한국소음진동공학회 2003년도 추계학술대회논문집, pp.984~987.

경사진 봉의 진동 해석
Vibration Analysis of Tapered Bar

박 석주*
Sok Chu Park

Key Words : Lateral vibration of bar(봉의 횡진동), Ritz Method(Ritz 법)

ABSTRACT

This paper discusses the lateral vibration of a bar which has its tip free. The uniform bar has a solution by summation of some simple exponential functions. But if its shape is not uniform, its solution could be by Bessel's function, or mathematical solution could not be existed. Even if the solution of Bessel's function exists, as Bessel function is a series function, we must get the solution by numerical method.

Hereby the author proposes the solution of the matrix method by Ritz's method, and proposes a new deflection shape

1 장 서 론

균일 단면봉의 횡진동 해는 간단한 지수함수의 합으로 구할 수 있다. 그러나 단면이 균일하지 않으면 수학적인 해를 구할 수 없는 경우가 많고, 구해지더라도 급수해의 형태로 구하여 진다. 급수해의 경우에는 결국 수치해석법에 의하여 그 값을 구하여야 한다.

원추형 봉의 횡진동 해는 1879 년 Kirchhoff [1] 가 한쪽단은 고정되어 있고, 다른 단은 자유인 경계조건에 대하여 처음 구하였고, 1922 년에 D. Wrinch [2] 에 의하여 Bessel 함수의 형태로 10 차까지의 고유진동수를 구하였다. 또 쐐기형의 봉에 대하여서도 1879 년 Kirchhoff [1] 가 고유진동수를 구하였다.

본 논문에서는 Ritz 의 방법을 이용한 근사해를 구하는 방법을 행렬을 이용하여 일목요연하게 정리하고, 또 이 방법을 이용하여 원추형 보에 대하여 고유진동수를 구하고자 한다

2 장 Ritz 법에 의한 봉의 횡진동 고유진동수

봉의 횡진동 운동방정식은 다음과 같이 표시된다

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

* 한국해양대학교
E-mail : poseidon@mail.hhu.ac.kr
Tel : (051) 410-4305, Fax : (051) 405-8305

여기에서 x 는 봉의 축방향, v 는 횡방향 변위, EI 는 강성, ρ 는 밀도, A 는 봉의 단면적을 나타낸다.

봉이 특정의 고유진동수로 진동한다고 가정하면 임의의 점에서의 변위는 정현파 진동으로 나타난다.

$$v(x,t)=V(x)\cos(\omega t-\phi) \qquad (2)$$

최대운동에너지와 최대위치에너지는 서로 같아야 한다는 에너지보존법칙으로부터 고유진동수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{1}{2}\int_0^l EI(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2})^2 dx \\ T_{\max} &= \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \rho A V^2 dx \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\omega^2=\frac{E}{\rho}\frac{\int_0^l I(\frac{d^2 V}{dx^2})^2 dx}{\int_0^l AV^2 dx} \qquad (4)$$

Ritz 의 근사해를 얻기 위하여 진동형을 다음과 같은 급수형태로 표시할 수 있다고 하자.

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x) \\ &= \mathrm{a}\mathrm{v}^t \end{aligned} \qquad (5)$$

단,

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= [a_1\ a_2 \cdots a_n] \\ \mathrm{v} &= [v_1\ v_2 \cdots v_n] \end{aligned} \qquad (6)$$

여기에서 모든 함수 v_k 는 봉의 경계조건을 만족해야 하고, a_k 는 임의의 상수이다. 식 (4)를 최소로 하는 a_k 를 구하면 고유진동수를 구할 수 있는데 이를 Ritz 법이라 한다.

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\frac{\int_0^l I(\frac{d^2V}{dx^2})^2 dx}{\int_0^l AV^2 dx}=0 \qquad (7)$$

이를 정리하면

$$\frac{\partial Z}{\partial a_k}=0, \qquad k=1,2,\cdots\cdots n \qquad (8)$$

단,

$$Z=\frac{\partial}{\partial a_k}\int_0^l [I(\frac{d^2V}{dx^2})^2-\frac{\omega^2\rho A}{E}V^2]dx \qquad (9)$$

여기에서 적분을 쉽게할 수 있도록 각 요소들을 구하여 보면 다음과 같다.

$$V^2=\mathrm{v}_2\mathrm{a}_2{}^t \qquad (10)$$

단,

$$\mathrm{v}_2=\left[v_1{}^2\ v_1v_2\cdots v_1v_n\ v_2{}^2\ v_2v_3\cdots v_n{}^2\right]$$
$$\mathrm{a}_2=\left[a_1{}^2\ 2a_1a_2\ \cdots 2a_1a_n\ a_2{}^2\ 2a_2a_3\ \cdots a_n{}^2\right] \qquad (11)$$

또 연산자 $D=\frac{d}{dx}$ 를 도입하면

$$\frac{dV}{dx}=\mathrm{Dva}^t \qquad (12)$$
$$\frac{d^2V}{dx^2}=\mathrm{D^2va}^t \qquad (13)$$
$$(\frac{dV^2}{dx^2})^2=\mathrm{v}_4\mathrm{a}_2{}^t \qquad (14)$$

단,

$$\mathrm{v}_4{}^t=\begin{Bmatrix}(\mathrm{D}^2v_1)^2\\ (\mathrm{D}^2v_1\mathrm{D}^2v_2)\\ \vdots\\ (\mathrm{D}^2v_1\mathrm{D}^2v_n)\\ (\mathrm{D}^2v_2)^2\\ (\mathrm{D}^2v_2\mathrm{D}^2v_3)\\ \vdots\\ (\mathrm{D}^2v_n)^2\end{Bmatrix} \qquad (15)$$

식 (14), (10)를 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$Z=\left[\mathrm{C}-\frac{\omega^2\rho}{E}\mathrm{D}\right]\mathrm{a}_2{}^t \qquad (16)$$

여기에서,

$$C=\left[k_{11}\ k_{12}\cdots k_{1n}\ k_{22}\cdots k_{nn}\right]$$
$$D=\left[m_{11}\ m_{12}\cdots m_{1n}\ m_{22}\cdots m_{nn}\right] \qquad (17)$$

이고, 또,

$$k_{ij}=\int_0^l I(\frac{d^2v_i}{dx^2})(\frac{d^2v_j}{dx^2})dx$$
$$m_{ij}=\int_0^l Av_iv_jdx \qquad (18)$$

이다.

식 (16)에 식(8)을 적용하면 다음과 같은 고유값문제로 귀결된다.

$$\mathrm{Ka}-\frac{\omega 2\rho}{E}\mathrm{Ma}=0 \qquad (19)$$

단,

$$
\mathrm{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{20}
$$

이다.

3 장 고정-자유단을 가진 봉의 횡진동

균일 단면봉의 횡진동은 식 (1)에 식 (2)를 대입하여 풀면 다음의 형태의 해가 얻어진다.

$$
V(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \tag{21}
$$

여기에서 상수 β 와 C_i 는 경계조건으로부터 구할 수 있다.

3.1 절 고정-자유단을 가진 균일 단면봉의 횡진동

왼쪽단($x=0$)이 고정되어 있고, 오른쪽단 ($x=l$)이 자유인 균일 단면봉의 경계조건과 고유진동수 방정식은 다음과 같다.

$$
(V)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = 0
$$

$$
\left(EI\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=l} = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=l} = 0 \tag{22}
$$

$$
\cos\beta l \cosh\beta l = -1 \tag{23}
$$

한편, Ritz의 방법을 적용하기 위하여 다음과 같이 잘 알려진 진동곡선과

$$
V(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(1-\frac{x}{l}\right)^{k-1} \tag{24}
$$

저자가 제안하는 다음의 진동곡선에 대하여 살펴보기로 한다.

$$
V(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sinh px \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \tag{25}
$$

위 두 곡선은 식 (22)의 경계조건을 만족한다.

곡선 (24)과 (25)을 이용하여 βl 의 값을 구하여 본다. x/l을 다른 변수로 치환하여 적분하면 길이에 관계 없이 정규화되어 편리하다. 식 (18)의 적분은 컴퓨터를 이용한 수치적분으로 하였다. Table 1에 그 결과를 보인다.

Table 1. βl for the various deflection functions

ord	exact	poly-10	error	sin-10	error	sin-13	error
1	1.8751	1.8751	0.00	1.8752	0.00	1.8751	0.00
2	4.6941	4.6941	0.00	4.6961	0.04	4.6950	0.02
3	7.8548	7.8548	0.00	7.8638	0.12	7.8589	0.05
4	10.9955	10.9956	0.00	11.0207	0.23	11.0070	0.10
5	14.1372	14.1382	0.01	14.1926	0.39	14.1617	0.17
6	17.2788	17.4119	0.77	17.3919	0.65	17.3241	0.26
7	20.4204	20.7538	1.63	20.7879	1.80	20.4978	0.38
8	23.5619	27.8327	18.1	25.8724	9.81	23.6910	0.55
9	26.7035	33.2271	24.4	39.3843	47.5	26.9142	0.79
10	29.8451	74.8923	150.	94.9811	219.	30.4667	2.08
11	32.9867	N.A	N.A	N.A	N.A	37.3283	13.16
12	36.1283	N.A	N.A	N.A	N.A	56.6389	56.77
13	39.2699	N.A	N.A	N.A	N.A	133.174	239.1

표에서 poly-10은 식 (24)에서 n=10인 경우이고, sin-10은 식 (25)에서 n=10인 경우이고, sin-13은 식 (25)에서 n=13인 경우를 나타낸다. n=10인 경우 두 경우 식 (24)를 사용한 경우가 더 좋으나, 모두 7차까지는 상당히 좋은 정확도를 가진다. 그러나, 식 (24)를 사용하면 n이 10보다 큰 경우에는 식 (19)의 행렬 M이 정정치(positive definite)인 성질을 상실하게 되어 해석이 불가능하게 되는 단점이 있다. 식 (25)를 사용하면 n=13까지는 상당히 안정적인 해가 구하여지나, 식의 p값에 따라 n이 더 커지면 불안정해져 해인지 아닌지 주의 깊게 살펴야 한다.

3.2 절 경사진 봉의 진동해석

여기에서는 Kirchhoff가 해석한 바 있는 원추형 봉의 진동해석에 대하여 살펴본다.

위에서와 마찬가지로 왼쪽단이 고정되어 있고, 오른쪽단이 자유로운 경계조건을 가지며, 왼쪽단의 반지름이 r이고 오른쪽단의 반지름이 0인 원추형 봉의 횡진동에 대하여 마찬가지로 식 (24)과 (25)의 진동형 방정식을 사용하여 다음과 같은 형식으로 고유진동수를 표시한다.

$$
\omega_k = \frac{\beta_k r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{26}
$$

3.1에서 저자가 제안한 식 (25)를 이용한 결과의 신뢰성을 확인하였고, hsin-12가 차수가 가장 높으므로 마지막 3개항을 버린 값을 정해로 보기로 하고, 다른 여러 경우의 β_k값과 비교한 것을 Table 2에 표시하였다.
Wrinch가 구한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 2. β_k for the various deflection functions

or	hsin-12	poly-11	err.	hsin-11	err.	Wrinch.	err.
1	8.7194	4.3596	0.00	8.7196	0.00	8.7180	-0.02
2	21.1456	21.1456	0.00	21.1456	0.00	21.1400	0.00
3	38.4528	38.4526	0.00	38.4528	0.00	38.4600	-0.01
4	60.6730	60.6712	0.00	60.6736	0.00	60.6800	0.01
5	87.7962	87.7892	-0.01	87.7966	0.00	87.8400	0.05
6	119.763	119.800	0.03	119.778	0.01	119.920	0.12
7	156.484	158.383	1.21	156.494	0.01	N.A.	N.A.
8	197.766	216.984	9.72	198.745	0.49	N.A.	N.A.
9	244.926	335.394	36.9	249.650	1.93	N.A.	N.A.

4장 결론

본 논문에서는 봉의 횡진동에 대한 Ritz법을 행렬을 이용하여 일목요연하게 정리하였다. 이를 이용하면 차수가 높아져도 간결한 고유값문제로 표시할 수 있다.
저자가 제안한 진동형 식이 전통적인 다항식보다 더 고차의 고유진동수까지 구할 수 있음을 보였다. 식 (23)을 이용하여 고유진동수를 구하여도 10차가 넘으면 오차가 급격히 커져서 수치해석법으로는 정확한 해를 구하기 어렵고, 차수가 높아지면 차수간의 간격이 π로 수렴하는 성질을 이용하여 고유진동수를 구하여야 하는데 저자가 제안한 식으로도 10차까지는 실용상 문제가 없을 정도의 정확도로 구할 수 있다.
제안한 방법을 이용하여 원추형 봉에 적용하여서도 정도 높은 해석 결과를 얻을 수 있었다

참고문헌

(1) G. R. Kifchhoff, Monatsberichte, Berin, 1897, p 815.
(2) D. Wrinch, Proc. Roy. Soc. (London), 1922, p493