한국소음진동공학회 2003년도 추계학술대회논문집, pp.802~807.

끝단 질량과 일반적인 단부조건을 갖는 변단면 보의 자유진동

Free Vibrations of Tapered Beams with General Boundary Conditions and Tip Masses

오 상 진† · 이 병 구* · 박 광 규** · 이 종 국***

Sang Jin Oh, Byoung Koo Lee, Kwang Kyou and Jong Kook Lee

Key Words : free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), tapered beam(변단면 보), translational spring(수직방향 스프링), rotational spring(회전스프링), tip mass(끝단 질량), mass moment of inertia(질량관성모멘트)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the free vibration characteristics of tapered beams with translational and rotational springs and tip masses at the ends. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory. The governing differential equation for the free vibrations of linearly tapered beams is solved numerically using the corresponding boundary conditions. Numerical results are compared with existing solutions by other methods for cases in which they are available. The lowest three natural frequencies are calculated over a wide range of non-dimensional system parameters: the translational spring parameter, the rotational spring parameter, the mass ratio and the dimensionless mass moment of inertia.

1. 서 론

보는 기둥, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 기본 구조단위로서 다양한 조건을 갖는 보의 정, 동적 거동에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다. 구조계의 진동특성 및 안정성을 지배하는 인자들의 영향을 검토하는 문제는 공학관련 분야에서 매우 실제적이고 중요한 문제로 취급되고 있다.[1] 지배인자들 중 특히 축방향력, 지지조건, 수학적 모형, 추가질량, 단면변화 등은 보의 횡방향 진동 특성 및 안정성에 중요한 영향을 미치는 인자로 알려져 있어 이에 대한 폭넓은 연구가 이루어지고 있다.

이 논문에서는 부재 양쪽 끝단이 수직방향 및 회전 스프링으로 지지되고, 단부에 집중질량을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 고찰하고자 한다. 이를 위하여 해석대상 보의 단부조건에 대한 경계조건을 적용하고, 단면제원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 변화높이, 변화폭 및 정방형 변단면 보를 고려하였으며, 다양한 제변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

† 정회원, 담양대학 토목과
E-mail : sjoh@damyang.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679
* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과
** 정회원, 대전대학교 토목공학과
** 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

2. 수학적 모형

Fig. 1은 부재 양쪽 끝단이 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되어 있고, 단부에 집중질량을 갖는 지간길이 l인 변단면 보의 기하학적 형상 및 제변수를 나타낸 것이다. 이 그림에서 보축상 임의점 x위치에서의 단면적과 단면2차모멘트는 각각 A와 I로 나타내었으며, 좌측단에서의 단면적과 단면2차모멘트는 A_a와 I_a, 우측단에서의 단면적과 단면2차모멘트는 A_b와 I_b로 표시하였다. 또한 K_{ra}와 K_{rb}는 회전 스프링상수, K_{ta}와 K_{tb}는 수직방향 스프링상수를 의미하며, M_a와 M_b는 집중질량의 크기, J_a와 J_b는 질량관성모멘트를 나타낸다. 그리고 $w = w(x, t)$는 횡방향 진동변위이다.

Bernoulli-Euler 보이론을 적용하면 Fig. 1에 보인 변단면 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

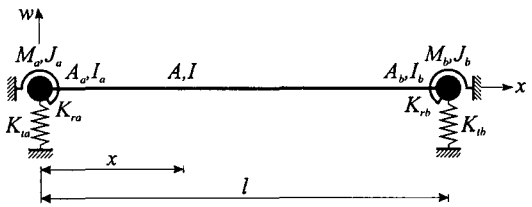

Fig. 1 Tapered beam with general boundary condition.

식 (1)에서 E와 ρ는 각각 보 재료의 탄성계수 및 밀도이다. Fig. 1에 보인 대상 보가 조화진동을 한다면, 횡방향 변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t),\ i=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

식 (2)에서 w_x는 조화진동의 진폭으로 x만의 함수이며, ω_i는 고유각진동수(rad/s), i는 모드번호이다.

본 연구에서는 해석대상 보로서 좌측단의 단면적 및 단면2차모멘트를 기준으로 식 (3), (4)에 나타낸 바와 같이 단면적과 단면2차모멘트가 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보를 택하였다.

$$A = A_a[1+(\alpha-1)x/l]^m \tag{3}$$

$$I = I_a[1+(\alpha-1)x/l]^n \tag{4}$$

식 (3), (4)에서 α는 좌측단과 우측단에서의 단면제원 d_a와 d_b의 비로서 이후 단면비(d_b/d_a, section ratio)라 한다. 그리고 m과 n은 단면형상계수로서 본 연구에서 택한 변화높이 변단면(depth taper), 변화폭 변단면(breadth taper) 및 정방형 변단면(square taper)에 대한 이들 값은 식 (5)에 나타낸 바와 같다.[2]

depth taper	$m=1,\ n=3$	(5a)
breadth taper	$m=1,\ n=1$	(5b)
square taper	$m=2,\ n=4$	(5c)

식 (1)에 식 (2)~(4)를 대입하여 정리하면 식 (6)에 보인 바와 같이 단면제원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = -\frac{2n(\alpha-1)}{1+(\alpha-1)\xi}\frac{d^3\eta}{d\xi^3} - \frac{n(n-1)(\alpha-1)^2}{[1+(\alpha-1)\xi]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + C_i^2[1+(\alpha-1)\xi]^{m-n}\eta \tag{6}$$

식 (6)에서 ξ와 η는 각각 보축상 임의점의 위치를 나타내는 x와 진폭 w_x를 지간길이 l로 정규화한 것이며, C_i는 무차원 고유진동수(frequency parameter), k_{ra}와 k_{rb}는 회전 스프링상수(rotational spring parameter), k_{ta}와 k_{tb}는 수직방향 스프링상수(translational spring parameter)로서 그 내용은 식 (7)~(13)과 같다.

$$\xi = \frac{x}{l},\quad \eta = \frac{w_x}{l} \tag{7,8}$$

$$C_i = \omega_i l^2\sqrt{\frac{\rho A_a}{EI_a}},\ i=1,2,3,\cdots \tag{9}$$

$$k_{ta} = \frac{K_{ta}l^3}{EI_a},\quad k_{ra} = \frac{K_{ra}l}{EI_a} \tag{10,11}$$

$$k_{tb} = \frac{K_{tb}l^3}{EI_a},\quad k_{rb} = \frac{K_{rb}l}{EI_a} \tag{12,13}$$

좌측단 단부에 발생하는 전단력과 휨모멘트는 식 (14), 우측단에서는 식 (15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$EI_a\frac{d^3w_x}{dx^3} = -K_{ta}w_x + \omega_i^2 M_a w_x \tag{14a}$$

$$EI_a\frac{d^2w_x}{dx^2} = K_{ra}\frac{dw_x}{dx} - \omega_i^2 J_a\frac{dw_x}{dx} \tag{14b}$$

$$EI_b\frac{d^3w_x}{dx^3} = K_{tb}w_x - \omega_i^2 M_b w_x \tag{15a}$$

$$EI_b\frac{d^2w_x}{dx^2} = -K_{rb}\frac{dw_x}{dx} + \omega_i^2 J_b\frac{dw_x}{dx} \tag{15b}$$

식 (14), (15)를 식 (7)~(13)의 무차원 변수들을 이용하여 나타내면, 식 (16), (17)에 나타낸 바와 같이 좌측단 및 우측단에서의 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (k_{ta} - C_i^2 m_a\theta)\eta = 0 \tag{16a}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - (k_{ra} - C_i^2 j_a\theta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \tag{16b}$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} - \alpha^{-n}(k_{tb} - C_i^2 m_b\theta)\eta = 0 \tag{17a}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \alpha^{-n}(k_{rb} - C_i^2 j_b\theta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \tag{17b}$$

식 (16), (17)에서 m_a와 m_b는 식 (18)에 나타낸 바와 같이 양단부의 집중질량의 크기와 보 전체질량의 비(mass ratio)이며, j_a와 j_b는 식 (19)에 보인 바와 같이 무차원 질량관성모멘트(dimensionless mass moment of inertia)이다. 그리고 이 식들에서 θ는 변단면 보를 동일한 지간길이의 등단면 보로 변환한 경우 보 단면의 단면적 A_m과 좌측단에서의 단면적 A_a의 비로서 변화높이와 변화폭 변단면인 경우 식 (20a), 정방형 변단면인 경우에는 식 (20b)와 같다.

Table 1 Comparison of results between this study and other methods

Geometry	i	Reference	
		This study	Reference
$\alpha=1$[(a)]	1	0.5503	0.5507
$k_{ta}=k_{ra}=10^8$, $k_{tb}=0.1$, $k_{rb}=0$	2	15.51	15.52
$m_a=0$, $m_b=10$, $j_a=j_b=0$	3	50.06	50.01
$\alpha=1$[(a)]	1	0.3601	0.3602
$k_{ta}=k_{ra}=10^8$, $k_{tb}=10$, $k_{rb}=0$	2	15.43	15.44
$m_a=0$, $m_b=100$, $j_a=j_b=0$	3	49.97	50.01
$\alpha=1$[(b)]	1	19.63	19.61
$k_{ta}=k_{ra}=10^8$, $k_{tb}=10^8$, $k_{rb}=10$	2	55.50	55.44
$m_a=0$, $m_b=0$, $j_a=j_b=0$	3	110.7	110.6
$\alpha=1$[(b)]	1	1.406	1.407
$k_{ta}=k_{ra}=1$, $k_{tb}=k_{rb}=1$	2	4.988	4.986
$m_a=0$, $m_b=0$, $j_a=j_b=0$	3	25.64	25.63
$\alpha=1$[(c)]	1	0.8679	0.8679
$k_{ta}=k_{ra}=10^8$, $k_{tb}=k_{rb}=0$	2	3.391	3.391
$m_a=0$, $m_b=1$, $j_a=0$, $j_b=1$	3	24.02	24.02
Depth taper, $\alpha=0.8$[(d)]	1	0.7890	0.7890
$k_{ta}=10^8$, $k_{ra}=1$, $k_{tb}=k_{rb}=0$	2	10.47	-
$m_a=0$, $m_b=1$, $j_a=j_b=0$	3	37.12	-
Depth taper, $\alpha=0.6$[(d)]	1	0.1077	0.1077
$k_{ta}=10^8$, $k_{ra}=0.1$, $k_{tb}=k_{rb}=0$	2	7.924	-
$m_a=0$, $m_b=10$, $j_a=j_b=0$	3	31.36	-

(a): Ref. [4], (b): Ref. [5], (c): Ref. [6], (d): Ref. [7]

$$m_a=\frac{M_a}{\rho A_m l},\quad m_b=\frac{M_b}{\rho A_m l} \tag{18a,b}$$

$$j_a=\frac{J_a}{\rho A_m l^3},\quad j_b=\frac{J_b}{\rho A_m l^3} \tag{19a,b}$$

$$\theta=\frac{\alpha+1}{2},\quad \theta=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{3} \tag{20a,b}$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (6)의 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하기 위해 문헌 [3]에서와 동일한 수치해석방법을 사용하였다. 해석과정의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (6)의 미분방정식에는 불확정량인 미지의 무차원 고유진동수 C_i항이 포함되어 있으므로 먼저 C_i값을 가정하여 미분방정식에 대입하고, 좌측단에서 우측단까지 수치적분을 시행한다. 가정한 값의 대상구조에 대한 고유치 여부 판단은 수치적분에서 얻어진 우측단에서의 결과가 식 (17)의 경계조건을 만족하는지 여부로 판단한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 무차원 고유진동수 C_i는 행렬값 탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다. 본 연구에서는 해석대상 보에 대한 단면변화, 단면비 α, 무차원 스프링상수 k_{ta}, k_{ra}, k_{tb}, k_{rb} 질량비 m_a, m_b 무차원 질량관성모멘트 j_a, j_b를 입력하면 무차원 고유진동수가 출력되도록 컴퓨터 프로그램을 작성하였으며, 해석 예에서는 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 다양한 제변수 조합으로 이루어지는 해석 예에 대한 문헌[4-7]들의 결과와 Table 1에 비교하였다. 이 표에서 본 연구와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Fig. 2~4는 각각 ($m_a=m_b=0$, $j_a=j_b=0$), ($m_a=m_b=0.5$, $j_a=j_b=0$), ($m_a=m_b=0.5$, $j_a=j_b=0.1$)이고, 단면비 $\alpha=1.2$인 변화높이 변단면 보의 좌, 우측단의 수직방향 스프링상수가 동일한 값($k_{ta}=k_{tb}$)으로 변화하는 경우 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 실선은 $k_{ra}=k_{rb}=1$, 일점쇄선은 $k_{ra}=k_{rb}=10$, 점선은 $k_{ra}=k_{rb}=100$에 대한 결과이다.

Fig. 2~4에서 수직방향 스프링상수($k_{ta}=k_{tb}$)가 증가하는 경우 각 모드별 무차원 고유진동수는 완만한 증가경향을 보인 후 일정구간에서 가파른 증가양상을 보이다가 다시 완만하게 증가하여 일정값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 한편 회전 스프링상수($k_{ra}=k_{rb}$)가 클수록 고유진동수가 크지만, 가파른 증가경향을 보이는 구간에서는 거의 유사한 값을 나타냄을 알 수 있다.

Fig. 5~7은 각각 ($m_a=m_b=0$, $j_a=j_b=0$), ($m_a=m_b=0.5$, $j_a=j_b=0$), ($m_a=m_b=0.5$, $j_a=j_b=0.1$)이고, 단면비 $\alpha=1.2$인 변화높이 변단면 보의 좌, 우측단의 회전 스프링상수가 동일한 값($k_{ra}=k_{rb}$)으로 변화하는 경우 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 실선은 $k_{ta}=k_{tb}=1$, 일점쇄선은 $k_{ta}=k_{tb}=10$, 점선은 $k_{ta}=k_{tb}=100$에 대한 결과이다. Fig. 5~7에서 회전 스프링상수($k_{ra}=k_{rb}$)가 증가하는 경우 각 모드별 무차원 고유진동수는 항상 증가하지만 제1모드인 경우에는 거의 일정한 값을 나타냄을 알 수 있다.

Fig. 8, 9는 각각 ($k_{ta}=k_{tb}=1$, $k_{ra}=k_{rb}=1$), ($k_{ta}=k_{tb}=10$, $k_{ra}=k_{rb}=10$)이고, 단면비 $\alpha=2$인 변화폭 변단면 보의 좌, 우측단의 집중질량비가 동일한 값($m_a=m_b$)으로 변화하는 경우 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 10, 11은 각각 ($k_{ta}=k_{tb}=1$, $k_{ra}=k_{rb}=1$), ($k_{ta}=k_{tb}=10$, $k_{ra}=k_{rb}=10$)이고, $m_b=0$, $j_b=0$, $\alpha=2$인 변화폭 변단면 보의 좌측단

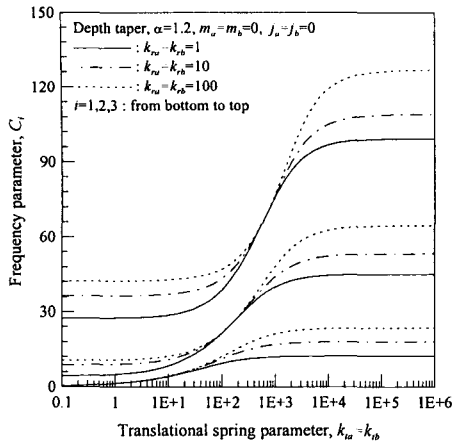

Fig. 2 C_i vs k_{ta}= k_{tb} curves(m_a= m_b=0, j_a= j_b=0).

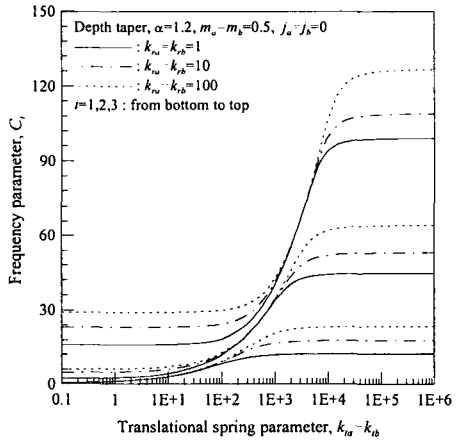

Fig. 3 C_i vs k_{ta}= k_{tb} curves(m_a= m_b=0.5, j_a= j_b=0).

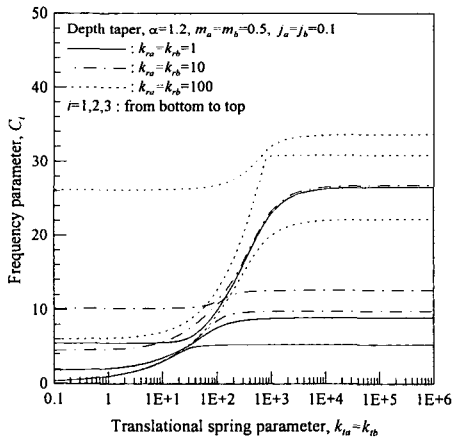

Fig. 4 C_i vs k_{ta}= k_{tb} curves(m_a= m_b=0.5, j_a= j_b=0.1).

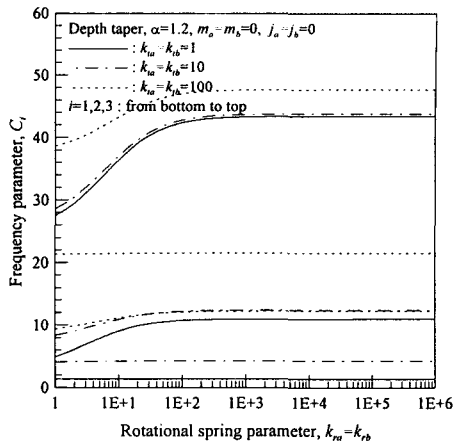

Fig. 5 C_i vs k_{ra}= k_{rb} curves(m_a= m_b=0, j_a= j_b=0).

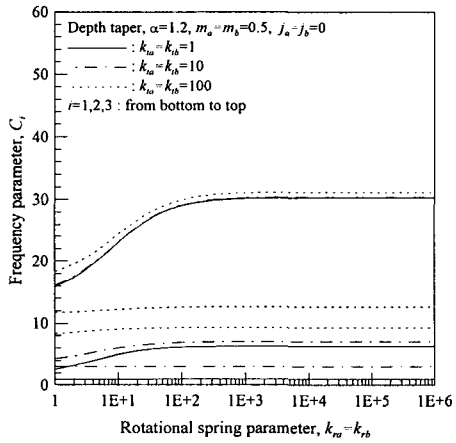

Fig. 6 C_i vs k_{ra}= k_{rb} curves(m_a= m_b=0.5, j_a= j_b=0).

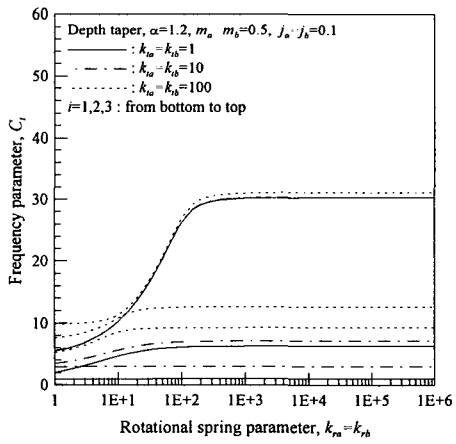

Fig. 7 C_i vs k_{ra}= k_{rb} curves(m_a= m_b=0.5, j_a= j_b=0.1).

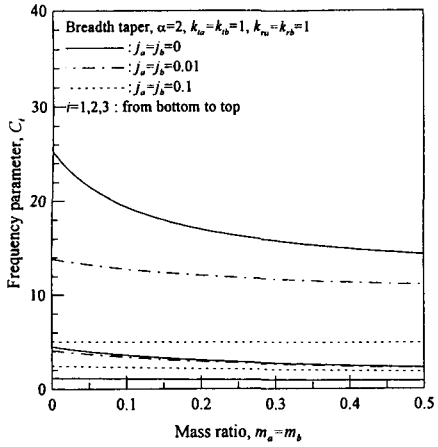

Fig. 8 C_i vs $m_a=m_b$ curves($k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=1$).

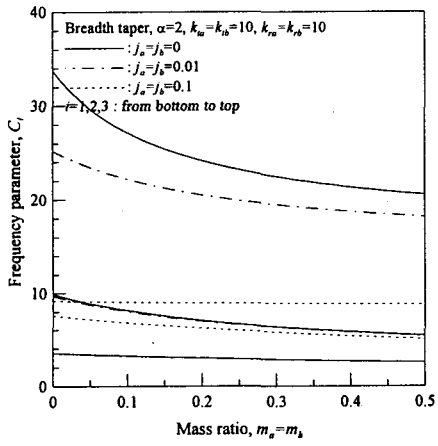

Fig. 9 C_i vs $m_a=m_b$ curves($k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=10$).

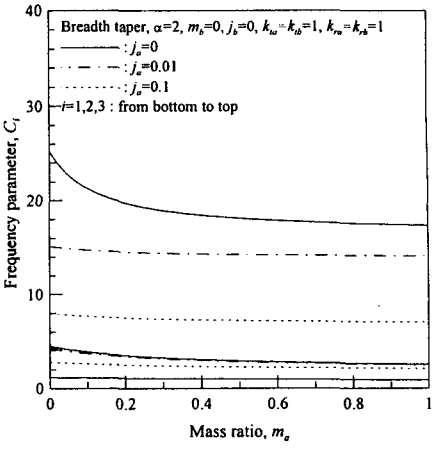

Fig. 10 C_i vs m_a curves($k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=1$).

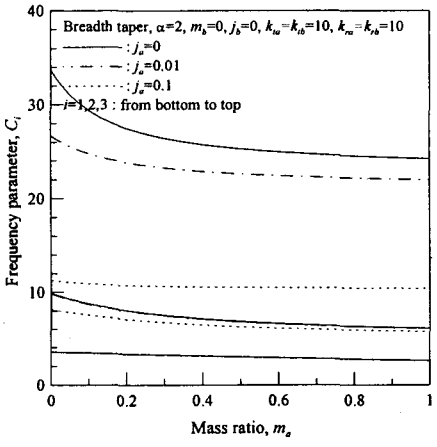

Fig. 11 C_i vs m_a curves($k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=10$).

의 집중질량비 m_a의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 8~11에서 질량비가 증가하는 고유진동수는 항상 감소하며, 고차모드일수록 감소율이 큼을 알 수 있다.

Fig. 12, 13은 각각 ($k_{ta}=k_{tb}=1$, $k_{ra}=k_{rb}=1$), ($k_{ta}=k_{tb}=10$, $k_{ra}=k_{rb}=10$)이고, 단면비 α=1.5인 정방형 변단면 보의 좌, 우측단의 무차원 질량관성모멘트가 동일한 값($j_a=j_b$)으로 변화하는 경우 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 실선은 $m_a=m_b=0$, 점선은 $m_a=m_b=0.5$에 대한 결과이다. Fig. 14, 15는 각각 ($k_{ta}=k_{tb}=1$, $k_{ra}=k_{rb}=1$), ($k_{ta}=k_{tb}=10$, $k_{ra}=k_{rb}=10$)이고, $m_b=0$, $j_b=0$, α=1.5인 정방형 변단면 보의 좌측단의 무차원 질량관성모멘트 j_a의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림에서 실선은 $m_a=0$, 점선은 $m_a=1$에 대한 결과이다. Fig. 12~15에서 무차원 질량관성모멘트가 증가하는 고유진동수는 항상 감소하며, 저차모드보다 고차모드에서 감소율이 큼을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문은 일반적인 단부조건과 끝단 질량을 갖는 변단면 보의 자유진동에 관한 연구이다. 해석대상 보로서 단면계원이 보축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보를 택하였다. 대상 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식에 대응하는 경계조건을 적용하고, 이를 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석기법으로 해석하여 고유진동수를 구하였다. 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구

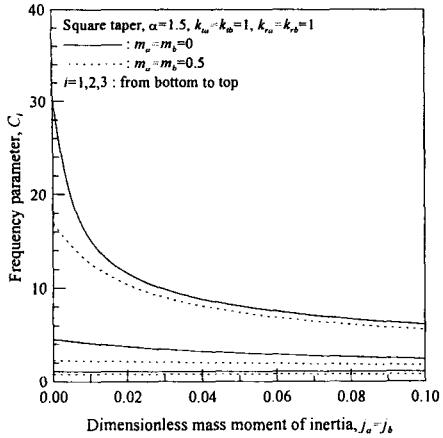

Fig. 12 C_i vs j_a=j_b curves(k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=1).

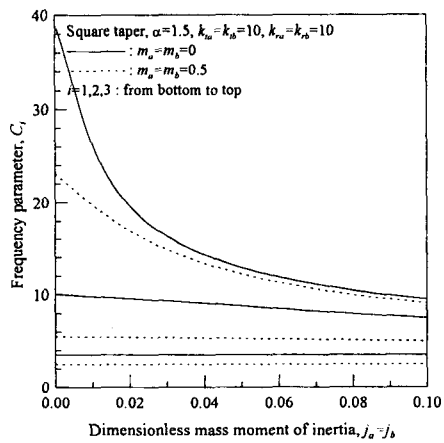

Fig. 13 C_i vs j_a=j_b curves(k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=10).

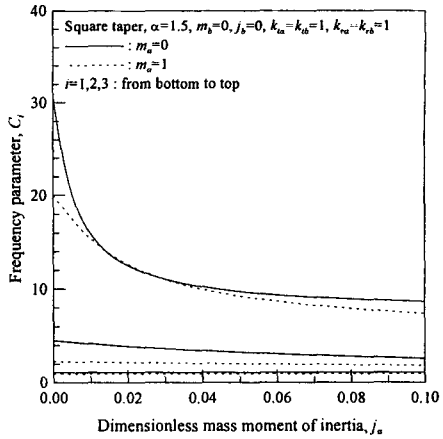

Fig. 14 C_i vs j_a curves(k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=1).

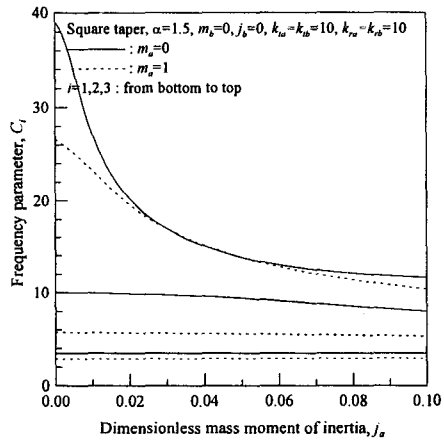

Fig. 15 C_i vs j_a curves(k_{ta}=k_{tb}=k_{ra}=k_{rb}=10).

결과를 검증하였으며, 회전 및 수직방향 스프링상수, 질량비, 무차원 질량관성모멘트 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화를 고찰하였다.

5. 참 고 문 헌

(1) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold.

(2) Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams," Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp.19-36.

(3) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.

(4) Kim, H. K. and Kim, M. S., 2001, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp.771-784.

(5) Li, W. L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.

(6) Uscilowska, A. and Kolodziej, J.A., 1998, "Free Vibration of Immersed Column Carrying a Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 216, pp.147-157.

(7) Aucilleo, N. M., 1996, "Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, pp.25-34.