

소성영역 진전효과를 고려한 공간 뼈대구조의 비탄성 해석

Inelastic Analysis of Space Steel Frames Considering Spread of Plasticity

한재영* 김성보**
Han, Jae-Young Kim, Sung-Bo

Abstract

A finite element procedure to estimate ultimate strength of space frames considering spread of plasticity is presented. The improved displacement field is introduced based on inclusion of second order terms of finite rotations. All the nonlinear terms due to bending and torsional moment as well as axial force are precisely considered. The concept of plastic hinge is introduced and the incremental load/displacement method is applied for the elasto-plastic analysis. The initial yield surface is defined based on the residual stress and the full plastification surface is considered under the combined action of axial force, bending and torsional moments. The elasto-plastic stiffness matrices are derived using the flow rule and the normality condition of the limit function. Finite element solutions for ultimate strength of space frames are compared with available solutions and experimental results.

Keywords : finite element, ultimate strength, space frame, spread of plasticity

1. 서론

공간 강뼈대구조의 비탄성 극한해석은 소성영역해석(plastic zone analysis)과 소성힌지해석(plastic hinge analysis)으로 구분될 수 있다. 소성영역해석은 부재단면을 미소한 면적으로 분할하여 각각의 위치에서 탄-소성 해석을 수행하는 방법으로서, 해석의 정밀도는 높으나 계산시간이 너무 많이 소요되기 때문에 일반적으로 널리 사용되지 않는다. 소성힌지해석은 부재 양단에서 소성힌지가 발생하기 전까지 부재의 탄성거동을 가정하여 전체 구조물의 극한강도를 계산하는 방법으로서, 해석결과가 비교적 정확하며 해석법이 상대적으로 간단해서 널리 사용된다. 그러나, 외력의 증가에 따른 부재 길이방향 또는 단면 내부에서의 비탄성 영역의 진전을 고려하지 못하고 전체 뼈대구조의 극한강도가 과대 평가되는 문제점이 있다. 따라서, 공간 강뼈대구조물의 극한 거동해석에서 단면의 초기항복단계부터 소성힌지 발생단계까지 부재 내부의 소성영역의 진전효과를 고려하고 동시에 계산시간을 줄일 수 있는 효율적 해석방법의 개발이 요구된다.

보-기둥 이론을 이용하여 평면 및 공간뼈대의 접선강도행렬이 Oran에⁽¹⁾ 의하여 제시된 이후 공간뼈대 구조의 좌굴 및 후좌굴 해석에 관한 연구가 다수 발표되었고,⁽²⁾⁻⁽⁶⁾ Kim은⁽⁷⁾ 박벽 공간뼈대구조 및 변단면을 갖는 공간보의 좌굴 및 자유진동에 관한 개선이론을 발표하였다. 한편, Argyris는⁽⁸⁾ 일반적인 소성힌지이론을 제시하고 대변형을 고려한 뼈대구조물의 극한해석을 수행하였고, White와 Chen은⁽⁹⁾ 소성힌지 개념에 근거한 뼈대구조의 여러 가지 해석이론을 정리하였다. 최근들어, 컴퓨터의 급속한 발달과 함께 소성영역의 전과에

* 충북대학교 토목공학과 석사과정

** 정회원, 충북대학교 토목공학과 조교수

따른 강도감소 효과를 고려하는 여러 가지 이론들이 발표되고 있다.⁽¹⁰⁾

본 논문에서는, 공간 강뼈대구조에 대하여 기하학적인 비선형성 및 재료적인 비탄성이 고려될 수 있는 해석이론 및 해석방법을 제시한다. 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 공간 강뼈대 요소에 대한 전체 포텐셜에너지식을 유도한다. 공간 뼈대구조의 기하학적인 비선형성을 고려하기 위하여, updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도한다. 요소강도행렬의 유도에서 축력 및 모멘트에 의한 횡변형뿐만 아니라 전단변형효과를 함께 고려하도록 한다. 또한, 축력과 횡모멘트 그리고 비틀모멘트의 함수로 정의되는 여러 가지 한계함수를 사용하여 탄-소성 유한요소해석을 수행한다. 잔류응력을 가진 부재가 외력의 증가에 따라 점진적으로 항복하는 거동을 효율적으로 나타내기 위한 수치해석기법을 개발하고, 여러 문헌의 결과 및 실험적 연구결과와 비교하여 본 논문의 정당성을 입증한다.

2. 공간뼈대구조의 후좌굴 비선형 해석

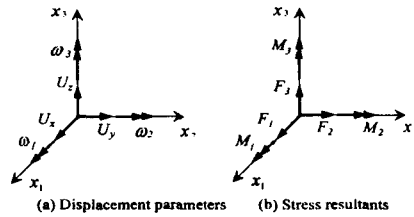


Fig. 1. Displacement parameters and stress resultants

그림 1은 뼈대요소의 변위장을 정의하기 위하여 도입한 변위파라미터와 단면력들을 보여주고 있다. x_1 축은 단면의 도심을 통과하는 부재축이고 x_2 와 x_3 축은 x_1 축과 직각을 이루는 단면의 주축이다. U_x , U_y , U_z 와 ω_1 , ω_2 , ω_3 는 각각 단면의 강체이동변위와 회전변위파라미터이다. 유한한 회전각의 2차항까지 포함된 변위장은 다음과 같이 정의할 수 있다.⁽⁷⁾

$$U_1 = U_x + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + \frac{1}{2} [\omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3] \quad (1a)$$

$$U_2 = U_y - \omega_1 x_3 + \frac{1}{2} [-(\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2 + \omega_2 \omega_3 x_3] \quad (1b)$$

$$U_3 = U_z + \omega_1 x_2 + \frac{1}{2} [\omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3] \quad (1c)$$

Chang 등⁽⁵⁾은 3차원 연속체의 Hellinger-Reissner 원리로부터 전단변형효과를 고려하는 경우에 공간뼈대요소의 총포텐셜 에너지식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L [EA U_x'^2 + EI_2 \omega_2'^2 + EI_3 \omega_3'^2 + GJ \omega_1'^2 + \frac{GA}{f_2} (U_y' - \omega_3)^2 \\ & + \frac{GA}{f_3} (U_z' + \omega_2)^2 + {}^tF_1 (U_y'^2 + U_z'^2 + r \omega_1'^2) + {}^tF_2 (2U_z' \omega_1 + \omega_1 \omega_2) \\ & - {}^tF_3 (2U_y' \omega_1 - \omega_1 \omega_3) + {}^tM_1 (\omega_2' \omega_3 - \omega_2 \omega_3') \\ & + {}^tM_2 (\omega_1 \omega_3'^2 - 2U_y' \omega_1' + \omega_1' \omega_3) - {}^tM_3 (\omega_1 \omega_2'^2 + 2U_z' \omega_1' + \omega_1' \omega_2)] dx_1 \\ & - \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{U}_e \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{U}_e = \langle u^b, v^b, w^b, \omega_1^b, \omega_2^b, \omega_3^b, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q \rangle^T \quad (3a)$$

$$\mathbf{F}_e = \langle F_1^b, F_2^b, F_3^b, M_1^b, M_2^b, M_3^b, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q \rangle^T \quad (3b)$$

윗 식에서, EA , EI_2 , EI_3 , GJ 는 각각 축강성, x_2 및 x_3 축에 대한 휨강성 그리고 비틀강성이다. r 은 $\frac{I_2+I_3}{A}$ 을 나타내고 ()' 은 괄호 안의 값을 x_1 축에 대하여 미분함을 의미한다. 또한, F_1 , F_2 , F_3 는 축력과 x_2 및 x_3 축에 대한 전단력이며, M_2 , M_3 는 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트, 그리고 M_1 은 비틀모멘트를 나타낸다. 그리고 \mathbf{U}_e 와 \mathbf{F}_e 은 각각 부재좌표계에서의 부재증분변위벡터 및 부재력증분벡터를 나타내고, ' $\langle \rangle$ ' 는 열벡터 그리고 \mathbf{T} 는 벡터전치를 의미한다.

공간 뼈대요소의 접선강도행렬을 유도하기 위하여, 일반화된 좌표들($U_x, U_y, U_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$)을 요소변위벡터로 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 연구에서 축방향변위(U_x)와 비틀각(ω_1)은 부재축을 따라 선형변화한다는 가정을 도입하여 형상함수로서 1차 다항식을 사용하고, 휨거동에 의한 휨방향 처짐 U_y, U_z 는 3차 다항식을 사용한다. 이때, 단면의 회전각에 대한 형상함수는 전단변형효과를 고려하여 휨방향 처짐과 연계하여 유도된 형상함수를 사용한다.

구조물의 비선형해석 시 증분형식의 반복계산법을 적용하여야 하며, 이러한 계산에서 변형된 상태에 대응하는 부재력증분을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정하는 부재의 증분변위 \mathbf{U}_e 를 강체변위(rigid body displacement) \mathbf{U}_r 와 순수변형성분(pure deformation) \mathbf{U}_d 로 분리시켜야 한다. 부재좌표계에서 식(3a)로 표현되는 증분변위 \mathbf{U}_e 와 강체변위와 순수변형성분이 분리된 증분변위 \mathbf{U}_i 의 관계식을 이용하면 아래와 같이 증분변위 \mathbf{U}_i 에 대응하는 접선강도행렬 \mathbf{K}_e 를 나타낼 수 있다.

$$\delta \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \delta \mathbf{U}_i^T (\mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e) \mathbf{U}_i = \delta \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i \quad (4)$$

공간 뼈대요소의 증분평형방정식을 전체좌표계로 좌표변환시키고 직접강도법을 적용하면 구조물전체의 증분방정식을 얻을 수 있다. 전체좌표계에서 증분평형방정식으로부터 증분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력증분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 증분형식의 반복계산법을 사용하는 경우 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용한다.

3. 점진적 소성화를 고려한 탄-소성 해석

뼈대 요소의 한쪽 단(p단)에 소성힌지가 발생한 경우에 탄-소성 강도행렬을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{K}_{ep} \cdot \mathbf{U}_d = (\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_e \mathbf{G}_p (\mathbf{G}_p^T \mathbf{K}_e \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^T \mathbf{K}_e) \cdot \mathbf{U}_d \quad (5)$$

여기서, 한계함수의 gradient벡터 \mathbf{G}_p 는 한계함수를 요소단부의 단면력 성분으로 편미분하여 구한다.

한편, 완전소성영역을 결정하는 한계함수(limit function)는 부재단면의 형상과 증립축의 위치가 정의되면 엄밀히 유도될 수 있으나 수치해석에서 적용하기는 어려운 단점이 있다.⁽¹¹⁾ 따라서 유한요소해석에 효율적으로 적용되는 한계함수는 단면력 성분들의 함수로 표현되는 단일식이 많이 사용된다.^{(8), (12)} 단일식으로 표현되는 가장 간단한 한계함수는 다음과 같은 한계함수이다.

$$\Phi = p^2 + m_s^2 + m_w^2 + m_1^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

여기서, $p = F_1/F_{1p}$, $m_s = M_s/M_{sp}$, $m_w = M_w/M_{wp}$, $m_1 = M_1/M_{1p}$

식(6)의 한계함수는 형태가 간단하고 한계함수로서 convexity 조건을 만족시키므로 널리 사용되어 왔다. 그러나 문헌에 의하면^{(10), (13)} 완전소성 영역을 결정하는 한계함수면은 식(6)과 같이 완전 구형이 아니라, 그림 2(a)와 같이 축력과 약축모멘트면에서는 원형, 축력과 강축면에서는 직선과 같이 표현된다. Duan과 Chen⁽¹³⁾은 이러한 한계함수의 특성을 고려할 수 있는 함수를 다음과 같이 발표하였다.

$$\Phi = \left(\frac{m_s}{1-\beta}\right)^{\alpha} + \left(\frac{m_w}{1-\beta}\right)^{\alpha} - 1 = 0 \quad (7)$$

초기항복평면과 한계함수면을 정규화된 단면력좌표계를 사용하여 그림 2(a)에 나타내었다. 점 A는 현재의 정규화된 단면력의 좌표이고, 점 B는 직선 OA와 초기항복평면과의 교점이며 점 C는 직선 OA와 한계함수면과의 교점이다. 현재의 단면력 성분들이 초기항복평면과 한계함수면 사이에 존재할 때, 부재 길이방향 및 단면 내부로 점진적 항복이 진행된다. 소성영역해석에서는 이와 같은 강도 감소효과를 엄밀히 계산할 수 있으나 계산시간이 너무 많이 소요되어 비경제적이다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 강도 감소모형을 설정하고 이에 따른 비선형해석을 수행하여 기존의 연구결과 및 실험결과와 비교한다.

1) $\overline{OA} \leq \overline{OB}$ 인 경우 : 점선탄성계수는 초기 탄성계수와 동일하다.

$$E_t = E \quad (8)$$

2) $\overline{OA} > \overline{OB}$ 인 경우 : 다음의 세가지 함수를 사용하여 점선탄성계수를 감소시킨다.

$$\frac{E_t}{E} = (\beta - 1)\alpha + 1 \quad (9a)$$

$$\frac{E_t}{E} = (\beta - 1)\alpha^n + 1 \quad (9b)$$

$$\frac{E_t}{E} = (1 - \beta)(1 - \alpha)^n + \beta \quad (9c)$$

여기서, $\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ 로서 요소의 소성화 진행정도를 나타내는 파라미터이고 β 는 $\alpha=1$ 일때의 점선탄성계수를 결정하는 파라미터이다. 위의 세가지 감소함수를 그림 2(b)에 나타내었다.

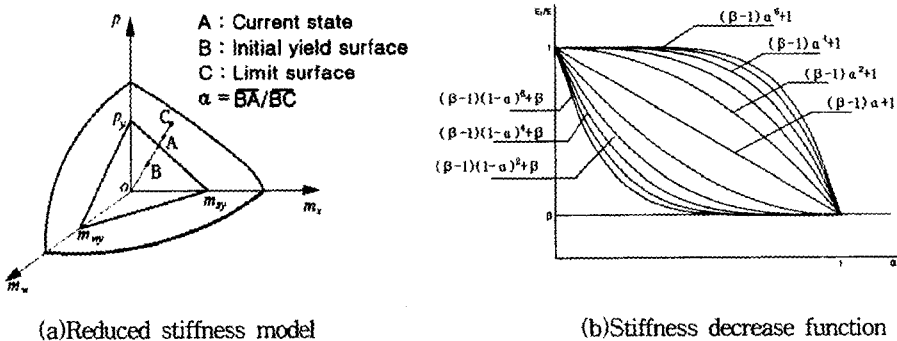
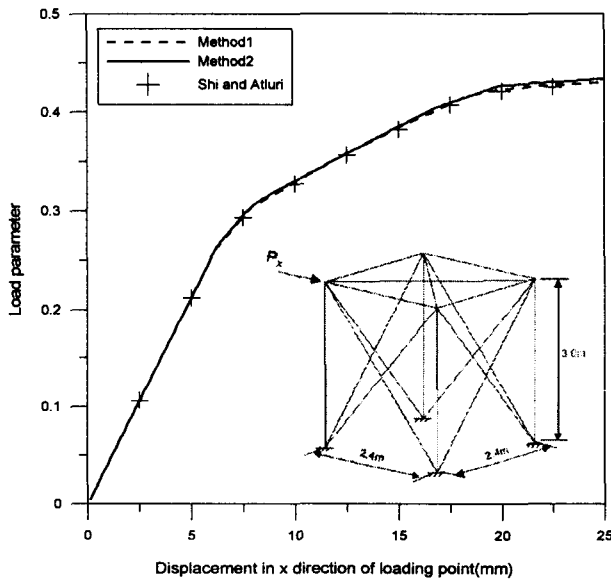


Fig. 2. Reduced stiffness model

4. 수치 해석 에

4.1 횡하중을 받는 공간 뼈대구조

그림 3은 해양구조물에 많이 적용되는 공간뼈대구조에 대한 하중-횡변위 관계곡선이다. 4개의 기둥으로 형성되는 4개의 측면과 상부 면에 서로 교차되는 브레이싱이 기둥의 단부를 연결하고 있다. 기둥의 하단부는 모두 고정단이고 단면은 직경 273mm, 두께 6.3mm의 원형강관이며, 모든 브레이싱은 직경 88.9mm, 두께 3.2mm의 원형강관이다. 모든 부재의 단면상수 및 재료특성이 그림 3에 도시되어 있다. 외부하중으로서 횡방향 집중하중이 한쪽 기둥의 상단부에 작용하고 있다. Method 1은 한계함수를 식(6)의 구형함수를 사용한 결과이고, Method 2는 한계함수로서 식(7)을 적용한 결과이다. 본 연구에 의한 해석결과를 상보에너지 및 구형한계함수를 사용하여 탄-소성 해석을 수행한 Shi의 결과⁽¹²⁾와 비교하였다. 본 구조물의 해석결과 Method 1과 Method 2의 결과는 구형함수를 사용한 Shi의 결과와 잘 일치하였다.



$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2, \quad G = 826.2 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_x = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

- Exterior columns (273 Φ \times 6.3WT)

$$A = 52.79 \text{ cm}^2, \quad I = 4.834 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$J = 9.668 \times 10^3 \text{ cm}^4, \quad F_p = 1.077 \times 10^5 \text{ kgf}$$

$$M_p = 9.141 \times 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

- All bracings (88.9 Φ \times 3.2WT)

$$A = 8.616 \text{ cm}^2, \quad I = 79.25 \text{ cm}^4$$

$$J = 158.4 \text{ cm}^4, \quad F_p = 17.575 \times 10^3 \text{ kgf}$$

$$M_p = 4.794 \times 10^4 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

Fig. 3. Load-displacement relation of steel jacket structure under lateral load

4.2 Vogel 직각 뼈대 구조

그림 4(a)에 초기처짐이 있는 양단 고정단인 Vogel⁽¹⁴⁾의 문형 라멘이 도시되어 있다. 본 연구에서 제시한 뼈대요소를 사용하여 극한해석을 수행하여 그 결과를 ABAQUS⁽¹⁵⁾의 쉘 요소를 이용한 해석결과와 비교하였다. 뼈대모델에서는 기둥과 보를 각각 4개의 요소로 이산화 하였고 쉘 모델에서는 플랜지와 복부를 각각 8개의 4절점 쉘요소(S4R5)를 사용하여 해석 모델을 작성하였다. 기둥과 보의 접합부에 강결효과를 발생시키기 위하여 X-형태의 보강재를 배치하였고 수평 및 수직하중은 그림 5(b)와 같이 단면에 등분포로 나누어 재하하였다. 기둥과 보에 대한 단면 재원은 표 1에 나타나있으며 여기서, d는 I-단면의 총 높이, bf는 플랜지의 폭, tw는 복부의 두께, tf는 플랜지의 두께, Z는 소성단면계수이다. 모든 부재의 항복응력은 235 kN/cm²이고 탄성계수는 20500 kN/cm², 포아손비는 0.3이다. 잔류응력의 분포는 그림 4(b)와 같고 최대 잔류응력은 항복응력의 1/2 값을 사용하였다. 기둥의 초기처짐 효과는 해석모델의 절점좌표값을 조정하여 고려하였다.

Table 1. Sectional properties of Vogel frame

Member	d (cm)	b _f (cm)	t _w (cm)	t _f (cm)	A (cm ²)	I (cm ⁴)	Z (cm ³)
Beam	33	30	0.95	1.65	133	27690	1850
Column	30	30	1.1	1.9	149	25170	1869

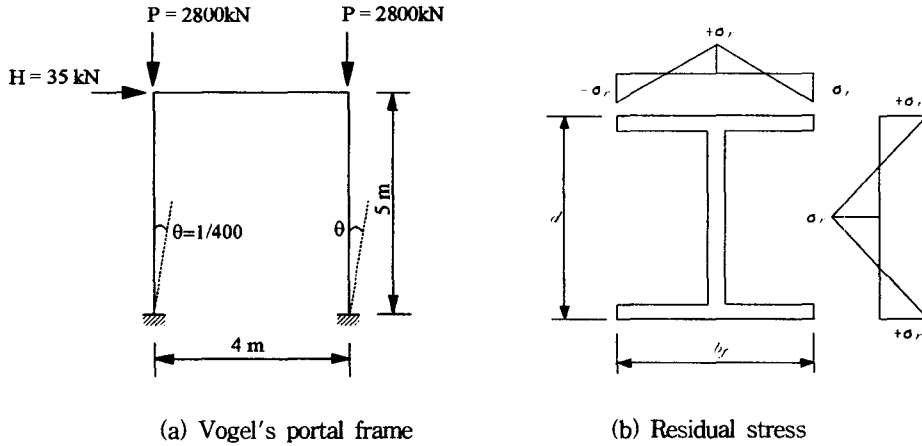


Fig. 4. Configuration of Vogel's portal frame and Residual stress of hot-rolled I-section

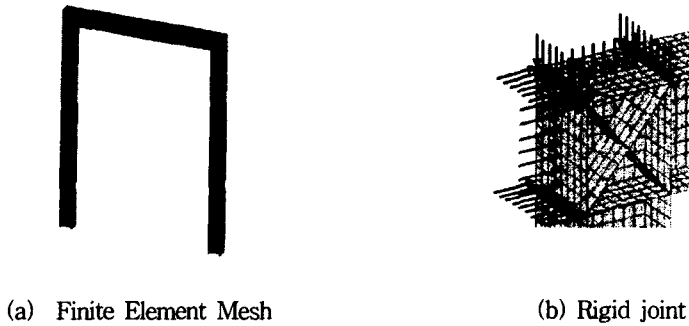


Fig. 5. ABAQUS shell model

그림 6은 기존의 소성힌지 해석에 의한 결과와 본 연구에서 점진적 소성영역 진전효과를 고려한 해석결과를 비교한 것이다. $I_{spread}=1$ 인 경우에는 식(9a)의 함수를 사용하여 초기항복면에서 탄성계수를 선형적으로 감소시킨 경우이다. $I_{spread}=2$ 의 경우는 식(9b)의 함수를 사용하여 탄성계수를 $n=2$ 차의 convex한 형태로 감소시킨 경우이고, $I_{spread}=3$ 의 경우는 식(9c)의 함수를 사용하여 $n=2$ 차의 concave한 형태로 탄성계수를 감소시킨 경우이다. 또한, 소성영역 확장효과를 구현하기 위하여 Shell요소를 이용한 ABAQUS해석 결과를 나타내었으며, Vogel의 소성영역 해석결과와 비교하였다. 해석결과 기존의 소성힌지 해석인 경우는 하중증가에 따른 강도감소 효과가 나타나지 않고 극한하중에 도달할 때까지 거의 선형적인 힘-변위 관계가 나타났으며, 강도감소효과를 선형적으로 감소시킨 $I_{spread}=1$, convex한 형태로 감소시킨 $I_{spread}=2$ 의 경우에는 점차적으로 shell 해석결과와 유사한 힘-변위 관계가 얻어졌다. 하지만 concave한 형태의 강도감소 효과를 고려한 $I_{spread}=3$ 의 경우에, shell요소를 이용한 엄밀한 해석결과와 매우 근접한 힘-변위 관계를 얻었다.

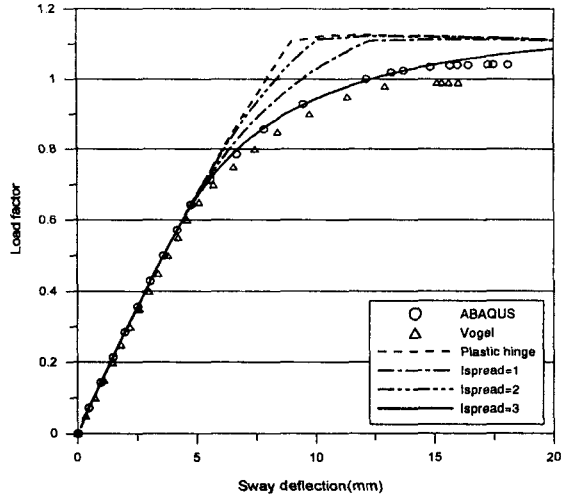
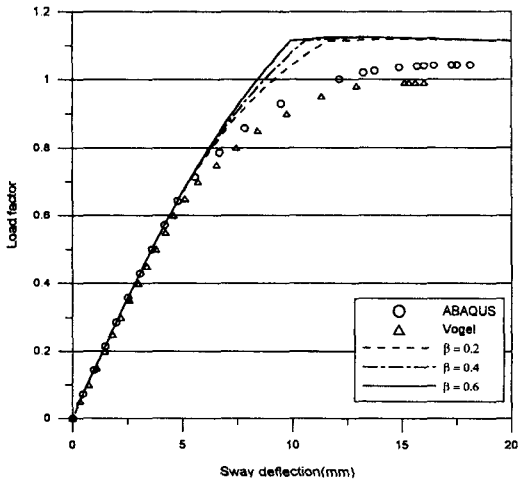
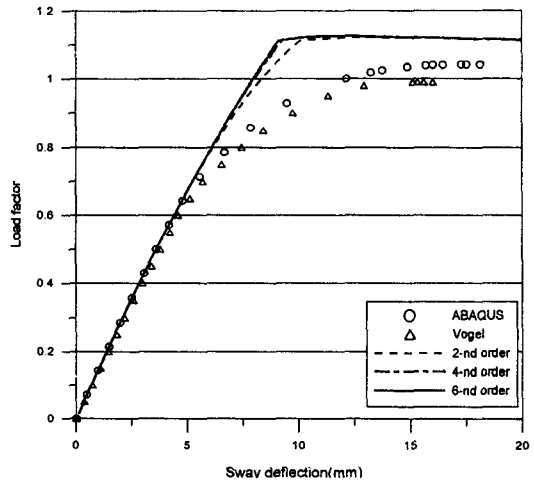


Fig. 6. Comparison of sway load-deflections by Ispread

그림 7(a)는 식(9a)의 함수로 선형적으로 탄성계수를 감소시킨 경우 $\alpha=1$ 일 때 접선계수를 결정하는 파라미터인 β 에 따른 힘-변위 관계를 비교하였다. $\beta=0.6$ 에서 $\beta=0.2$ 로 감소함에 따라 강도감소 효과가 증가하여 점차 shell 해석에 근접한 힘-변위 관계가 얻어졌다. 그림 7(b)는 식(9b)의 함수로 convex하게 탄성계수를 감소시킨 경우 강도감소 함수의 차수(n)에 따른 힘-변위 관계를 비교하였다. 함수의 차수(n)가 낮아짐에 따라 강도감소 효과가 증가되었다.



(a) Linearly decrease model



(b) Convex decrease model

Fig. 7. Load-deflection curve for linear and convex decrease model of tangent stiffness

5. 결론

본 논문에서는, 점진적 소성화를 고려한 공간뼈대구조의 후좌굴 및 소성붕괴 거동을 조사하기 위한 비선형 유한요소 해석법을 제시하였다. 대변형 효과를 고려하기 위하여, 유한한 회전각의 2차항까지 고려된 개선된

변위장을 도입하여 총포텐셜 에너지식을 유도하였다. 축력 뿐만 아니라 휨모멘트 그리고 비틀림모멘트에 의한 비선형 성분을 모두 포함하였고 형상함수로서 전단계수가 포함된 3차 Hermitian 다항식을 사용하여 요소강도행렬을 계산하였다. 잔류응력을 가진 부재가 외력의 증가에 따라 점진적으로 항복하는 거동을 효율적으로 나타내기 위한 수치해석기법을 제시하였다. 뼈대구조물의 극한거동에 대한 예로서 Vogel의 문형 라멘 및 횡력을 받는 3차원 뼈대구조에 대한 탄-소성 해석을 수행하여 소성영역해석, 쉘요소를 이용한 해석 결과 및 실험 결과와 비교·분석하였다. 점진적 소성화를 실제적으로 표현하기 위하여 다양한 매개변수해석을 수행하여 실제 거동과 유사한 비선형 거동을 나타내는 해석 변수값들을 제시하였다. 결과적으로, 본 논문에서 제시된 해석기법은 공간 뼈대구조물의 극한거동을 효과적으로 조사하기 위하여 적용될 수 있다고 사료된다.

참고문헌

1. Oran, C.(1973) Tangent stiffness in space frames. Journal of Structural Engineering, ASCE, 99, pp987-1001.
2. Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Scharpf, D.W.(1979) On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 14, pp99-135.
3. Batoz, J.L. and Dhatt, G.(1979) Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. Int. J. Numer. Methods Engineering, 14, pp1262-1267.
4. 김문영, 장승필(1990) 보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 유한요소해석을 위한 하중 및 변위증분 알고리즘의 개발. 대한토목학회 논문집, 제10권 제2호, pp11-22.
5. Chang, S.P., and Kim, S.B., and Kim, M.Y.(1996) Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches. Journal of Eng. Mechanics, ASCE, 122, pp844-854.
6. 김성보, 김문영, 장승필(2002) 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 위한 개선이론. 대한 토목학회논문집, 제 22권 제 2-A호, pp189-200.
7. Kim, S.B. and Kim, M.Y.(2000) Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. Engineering Structures, 22, pp446-458.
8. Argyris, J.H., Boni, B., Hincleniang, W. and Kleiber, M.(1982) Finite Element Analysis of Two- and Three- Dimensional Elasto-Plastic Frames - The Natural Approach. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 35, pp221-248.
9. White, D. and Chen, W.(1993) Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames, Technical report, SSRC.
10. Attalla, M.R., Deierlein, G.G. and McGuire, W(1995) Spread of plasticity: Quasi-plastic-hinge approach. J. Struct. Eng. ASCE, 120(8), pp2451-2473.
11. Chen, W.F. and Atuta, T.(1977) Theory of beam-columns, Vol.2, McGraw-Hill, New York.
12. Shi, G and Atluri, S. N.(1988) Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffness. Int. J. Numer. Methods Engineering, 26, pp589-615.
13. Duan, L and Chen, W. F.(1990) A yield surface equation for doubly symmetrical sections. Engineering and structures, 12, pp114-119.
14. Vogel, U.(1985) Calibrating frames, Stahlbau, 54(10), pp295-301.
15. ABAQUS(1994). User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.4. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
16. Kim, S.E., Lee, D.H.(2002) Second-order Distributed Plasticity Analysis of Space Steel Frames. Engineering Structures, 24, pp735-744.