epsilon[-\gamma b(p_1 + 2p_2) - \gamma b(p_2 - p_1)\cos 2q_1 \\ & - \frac{3}{\sqrt{2}}f\sqrt{p_2 - p_1}\cos 3q_2 \\ & + \frac{f(2p_2 - 3p_1)}{\sqrt{2}\sqrt{p_2 - p_1}}\cos(2q_1 + 3q_2)] + O(\epsilon^2), \quad (20b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\partial H}{\partial p_1} + \epsilon[-\gamma b(p_1 + 2p_2) \\ & - \gamma b(p_2 - p_1)\cos 2q_1] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 = & \epsilon[-2cp_2 - 2\gamma b p_1(p_2 - p_1)\sin 2q_1 \\ & + 3\sqrt{2}f(p_2 - p_1)^{3/2}\sin 3q_2 \\ & + 3\sqrt{2}f p_1\sqrt{p_2 - p_1}\sin(2q_1 + 3q_2)] + O(\epsilon^2), \quad (20c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{\partial H}{\partial q_2} + \epsilon[-2cp_2 \\ & - 2\gamma b p_1(p_2 - p_1)\sin 2q_1] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & -p_1 + 3p_2 - s + p_1 \cos 2q_1 \\ & + \epsilon\left[\frac{3f}{\sqrt{2}}\sqrt{p_2 - p_1}\cos 3q_2 \right. \\ & \left. + \frac{f p_1 \cos(2q_1 + 3q_2)}{\sqrt{2}\sqrt{p_2 - p_1}}\right] + O(\epsilon^2), \quad (20d) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_2} + O(\epsilon^2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \epsilon c = & \delta\omega_2/2\gamma, & \epsilon f = & \Lambda, & b = & \beta/\gamma\omega_2, \\ s = & \sigma/3\gamma\omega_2, & \tau = & \gamma\omega_2 T_1. \end{aligned} \quad (26)$$

그리고,  $\cdot = d/d\tau$  이다. 해밀턴 함수  $H$  는 다음과 같이 표현된다.

$$H(p_1, q_1, p_2, q_2) = H_0(p_1, q_1, p_2, q_2) + \epsilon H_1(p_1, q_1, p_2, q_2) \quad (21)$$

여기서,

$$H_0(p_1, q_1, p_2, q_2) = -bp_1 + \frac{3}{2}p_2^2 - sp_2 - p_1(p_2 - p_1)(1 - \cos 2q_1), \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} H_1(p_1, q_1, p_2, q_2) = & \sqrt{2}f\sqrt{p_2 - p_1}[(p_2 - p_1)\cos 3q_2 \\ & + p_1 \cos(2q_1 + 3q_2)] \end{aligned} \quad (22b)$$

좌표계  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  를 아래와 같이 표준변환하기로 하자.

$$\begin{aligned} x = & \sqrt{2p_1} \cos q_1, & y = & \sqrt{2p_1} \sin q_1, \\ I = & p_2, & \theta = & q_2. \end{aligned} \quad (23)$$

그러면 식 (20)과 해밀턴 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} = & y(b + 2I - x^2 - 2y^2) + \epsilon g^x + O(\epsilon^2) \\ = & -\frac{\partial H_0}{\partial y} + \epsilon g^x + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & x(-b + y^2) + \epsilon g^y + O(\epsilon^2) \\ = & \frac{\partial H_0}{\partial x} + \epsilon g^y + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\dot{I} = \epsilon g^I + O(\epsilon^2) = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} + \epsilon g^I + O(\epsilon^2) \quad (24c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & 3I - s - y^2 + \epsilon g^\theta + O(\epsilon^2) \\ = & \frac{\partial H_0}{\partial I} + \epsilon g^\theta + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (24d)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
g^x &= -cx + \gamma by(I + x^2 + y^2) \\
&+ \frac{fx(2I - x^2 - 2y^2)}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \sin 3\theta \\
&+ \frac{fy(5I - 2x^2 - 3y^2)}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \cos 3\theta, \quad (25a) \\
&= -\frac{\partial H_1}{\partial y} - cx + \gamma by(I + x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^y &= -cy - 3\gamma bxI - \frac{fx(I - y^2)}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \cos 3\theta \\
&- \frac{fy(2I - 2x^2 - y^2)}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \sin 3\theta, \quad (25b) \\
&= \frac{\partial H_1}{\partial x} - cy - 3\gamma bxI
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^I &= -2cI - \gamma bxy(2I - x^2 - y^2) \\
&+ 3fxy\sqrt{2I - x^2 - y^2} \cos 3\theta \\
&+ 3f(I - y^2)\sqrt{2I - x^2 - y^2} \sin 3\theta, \quad (25c) \\
&= -\frac{\partial H_1}{\partial \theta} - 2cI - \gamma bxy(2I - x^2 - y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^\theta &= \frac{f(3I - x^2 - 2y^2)\cos 3\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \\
&- \frac{fxy \sin 3\theta}{\sqrt{2I - x^2 - y^2}} = \frac{\partial H_1}{\partial I}, \quad (25d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0(x, y, I, \theta) &= \frac{3}{2}I^2 - sI \\
&- \frac{1}{2}y^2(2I - x^2 - y^2) - \frac{b}{2}(x^2 + y^2), \quad (26a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1(x, y, I, \theta) &= \\
&f\sqrt{2I - x^2 - y^2}[(I - y^2)\cos 3\theta - xy \sin 3\theta], \quad (26b)
\end{aligned}$$

### 3. 비섭동계( $\varepsilon=0$ )의 해석

계 (30)에 해당하는 비섭동계의 해를 조사하기 위해  $\varepsilon=0$ 로 두면, 다음과 같이 해밀턴 함수  $H$ 가  $H_0$ 인 해밀턴 계가 된다.

$$\dot{x} = y(b + 2I - x^2 - 2y^2), \quad (27a)$$

$$\dot{y} = x(-b + y^2), \quad (27b)$$

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = 3I - s - y^2. \quad (27c, d)$$

식 (27a)와 (27b)는  $\theta$ 와 무관하고, 식 (27c)에서  $I$ 가 상수라는 것을 알 수 있다. 따라서, 고정된  $I$  값에 대한 위상평면( $x-y$  평면)에서의 흐름(flow)을 조사할 수 있다.

식 (19)와 (23)으로부터 다음의 조건이 성립함을 알 수 있다.

$$x^2 + y^2 \leq 2I \quad (28)$$

즉, 위상평면( $x-y$  평면)에서 반경이  $\sqrt{2I}$ 인 원의 내부에서의 흐름만 조사하면 된다. 식 (27a)와 (27b)에서 고정점들( $\dot{x}=\dot{y}=0$ )은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\text{I. } (0, 0), \quad \text{II. } (0, \pm\sqrt{I - I_1}), \\
\text{III. } (\pm\sqrt{2(I + I_1)}, \pm\sqrt{b}). \quad (29)
\end{aligned}$$

여기서,  $I_1 = -b/2$ 이다.

$b < 0$ 인 경우,  $0 < I < I_1$ 에서는 원점(I형)이 유일한 고정점이고, 안정성 해석에 의하면 이는 중심점이다. 분기선  $I = I_1$ 에서 원점은  $y$ 축상에 두 개의 고정점(II형)을 만들면서 자신은 안정성을 바꾼다.  $I > I_1$ 에서는 안정점인 원점과 두 개의 중심점이 존재한다.

$b > 0$ 인 경우,  $0 < I < -I_1$ 에서는 중심점인 원점과  $y$ 축상에 두 개의 안장점이 존재한다. 분기선  $I = -I_1$ 에서  $y$ 축상에 두 개의 고정점들은 각각  $x^2 + y^2 = 2I$ 인 원 상에  $y$ 좌표가 동일한 두 개의 고정점(III형)을 만들면서 자신은 안정성을 바꾼다.  $I > -I_1$ 에서는 중심점인 원점,  $y$ 축상에 두 개의 중심점과  $x^2 + y^2 = 2I$ 인 원 상에 네 개의 안장점이 존재한다.

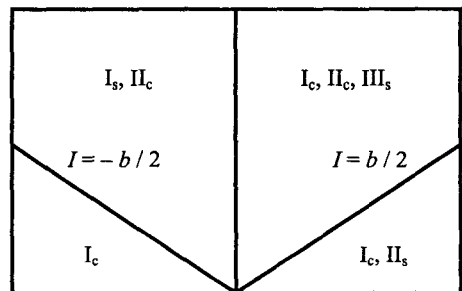


Fig. 2 Global bifurcation diagram ( $I-b$  space) corresponding to the unperturbed system

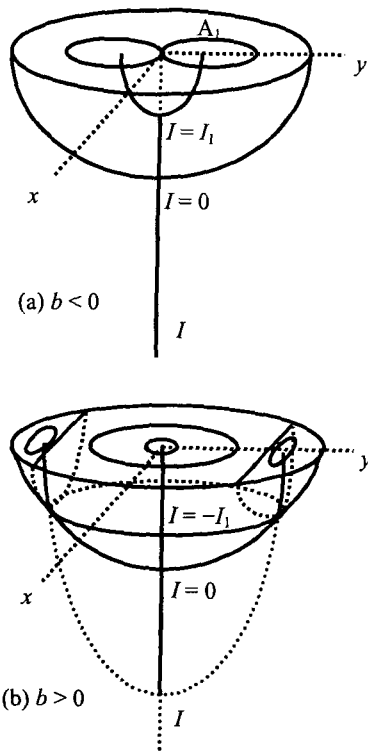


Fig. 3 Global bifurcation diagram ( $x$ - $y$ - $I$  space) corresponding to the unperturbed system.

Fig. 2는  $I$ - $b$  평면에서 대역분기구조를 나타낸 것으로 분기선과 각 영역에서 존재하는 고정점들의 종류를 보여준다. 아래첨자  $c$  와  $s$  는 각각 중심점과 안장점을 나타낸다. Fig. 3은  $(x, y, I)$  공간에서 (a)  $b < 0$  와 (b)  $b > 0$  일 때 대역분기 구조를 나타낸 것이다.  $b < 0$  이고  $I > I_1$  인 경우, 호모클리닉 궤도가 존재하므로 본 연구에서는 이 경우만을 고려한다. 이 경우 중심점을 둘러싸고 원점에 연결된 한 쌍의 대칭 호모클리닉 궤도에서  $H_0(x, y, I, \theta) = H_0(0, 0, I, \theta)$  이므로 식 (26a)로부터 다음과 같이 이 궤도의 방정식을 얻게 된다.

$$b(x^2 + y^2) + y^2(2I - x^2 - y^2) = 0 \quad (30)$$

또한 이 경우에는 4 차원 위상공간  $(x, y, I, \theta)$ 에서 다음과 같은 2 차원 불변다양체(invariant manifold)  $M_0$  와 3 차원 호모클리닉 다양체(homoclinic manifold)  $\Gamma$  가 존재한다.

$$M_0 = \{(x, y, I, \theta) | x=0, y=0, I > I_1, \theta \in T^1\}, \quad (31)$$

$$\Gamma = \{(x, y, I, \theta) | x = x^h(t, I), y = y^h(t, I), I > I_1, \theta = \int_0^t D_1 H_0(x^h(s, I), y^h(s, I), I) ds + \theta_0\} \quad (32)$$

여기서,  $(x^h(s, I), y^h(s, I))$  는 호모클리닉 궤도의 시간  $s$  에 대한 표현이다.  $\Gamma$  위의 임의의 궤적은  $t \rightarrow \pm\infty$  에 따라  $M_0$  로 접근한다.  $\theta_0 \in T^1$  은 초기조건에 의해 결정되는 상수이다. 식 (27c, d)로부터  $M_0$  위의 동역학은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = 3I - s. \quad (33)$$

이 식에서  $\dot{\theta} = 0$  일 때의  $I$  의 값, 즉  $I$  의 공진값(resonant value)  $I_r = s/3$  이다.  $I$ - $\theta$  평면에서 식 (33)의 흐름은 원이 된다.  $I = I_r$  인 원은 고정점으로 구성되어 있고  $I \neq I_r$  인 원은 주기궤도이다(Fig. 4).

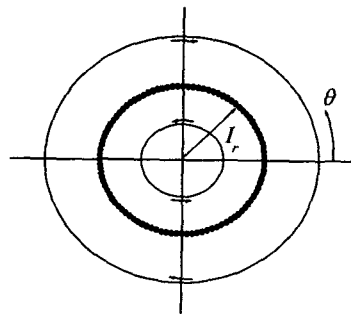


Fig. 4 Flow in  $(I, \theta)$  plane at  $x = y = 0$

$I_r > I_1$  이어야하므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$s > -\frac{3}{2}b \quad (34)$$

$(x, y)$ 공간에서의 호모클리닉 궤도는 4 차원 위상공간  $(x, y, I, \theta)$ 에서의 헤테로클리닉 연결이므로 이 궤적을 따라 불변다양체  $M_0$  를 떠날 때와 되돌아올 때  $\theta$  값의 차이가 발생한다. 이 위상차(phase shift)  $\Delta\theta$  를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta\theta \equiv \theta(+\infty, I_r) - \theta(-\infty, I_r) \quad (35)$$

$\Delta\theta$  를 계산하기 위해서는  $I=I_r$  에서 호모클리닉 궤도에 대한 표현이 필요하다. 이러한 계산은 좌표계  $(p_1, q_1)$  을 이용하는 것이 보다 용이하므로 식 (20a)와 (20b)에서  $\varepsilon=0$  인 경우를 고려하자.

$$\dot{p}_1 = 2p_1(I_r - p_1)\sin 2q_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_1}, \quad (36a)$$

$$\dot{q}_1 = -b - (I_r - 2p_1)(1 - \cos 2q_1) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1}. \quad (36b)$$

여기서,

$$\bar{H}(p_1, q_1) = -bp_1 - p_1(I_r - p_1)(1 - \cos 2q_1) \quad (37)$$

식 (36)에서  $q_1$  은  $\pi$  의 주기를 가지므로 0 에서  $\pi$  까지만 고려하자. 그러면, 식 (36)은 다음과 같은 고정점들을 가진다.

$$\begin{aligned} \text{중심점: } & (\hat{p}_1, \pi/2), \\ \text{안장점 } & (0, \hat{q}_1), (0, \pi - \hat{q}_1) \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{4}(2I_r + b), \quad \hat{q}_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( 1 + \frac{b}{I_r} \right). \quad (39a, b)$$

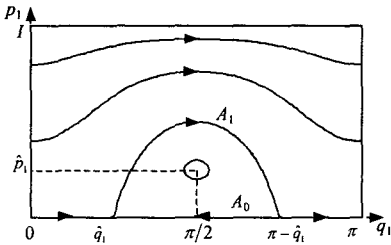


Fig. 5 Phase portrait in  $(p_1, q_1)$  plane when  $I > I_1$

좌표계  $(x, y)$  에서 호모클리닉 궤도  $A_1$  은 좌표계  $(p_1, q_1)$  에서 헤테로클리닉 궤도  $A_1$  으로 나타난다 (Fig. 5). 헤테로클리닉 궤도  $A_1$  에서  $t \rightarrow -\infty$  와  $t \rightarrow \infty$  일 때  $q_1$  의 좌표는 각각  $q_1(-\infty) = \hat{q}_1$ ,  $q_1(\infty) = \pi - \hat{q}_1$  이다. 이러한 헤테로클리닉 궤도  $A_1$  은  $\bar{H}(p_1, q_1) = \bar{H}(0, \hat{q}_1)$  으로서 식 (37)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$p_1 = I_r + \frac{b}{1 - \cos 2q_1}. \quad (40)$$

식 (40)을 (36b)에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{q}_1 = 2I_r(\cos 2\hat{q}_1 - \cos 2q_1) \quad (41)$$

식 (20b)와 (20d)에서  $\varepsilon=0$  으로 두고 두 식을 더한 후, 식 (40)과  $I=I_r$  을 대입하면  $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$  인 결과를 얻는다. 식 (23)에서  $q_2 = \theta$  이므로,  $\varepsilon=0$  일 때  $I=I_r$  에서  $\dot{\theta} = -\dot{q}_1$  이다. 이로부터 식 (35)에 정의된 위상차는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\Delta\theta = -q_1(\infty) + q_1(-\infty) = 2\hat{q}_1 - \pi. \quad (42)$$

#### 4. 섭동계 ( $\varepsilon \neq 0$ ) 의 해석

부분공간(subspace)  $(x=y=0)$  은 섭동후 ( $\varepsilon \neq 0$ ), 불변다양체가 아니지만,  $M_0$  에 충분히 가까운  $M_\varepsilon$  은 국소불변다양체(local invariant manifold)로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_\varepsilon = \{ & (x_\varepsilon, y_\varepsilon, I, \theta) \mid x_\varepsilon(I, \theta) = 0 + \varepsilon x_1(I, \theta) \\ & + O(\varepsilon^2), y_\varepsilon(I, \theta) = 0 + \varepsilon y_1(I, \theta) + O(\varepsilon^2), \\ & I > I_1, \theta \in T^1 \} \end{aligned} \quad (43)$$

$M_\varepsilon$  에서의 흐름은 식 (24c)와 (24d)의  $x$  와  $y$  에 각각 식 (43)에서 정의된  $x_\varepsilon$  과  $y_\varepsilon$  을 대입함으로써 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{I} = \varepsilon(-2cI + 3\sqrt{2}fI^{3/2} \sin 3\theta) + O(\varepsilon^3) \quad (44a)$$

$$\dot{\theta} = 3I - s + \varepsilon \frac{3f}{\sqrt{2}} \sqrt{I} \cos 3\theta + O(\varepsilon^2) \quad (44b)$$

$I=I_r$  근방에서 불변다양체의 동역학을 조사하기 위해 다음과 같은 변환식을 이용한다.

$$I = I_r + \sqrt{\varepsilon}h, \quad \tau = \tilde{\tau}/\sqrt{\varepsilon}. \quad (45)$$

여기서  $\tilde{\tau}$  는  $\tau$  보다 느린시간을 나타낸다. 위 식을 이용하면,  $I_r$  근방에서  $M_\varepsilon$  에서의 흐름은 다



음과 같이 표현된다.

$$h' = -3\sqrt{2}f_r^{3/2}(K_1 - \sin 3\theta) + \sqrt{\varepsilon}G(h, \theta) + O(\varepsilon), \quad (46a)$$

$$\theta' = 3h + \sqrt{\varepsilon}F(h, \theta) + O(\varepsilon). \quad (46b)$$

여기서,

$$K_1 = \frac{\sqrt{2}c}{3f\sqrt{I_r}}, \quad F(h, \theta) = \frac{3f\sqrt{I_r}}{\sqrt{2}} \cos 3\theta$$

$$G(h, \theta) = -\frac{3f\sqrt{I_r}}{\sqrt{2}} h(2K_1 - 3\sin 3\theta)$$

이고, 프라임은  $\tilde{r}$  에 대한 미분을 나타낸다. 식 (45)는  $\varepsilon=0$  일 때, 다음과 같은 해밀턴 함수를 가지는 해밀턴 계이다.

$$L(h, \theta) = \frac{3}{2}h^2 + \sqrt{2}f_r^{3/2}(3K_1\theta + \cos 3\theta) \quad (47)$$

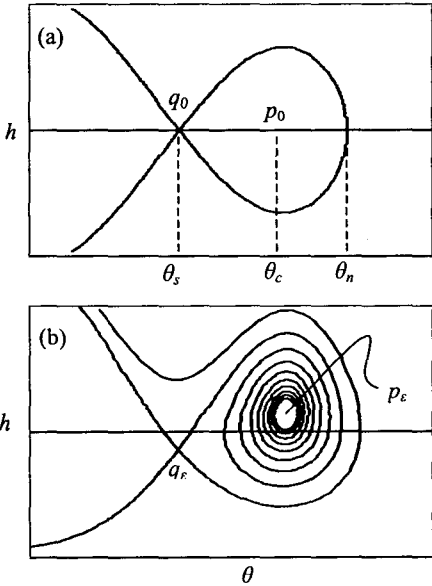


Fig. 6 Dynamics on  $(I, \theta)$  plane in the neighborhood of  $I = I_r$  for  $x = y = 0$ .

섭동전의 계( $h' = -L_\theta$ ,  $\theta' = L_h$ )는  $|K_1| \leq 1$  인 경우 다음과 같은 두 개의 고정점을 가진다(Fig. 6).

$$\text{중심점: } p_0 = (0, \theta_c), \quad \text{안장점: } q_0 = (0, \theta_s). \quad (48)$$

여기서,  $\theta_s = (1/3)\sin^{-1} K_1$ ,  $\theta_c = (1/3)(\pi - \sin^{-1} K_1)$  이고,  $\theta$  는  $2\pi/3$  의 주기를 가지므로  $-\pi/6$  에서  $\pi/2$  까지만 고려하였다. 섭동 후, 안장점  $q_0$  는 역시 안장점인  $q_\varepsilon$  이 되고, 중심점  $p_0$  는 흡입점(sink)  $p_\varepsilon$  이 된다. 안장점  $q_0$  를 연결하는 호모클릭리닉레도 내의 주기레도들은 섭동 후에 깨어지고 이 영역은 근사적으로  $p_\varepsilon$  의 흡인영역을 나타낸다.  $q_0$  를 연결하는 호모클릭리닉레도는  $L(h, \theta) = L(0, \theta_s)$  에 의해 표현된다.  $I_r$  근방(neighborhood)에서  $M_\varepsilon$  상의 동역학에 관심이 있으므로  $I_r$  의 근방을  $A_\varepsilon$  으로 다음과 같이 정의하자.

$$A_\varepsilon = \{(x, y, h, \theta) \mid x=0, y=0, |h| < \varepsilon C, \theta \in T^1\} \quad (49)$$

여기서,  $C$  는 근방이 섭동전의 호모클릭리닉레도를 포함할 만큼 충분히 큰 0 보다 큰 상수이다.  $A_\varepsilon$  의 안정한 다양체  $W^s(A_\varepsilon)$  와 불안정한 다양체  $W^u(A_\varepsilon)$  는 각각  $M_\varepsilon$  의 안정한 다양체  $W^s(M_\varepsilon)$  와 불안정한 다양체  $W^u(M_\varepsilon)$  의 부분집합(subset)이다. 4 차원 위상공간에서  $A_\varepsilon$  을 벗어나면서  $p_\varepsilon$  을 떠난 궤적이  $A_\varepsilon$  로 돌아와서 실니코프형 호모클릭리닉레도를 만들 수 있다. 이러한 궤도가 존재하려면 2 개의 조건을 만족해야 한다[4]. 고차원 멜니코프 이론(higher dimensional Melnikov theory)을 이용하여  $W^u(p_\varepsilon) \cap W^s(A_\varepsilon) \neq \emptyset$  인 조건을 발견한다. 이는  $p_\varepsilon$  을 떠나는 궤도가  $A_\varepsilon$  으로 돌아오는 조건을 의미한다. 두번째 조건은  $p_\varepsilon$  을 떠나  $A_\varepsilon$  으로 돌아오는 궤도가  $A_\varepsilon$  내의  $p_\varepsilon$  의 흡인영역으로 돌아와야 한다는 것이다. 그러면 그 궤도는  $A_\varepsilon$  내에서 시간이 경과함에 따라  $p_\varepsilon$  에 점근적으로 접근하게 되어 그림과 같은  $p_\varepsilon$  을 떠나  $p_\varepsilon$  으로 돌아오는 실니코프형 호모클릭리닉레도가 완성된다.

첫 번째 조건은 두 다양체  $W^u(p_\varepsilon)$  와  $W^s(A_\varepsilon)$  의 거리를 의미하는 멜니코프 함수[19-21]를 다음과 같이 계산하여 구할 수 있다.

$$M^I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial H_0}{\partial x} g^x + \frac{\partial H_0}{\partial y} g^y + \frac{\partial H_0}{\partial I} g^I \right] dt \quad (50)$$

여기서, 피적분함수는  $I = I_r$  에서  $\Gamma$  상의 임의의

위치에서 계산된다.  $H_0, g^x, g^y, g'$ 는 식 (25)에 주어져 있다. 이를 대입하면, 식 (50)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M' = -[H_1(\infty) - H_1(-\infty)] - b \int_{\infty}^0 [c + \gamma b(b + 3I_r) \cot q_1] \csc q_1^2 \dot{q}_1 dt \quad (51)$$

여기서,  $H_1(\infty)$ 과  $H_1(-\infty)$ 는 각각  $t \rightarrow \infty$ 와  $t \rightarrow -\infty$ 일 때  $H_1(x, y, I_r, \theta)$ 를 정의한 것이다.  $t \rightarrow \infty$ 일 때  $\theta \rightarrow \theta_c + \Delta\theta$ 이고,  $t \rightarrow -\infty$ 일 때는  $\theta \rightarrow \theta_c$ 이다. 그리고,  $t \rightarrow \pm\infty$ 일 때  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 이므로  $H_1(\infty) = H_1(0, 0, I_r, \theta_c + \Delta\theta)$ 와  $H_1(-\infty) = H_1(0, 0, I_r, \theta_c)$ 로 계산할 수 있다.  $q_1(-\infty) = \hat{q}_1$ ,  $q_1(\infty) = \pi - \hat{q}_1$ 이므로 식 (26b)를 이용하면, 식 (51)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M' = \sqrt{2} \mathcal{I}_r^{3/2} [\cos 3\theta_c - \cos 3(\theta_c + \Delta\theta)] - b \int_{\hat{q}_1}^{\pi - \hat{q}_1} [c + \gamma b(b + 3I_r) \cot q_1] \csc q_1^2 dq_1 \quad (52) = \sqrt{2} \mathcal{I}_r^{3/2} [\cos 3\theta_c - \cos 3(\theta_c + \Delta\theta)] - 2bc \cot \hat{q}_1$$

식 (52)에서 식 (39b), (42)와 (48)을 이용하여  $\theta_c, \Delta\theta, \hat{q}_1$ 을  $K_1$ 과  $b/I_r$ 로 나타내고 계산하면  $M' = 0$ 인 조건은 다음과 같다.

$$K_1 = \pm \frac{(1 + 2K_2)^2}{\sqrt{1 + 8K_2 + 24K_2^2}} \quad (53)$$

여기서,  $K_2 = b/I_r$ 이다. 식 (46)에서  $K_1$ 의 부호는  $c/f$ 의 부호에 의해 결정된다.  $c$ 와  $f$ 는 각각 감쇠와 가진진폭의 함수로서 이 두 값이 양수이면  $K_1$ 은 양수이다. 그리고  $I_r > I_1 > -b/2$ 이므로  $-2 < K_2 < 0$ 이다.

두 번째 조건은  $p_c$ 을 떠나  $A_c$ 으로 돌아오는 궤도의  $\theta$ 좌표  $\theta_c + \Delta\theta$ 가  $A_c$  내의  $p_c$ 의 흡인영역을 근사적으로 나타내는  $\theta_n$ 과  $\theta_s$  사이의 영역에 존재해야 한다는 것을 의미하는 것으로 다음과 같다.

$$\theta_s < \theta_c + \Delta\theta + 2m\pi/3 < \theta_n, \quad m \in \text{Integer} \quad (54)$$

$\theta_s$ 와  $\theta_c$ 는 식 (48)에 주어져 있고,  $L(0, \theta_n) = L(0, \theta_s)$  즉

$$\sqrt{2} \mathcal{I}_r^{3/2} [3K_1(\theta_n - \theta_s) + \cos 3\theta_n - \cos 3\theta_s] = 0 \quad (55)$$

으로부터  $\theta_n$ 을 구할 수 있다.  $\mathcal{I}_r \neq 0$ 이므로 식 (54)는  $\theta_s$ 를  $K_1$ 에 대해 표현하고 정리하면 다음과 같다.

$$-\sqrt{1 - K_1^2} + 3K_1\theta_n - K_1 \sin^{-1} K_1 + \cos 3\theta_n = 0 \quad (56)$$

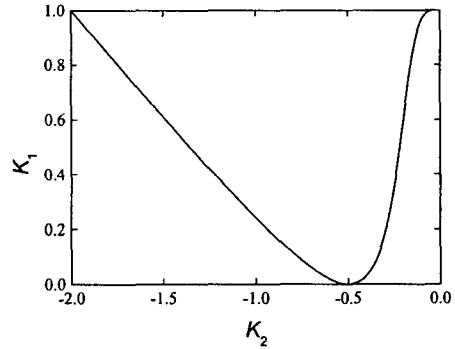


Fig. 7 Plot of  $K_1$  as a function of  $K_2$  as the condition for  $M' = 0$ .

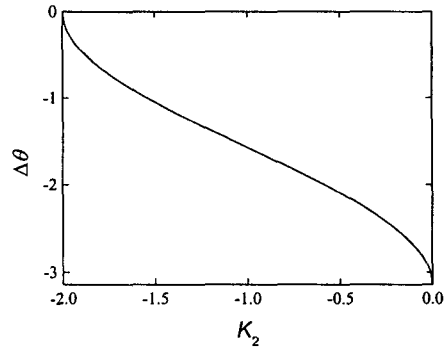


Fig. 8 Plot of  $\Delta\theta$  as a function of  $K_2$ .

Fig. 7은 식 (53)을 나타낸 것으로  $M' = 0$ 인 조건을 만족하는  $K_1$ 과  $K_2$ 의 값을 보여준다. Fig. 8은 위상차  $\Delta\theta$ 를  $K_2$ 의 함수로서 나타낸 것이다. Fig. 9는  $K_2$ 의 함수로서  $M' = 0$ 인 조건을 만족하는  $\theta_c + \Delta\theta$ 를 나타낸 것이다. 곡선  $C_1, C_2, C_3$ 는 각각 식 (54)에서  $m = 0, 1, 2$ 에 해당한다.  $m$ 이 증가할수록 곡선들은 간격을 좁히면서 곡선  $C_3$  사이에 위치한다. 따라서 실니코프형 호모클리닉궤도

가 존재하는  $K_2$ 의 범위는 곡선  $C_2$ 에 의해 근사적으로 주어진다. 그리고 이에 상응하는  $K_1$ 은 Fig. 7로부터 구하여질 수 있다.

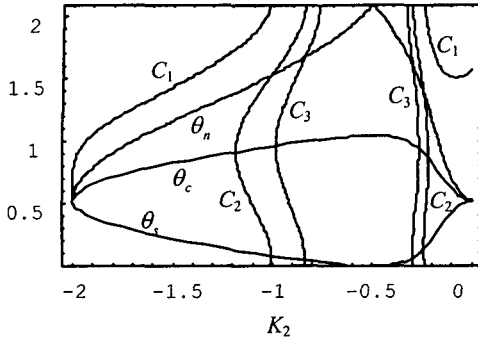


Fig. 9 Plot of  $\theta_c + \Delta\theta$  as a function of  $K_2$ .

## 5. 결론

일대일 내부공진을 가진 불완전원판의 저조화 공진 응답에 대한 대역분기해석을 수행하여 실니코프형 호모클리닉레도가 존재하는 조건을 발견하였다.

불완전원판의 비감쇠자유진동의 운동방정식에 감쇠와 가진을 추가한 후, 갤러킨 방법으로 연립 상미분방정식을 구하고 가진진동수가 고유진동수의 3 배에 가까운 부공진을 가정하였다. 다중시간법을 적용하여 자율 상미분방정식을 구하고, Kovačić 과 Wiggins의 대역분기 해석방법을 수행하였다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2000-000-00289-0)지원으로 수행되었음.

## 참고문헌

- (1) Kovačić, G., and Wiggins, S., 1992, "Orbit Homoclinic to Resonances, with an Application to Chaos in a Model of the Forced and Damped Sine-Gordon Equation", *Physica D*, Vol. 57, pp. 185-225.
- (2) Feng, Z. C., and Sethna, P. R., 1990, "Global Bifurcation and Chaos in Parametrically Forced Systems with One-One Resonance", *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 5, pp. 201-225.
- (3) Yang, X. L., and Sethna, P. R., 1991, "Local and Global Bifurcations in the Parametrically Excited Vibrations of Nearly Square Plate", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 26, pp. 199-220.
- (4) Yang, X. L., and Sethna, P. R., 1992, "Non-linear Phenomena in Forced Vibrations of a Nearly Square Plate: Antisymmetric Case", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, pp. 413-441.
- (5) Feng, Z. C., and Sethna, P. R., 1993, "Global Bifurcations in the Motion of Parametrically Excited Thin Plates", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, pp. 389-408.

- (6) Tien, W.-M., Sri Namachchivaya, N., and Bajaj, A. K., 1994, "Non-linear Dynamics of a Shallow Arch under Periodic Excitation - I. 1:2 Internal Resonance", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 349-366.
- (7) Tien, W.-M., Sri Namachchivaya, N., and Malhotra, N., 1994, "Non-linear Dynamics of a Shallow Arch under Periodic Excitation - II. 1:1 Internal Resonance", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 367-389.
- (8) Malhotra, N., and Sri Namachchivaya, N., 1995, "Global Bifurcations in Externally Excited Two-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, pp. 85-109.
- (9) Feng, Z. C., and Liew, K. M., 2000, "Global Bifurcations in Parametrically Excited Systems with Zero-to-One Internal Resonance", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 21, pp. 249-263.
- (10) Sridhar, S., Mook, D. T., and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, pp. 359-373
- (11) Sridhar, S., Mook, A. T., and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 159-170
- (12) Nayfeh, T. A., and Vakakis, A. F., 1994, "Subharmonic traveling waves in a Geometrically Non-linear Circular plate", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 233-245.
- (13) Lee, W. K., and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-mode Interaction", *American Society of Mechanical Engineering Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 1015-1022
- (14) Yeo, M. H., and Lee, W. K., 2002, "Corrected Solvability Conditions for Non-linear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 653-665.
- (15) Lee, W. K., and Yeo, M. H., 2003, "Non-linear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, in press.
- (16) Lee, W. K., Yeo, M. H., and Samoilenko, S. B., 2003, "The Effect of the Number of Nodal Diameters on Non-linear Interactions in Two Asymmetric Vibration Modes of a Circular Plate", submitted to *Journal of Sound and Vibration*.
- (17) Efstathiades, G. J., 1971, "A New Approach to the Large-deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin's Procedure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, pp. 231-253.
- (18) 이원경, 장서일, 2003, 강제진동중인 평판의 이동과 관련된 비선형동역학, 한국과학재단 특정기초연구 결과보고서
- (19) Guckenheimer, J., and Holmes, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag New York Inc.
- (20) Wiggins, S., 1988, *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag New York Inc.
- (21) Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag New York Inc.