

미분변환법에 의한 탄성 지반상의 열림 균열을 가진 Euler-Bernoulli보의 진동 해석

신 영 재* · 황 기 섭** · 윤 중 학** · 유 영 찬***

Key Words : Differential Transformation Method(미분변환법), Elastic Foundation(탄성지반).

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to apply differential transformation method to vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with open cracks on elastic foundation. The governing equation of motion of beam with open cracks on elastic foundation is derived. The concept of differential transformation is briefly introduced. The cracks are modeled by massless substitute spring. The effects of the crack location, size and the foundation constants, on the natural frequencies of the beam, are investigated.

1. 서 론

일반적으로 탄성 지반상의 보나 봉은 기본 구조물로서 다양한 공학분야에서 연구되어졌고, 또한 보나 봉에 내재하는 균열의 영향을 측정하는 방법에 대해 많은 연구자들이 제안하였다. 그렇지만 탄성 지반상의 균열을 가진 보나 봉에 관한 연구는 상대적으로 적은 연구를 보이고 있다.

E. Winkler는 탄성 지반상에서의 보에 대한 해석은 기저의 반력이 보의 변형량에 비례한다고 가정하였고[1], Rosas는 Winkler 지반 모델의 동적거동과 안정성에 대한 평가와 근사해를 구하는 방법에 대해 연구하였으며[2], Farghaly 등은 Winkler 지반상에서 이심된 집중 질량과 축방향 힘이 자유진동에 미치는 영향을 연구하였고[3], Razaqpur 등은 Winkler지반모델의 Euler-Bernoulli보를 해석하였다[4]. 또한 Pasternak은 Winkler지반에 전단력에 의한 상호 작용에 대한 지반모델을 제안 하였으며[5], Valsangkar 등은 Pasternak 지반 모델의 Euler-Bernoulli 보를 해석하였다[6].

Yuen은 균열이 있는 부분에서 강성이 감소하는 것으로 수학적 모델을 구성하여 균열에 대한 연구를 수행하였고[7], Rizos 등은 하나 또는 두개의 균열에 대해 외팔보의 고

유진동수 변화를 측정하였다[8]. 그리고 Ostachowicz 등은 보를 균열이 있는 위치를 기준으로 보를 나누어 고려하고, 그 부분에 질량을 고려하지 않은 회전 스프링으로 연결된 것으로 나타내었으며[9,10], Seong은 탄성지반상의 열림균열을 가진 보의 진동에 대하여 연구하였다[11].

대부분의 공학문제는 초기값과 경계조건, 그리고 편미분 방정식으로 표현되어서 해석적 해를 구하기 어려워 유한차분법(Finite difference method)과 유한요소법(Finite element method) 등의 수치해석 방법을 사용하였으나 이러한 방법들은 복잡하고 정확한 해를 구하기 위해 많은 시간이 필요로 한다. 따라서 간단한 순환관계에 의해서 해를 구하고 정확도도 대단히 높은 미분변환법이 개발되었다.

미분변환법은 Zhou에 의해 제안된 수치해석법으로 선형, 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 제안 되었고[12], Malik 등은 연속시스템에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였으며[13], Chen 등은 스프링시스템의 비선형 진동해석과 축하중을 받는 Timoshenko 보의 진동해석에 미분변환법을 적용하였으며[14,15], Ho 등은 비균질 탄성지반위의 가변다면 보에 대한 진동해석을 통해 미분 변환법의 수렴성 및 타당성을 검증하였으며[16], 미분변환법은 다양한 공학적 문제에 활발히 적용 및 연구되고 있는 수치해석 방법이다[17,18].

본 연구는 미분변환법을 이용하여 탄성 지반상의 열림균열을 가지는 Euler-Bernoulli보의 고유 진동수를 해석하였고, 또 탄성지반상의 Euler-Bernoulli보에 대한 기존의 수치해석 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성을 검증하였으며, 미분변환법의 특성을 고찰하였다.

* 책임저자, 안동대학교 기계공학부
E-mail : yjshin @ andong.ac.kr
Tel : (054) 820-5405, Fax : (054) 823-5405

** 안동대학교 기계공학부 대학원

*** 안동대학교 건축공학과

2. 지배 방정식

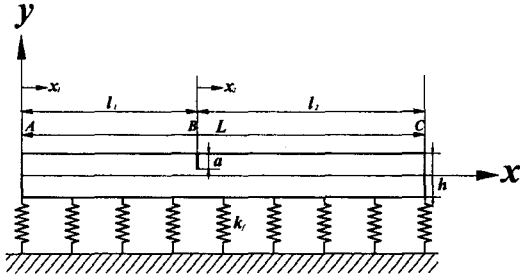


Figure 1. Structural system of study

2.1 Winkler 지반상의 Euler-Bernolli 보

Fig 1와 같이 Winkler 지반의 Euler-Bernolli보의 전체 길이는 L 이고 균열이 있는 B부분을 기준으로 길이가 l_1 과 l_2 로 분리되어진 두개의 보로 가정하고, 두 부분으로 분리된 두개의 보를 질량이 없는 스프링으로 연결되어 있는 것으로 가정하였다. x_1 은 A에서 균열이 있는 B부분까지 x_2 는 균열이 있는 B부분에서 C까지의 x 축 변위이다. Winkler 지반의 Euler-Bernolli보의 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + k_f y_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

여기서 E 는 보의 종탄성 계수(Young's modulus), I 는 단면에 대한 관성 모멘트(moment of inertia), ρ 는 보의 밀도, A 는 보의 단면적이며, k_f 는 Winkler 지반계수(modulus of Winkler foundation)이다.

식 (1)에서 일반해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$y_i(x, t) = Y_i(x) e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하여 $e^{j\omega t}$ 을 소거하고, 무차원 변수 $\xi_i = \frac{x_i}{L}$ ($i = 1, 2$)를 적용하여 식 (1)을 무차원화 하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi^4} - (\lambda^4 - K) Y_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$\lambda^4 = \rho A \frac{L^4 \omega^2}{EI}, \quad K = \frac{k_f L^4}{EI}$$

2.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernolli 보

Pasternak 지반상의 Euler-Bernolli보는 식 (1)과 같은 Winkler 지반상의 Euler-Bernolli보의 지배방정식에 전단력을 고려하여야 한다. 지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + k_f y_i - G_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

여기서 G_0 는 지반상의 횡 탄성 계수(shear modulus of foundation)이다.

식 (4)의 일반해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$y_i(x, t) = Y_i(x) e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하여 $e^{j\omega t}$ 을 소거하고, 무차원 변수 $\xi_i = \frac{x_i}{L}$ ($i = 1, 2$)를 적용하여 식 (4)을 무차원화 하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi^4} - s^2 \frac{d^2 Y_i}{d\xi^2} - (\lambda^4 - K) Y_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

$$s^2 = \frac{G_0 L^2}{EI}$$

2.3 경계조건과 균열에 대한 해석

fig 1과 같이 균열이 있는 B부분을 중심으로 하나의 보를 길이가 l_1 과 l_2 로 분리되어진 두개의 보로 나누어 고려하였고, 질량이 없는 스프링으로 연결되어 있다고 가정하였다. 균열이 있는 위치에서 연속조건은 균열이 있는 B부분의 양쪽에서 변위, 모멘트 그리고 전단력이 같아야 하고, 회전 변위와 모멘트 간에 다음과 같은 관계식이 존재하게 된다[10].

$$Y_1(l_1) = Y_2(l_1) \quad (7)$$

$$Y_1''(l_1) = Y_2''(l_1) \quad (8)$$

$$Y_1'''(l_1) = Y_2'''(l_1) \quad (9)$$

$$Y_1'(l_1) + c Y_1''(l_1) = Y_2'(l_1) \quad (10)$$

여기서 $l_1 = \frac{x_1}{L}$ 이고, 식 (10)에서 c 는 스프링의 탄성 계수로 열림 균열일 경우 다음과 같이 표현된다.[9]

$$c=5.346hf(\xi) \quad (11)$$

$$f(\xi) = 1.8624\xi^2 - 3.95\xi^3 + 16.375\xi^4 - 37.226\xi^5 + 76.81\xi^6 - 126.9\xi^7 + 172\xi^8 - 143.9\xi^9 + 66.56\xi^{10} \quad (12)$$

여기서 ξ 는 a/h 이고, a 는 균열의 깊이, h 는 보의 높이이다.

보에 대한 경계조건은 고정-고정, 고정-단순지지, 고정-미끄럼에 대하여 고려하였다. 이들 경계조건에 대한 조건식은 다음과 같다.

1) 고정 - 고정

$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0$$

$$Y(L) = 0, Y'(L) = 0 \quad (13)$$

2) 고정 - 단순지지

$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0$$

$$Y(L) = 0, Y''(L) = 0 \quad (14)$$

3) 고정 - 미끄럼

$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0$$

$$Y'(L) = 0, Y'''(L) = 0 \quad (15)$$

3. 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두었으며, 기본연산에 의한 변환 관계식으로부터 순환관계식을 유도하여 해를 구하며, 선형과 비선형 문제의 해를 구하는데 유용한 방법이다[12~16].

임의의 원함수(original function)에 대한 미분 변환은 다음과 같이 정의 된다

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (16)$$

여기서 $Y(k)$ 를 T -function 이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분역변환은 다음과 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (17)$$

여기서 미분변환의 정의 식 (16)를 미분역변환 식 (17)에 대입하여 다시 쓰면 원함수 $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (18)$$

상기 식 (18)에서 미분변환은 테일러 시리즈가 유래되었다는 것을 알 수 있다.

상기의 정의로부터 다음과 같은 미분변환법에 관한 기본적인 연산을 구할 수 있다.

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$z(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$Z(k) = (k+1) Y(k+1)$
$z(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$	$Z(k) = (k+1)(k+2) Y(k+2)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \begin{cases} \delta(k-m) & \text{at } k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$

실제의 적용에 있어서는 $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려한 다음과 같이 표시된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (19)$$

여기서 n 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정되어진다.

3.1 Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분변환법의 적용

Winkler 지반상의 Euler-Bernoulli 보의 무차원 운동 방정식(3)에 미분변환의 기본 연산을 적용하면 다음과 같이 표현 된다.

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}_i(k+4)$$

$$-(\lambda^4 - K)\bar{Y}_i(k) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

여기서 \bar{Y}_i 은 T-function이다.

3.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 미분변환법의 적용

Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 무차원 지배 방정식(6)에 미분변환을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}_i(k+4) \\ & - s^2(k+1)(k+2)\bar{Y}_i(k+2) \\ & - (\lambda^4 - K)\bar{Y}_i(k) = 0, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (21)$$

3.3 연속조건과 경계조건

Winkler 지반상과 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보의 연속조건(7~10)에 미분변환을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{k=0}^n l_1^k \bar{Y}_1(k) = \sum_{k=0}^n 0^k \bar{Y}_2(k) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times l_1^{k-2} \bar{Y}_1(k) \\ & = \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times 0^{k-2} \bar{Y}_2(k) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times (k-2) \times l_1^{k-3} \bar{Y}_1(k) \\ & = \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times (k-2) \times 0^{k-3} \bar{Y}_2(k) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k \times l_1^{k-1} \bar{Y}_1(k) + c \times \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times l_1^{k-2} \bar{Y}_1(k) \\ & = \sum_{k=0}^n k \times 0^{k-1} \bar{Y}_2(k) \end{aligned} \quad (25)$$

Winkler 지반상과 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli 보의 경계조건(13~15)에 미분변환을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

고정 - 고정

$$\bar{Y}_1(0) = 0, \quad \bar{Y}_1(1) = 0$$

$$\sum_{k=0}^n l_2^k \bar{Y}_2(k) = 0, \quad \sum_{k=0}^n k \times l_2^{k-1} \bar{Y}_2(k) = 0 \quad (26)$$

고정 - 단수지지

$$\bar{Y}_1(0) = 0, \quad \bar{Y}_1(1) = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k \times l_2^{k-1} \bar{Y}_2(k) = 0 \\ & \sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times l_2^{k-2} \bar{Y}_2(k) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

고정 - 미끄럼

$$\bar{Y}_1(0) = 0, \quad \bar{Y}_1(1) = 0$$

$$\sum_{k=0}^n k \times l_2^{k-1} \bar{Y}_2(k) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times (k-2) \times l_2^{k-3} \bar{Y}_2(k) = 0 \quad (28)$$

제 4장 수치해석 결과 및 고찰

탄성지반상의 Euler-Bernoulli보의 진동해석을 하기 위하여, 미분 변환된 운동방정식과 각 경계 조건식으로 다음과 같은 매트릭스 방정식을 구성한다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}(0) \\ \bar{Y}(1) \\ \cdot \\ \bar{Y}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

상기 방정식의 해인 $\bar{Y}(0), \bar{Y}(1), \dots, \bar{Y}(n)$ 의 근은 0이 아닌 근을 가지기 위해서는 상기 식의 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

상기 식으로부터 탄성 지반상의 Euler-Bernoulli 보에 대한 고유진동수(natural frequency)를 구할 수 있다. 본 연구에서 사용된 물성치는 다음과 같다.

E = 206.8 GPa,

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,

전단면의 폭 b = 0.25m, 전단면의 높이 h = 0.25m

4.1 winkler 지반상의 Euler-Bernoulli보

Table 1은 winkler 지반상의 Euler-Bernoulli보에 관하여 균열이 없을 때 K의 변화에 의한 고유진동수를 나타내고, Table 2는 보의 중간 지점에 균열을 가지고 있을 때 균열의 깊이가 0.02, 0.04, 0.2의 위치에서 고유진동수를 나타내었다. Table 1, 2의 결과를 Seong에 의해 수행된 연구[11]의 결과와 비교하였고, 그 결과는 일치함을 알 수 있다. Table 3에서 균열 위치와 K값의 변화에 따라서 고유진동수를 나타내었다. 균열의 깊이가 작고 K값이 커질수록 고유진동수가 증가함을 알 수 있다.

Table 1 A comparison of natural frequencies of the uncrack beam on winkler foundation(fixed-fixed) between Seong[11] and Differential Transformation($x_1=1/2$)

K	1st		2nd		3rd	
	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T
0	82.8742	82.8742	228.446	228.446	447.846	447.846
1	82.9570	82.9570	228.476	228.476	447.476	447.860
5	83.2871	83.2871	228.596	228.596	447.922	447.922
10	83.6980	83.6979	228.746	228.746	447.999	447.999
50	86.9148	86.9148	229.943	229.943	448.611	448.611

Table 2 A comparison of natural frequencies of beam with open crack on winkler foundation(fixed-fixed) between Seong[11] and Differential Transformation($x_1=1/2$, K=10)

a/h	1st		2nd		3rd	
	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T
0.02	83.6401	83.6401	228.746	228.746	447.567	447.567
0.04	83.4755	83.4755	228.746	228.746	446.346	446.346
0.2	79.4647	79.4647	228.746	228.746	419.413	419.413

Table 3 The variations of natural frequencies for beam on winkler foundation(fixed-supported) for various K and a/h. ($x_1=1/2$)

K	a/h	1	2	3
0	0.02	57.0742	185.055	385.833
	0.2	54.3206	183.362	364.755
	0.5	44.8864	177.943	318.631
7	0.02	57.9095	185.314	385.957
	0.2	55.1976	183.623	364.887
	0.5	45.9439	178.213	318.782
35	0.02	61.1367	186.348	386.455
	0.2	58.5744	184.666	365.413
	0.5	49.9502	179.287	319.384

4.2 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli보

Table 4은 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli보에 관하여 균열이 없을 때 K의 변화에 의한 고유진동수를 나타내고, Table 5는 보의 중간 지점에 균열을 가지고 있을 때 균열의 깊이가 0.02, 0.04, 0.2의 위치에서 고유진동수를 나타내었다. Table 4, 5의 결과를 Seong에 의해 수행된 연구 [11]의 결과와 비교하였고, 그 결과는 일치함을 알 수 있다. Table 6에서 균열 위치와 K값의 변화에 따라서 고유진동수를 나타내었다. Table 7에서는 고정-미끄럼의 경계조건에서 winkler 지반과 Pasternak지반상의 Euler-Bernoulli보의 고유진동수를 나타내었다. 균열의 깊이가 깊어 질수록 고유진동수가 감소하고 그 차이는 winkler 지반상의 Euler-Bernoulli보 보다 Pasternak 지반상의 Euler-Bernoulli보에서 더 큰 차이가 났다.

Table 4 A comparison of natural frequencies of the uncrack beam on Pasternak foundation(fixed-fixed) between Seong[11] and Differential Transformation($x_1=1/2$, s=5)

K	1st		2nd		3rd	
	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T
0	105.028	105.028	260.583	260.583	484.205	484.205
1	105.093	105.093	260.609	260.609	484.219	484.219
5	105.354	105.354	260.714	260.714	484.276	484.276
10	105.679	105.679	260.846	260.846	484.347	484.347
50	108.245	108.245	261.896	261.896	484.913	484.913

Table 5 comparison of natural frequencies of beam with open crack on Pasternak foundation(fixed-fixed) between Seong[11] and Differential Transformation($x_1=1/2$, K=10, s=5)

a/h	1st		2nd		3rd	
	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T	Seong [11]	D T
0.02	105.578	105.578	260.846	260.846	483.874	483.874
0.04	105.292	105.292	260.846	260.846	482.539	482.539
0.2	98.1936	98.1936	260.846	260.846	453.034	453.034

Table 6 The variations of natural frequencies for beam on Pasternak foundation(fixed-supported) for various K and a/h. ($x_1=1/2$, s=5)

K	a/h	1	2	3
0	0.02	84.439	221.201	425.498
	0.2	78.812	219.525	401.585
	0.5	58.370	214.142	349.763
7	0.02	85.006	221.418	425.611
	0.2	79.419	219.744	401.705
	0.5	59.187	214.367	349.900
35	0.02	87.236	222.284	426.062
	0.2	81.802	220.616	402.183
	0.5	62.348	215.261	350.449

Table 7 A comparison of natural frequencies for Euler-Bernoulli beam between Winkler and Pasternak foundation (fixed-sliding) for $\alpha_1=1/2$, $K=10$, $s=5$

a/h	1st		2nd		3rd	
	Winkler	Pasternak	Winkler	Pasternak	Winkler	Pasternak
0.02	23.800	39.718	112.490	145.192	276.682	314.898
0.04	23.799	39.692	112.257	144.880	276.567	314.745
0.2	23.774	38.991	106.577	137.230	273.804	311.061
0.5	23.657	35.413	88.4349	112.571	265.691	300.363

6. 결론

본 연구는 탄성 지반상에서 균열을 가지는 Euler-Bernoulli보에 대하여 미분변환법을 적용하고, 다양한 균열 조건에 대한 수치해석을 수행하였고, 탄성 지반상에서 균열을 가지는 Euler-Bernoulli보의 진동 해석에서 기존 해석 결과와 비교하여 미분변환법을 이용한 본 해석의 타당성을 검증하였다.

미분변환(Differential Transformation)방법은 기존의 수치해석방법에 비해 적용이 쉽고, 수렴이 빠르고, 효율적이다.

참 고 문 헌

(1) Hetenyi, M. 1946, "Beams on Elastic Foundation.", The University of Michigan Press, Michigan.

(2) De Rosa, M. A. 1989, "Stability and dynamics of beams on Winkler elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18, 377-388.

(3) Farghaly, S. H. and Zeid, K. M. 1995, "An exact frequency equation for an axially loaded beam-mass-spring system resting on a Winkler elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, 185(2), 357-363.

(4) Razaqpur, A. G. and Shah, K. R. 1991, "Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations", International Journal of Solids Structures, 27(4), 435-454.

(5) Rades, M. 1970, "Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation", International Journal of Solids Structures, 6, 739-756.

(6) Valsangkar, A. J. and Pradhanang, R. 1988, "Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, 217-225.

(7) Yuen, M. M. F. 1985, "A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever", Journal of

Sound and Vibration, 103(3), 301-310.

(8) Rizos, P. F. Aspragathos, N. and Dimarogonas, A. D. 1990, "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes", Journal of Sound and Vibration, 138(3), 381-388.

(9) Narkis, Y. 1994, "Identification of crack location in vibration simply supported beams", Journal of Sound and Vibration, 172(4), 549-558.

(10) Ostachowicz, W. M. and Krawczuk, M. 1991, "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam", Journal of Sound and Vibration, 150(2), 191-201.

(11) 성경운, 2001, "탄성 지반상의 열림 균열을 가진 보의 진동 특성", 경북대학교 2001학년도 학위 논문집

(12) Zhou J. K. 1986, "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits", Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese).

(13) Malik. Moinuddin and Dang. H. 1998, "Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation", Applied Mathematics and Computation, vol. 96, pp 17-26.

(14) Chen, Cheng. Jen and Wu, W. J, 1994 "Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System", Computer and Structures, vol. 59, no. 4, pp. 631-639.

(15) Chen, C. K and Ho, S. H, 1999 "Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform", International Journal of Mechanical Sciences, vol.41, pp. 1339-1356.

(16) Ho, S. H and Chen, C. K, 1998. "Analysis of General elastically end restrained Non-Uniform Beams using Differential Transform", Applied Mathematical Modeling, vol. 22, pp. 219-234.

(17) 신영철. 신영재, 2001 "Differential Transformation방법에 의한 가변단면을 갖는 봉의 진동해석", 한국해양공학회 2001년도 춘계학술대회 논문집, pp. 229-233.

(18) 권경문, 신영재, 유영순, 2001 "미분변환에 의한 비균질 보의 진동해석", 한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp.617-621.