

전단변형을 고려한 집중하중을 받는 단순보의 비선형 거동

Non-Linear Behavior of Shear Deformable Simple Beam with a Concentrated Load

이 병 구* · 이 태 은** · 안 대 순*** · 김 권 식***

Byoung Koo Lee · Tae Eun Lee · Dae Soon Ahn · Kwon Sik Kim

ABSTRACT

This paper explores the governing differential equations for the non-linear behavior of shear deformable simple beam with a concentrated load. In order to apply the Bernoulli-Euler beam theory to simple beam, the bending moment equation on any point of the elastica is obtained by concentrated load. The Runge-Kutta and Regula-Falsi methods, respectively, are used to integrate the governing differential equations and to compute the beam's rotation at the left end of the beams. The characteristic values of deflection curves for various load parameters are calculated and discussed.

1. 서 론

최근에 재료공학의 발달로 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성을 확보할 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동 해석이 필수적이다. 구조물의 비선형 거동은 구조물이 하중을 받아서 최종적으로 평형상태가 이루어진 후의 처짐곡선, 즉 정확탄성곡선을 산출함으로써 해석할 수 있다. 대변형 문제에 관한 연구는 1774년 Euler에 의해 처음 발표된 이후 많은 과학자들에 의해 활발히 진행되고 있다⁽¹⁻⁶⁾. 전단변형은 작용하중에 의한 구조물의 변위를 증가시키는 요인이므로 전단변형을 고려하여 해석하거나 설계하는 것이 구조물의 안정상 더 유리하다.

이러한 연구 배경으로 이 논문은 전단변형을 고려한 집중하중을 받는 단순보의 비선형 거동해석에 연구 목적이 있다. 이를 위하여 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계가 비선형인 Bernoulli-Euler보 이론을 이용하여 대상 보의 정확탄성곡선(elastica)을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 정확탄성곡선의 거동값들을 예측하였다. 이 연구에서 보는 선형탄성체이고 보의 휨에 대한 중심축은 비확장성으로 가정하였다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 학생회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

*** 원광대학교 대학원 석사과정

2. 수학적 모형

그림 1(a)는 지간길이가 l 이고, A 점이 회전지점, B 점이 이동지점으로 이루어진 본 연구 대상보가 하중을 받기 전의 모습을 나타내고 있다.

그림 1(b)는 그림 1(a)의 보가 집중하중 P 를 받아 최종적인 평형상태를 이루었을 때의 정확탄성곡선 (elastica)의 변수들을 나타내고 있다. 하중이 작용하게 되면 그림 1(a)의 이동지점 B 가 그림 1(b)와 같이 수평 이동하게 되며, 그림과 같이 처짐이 발생하여 정확탄성곡선을 이루게 된다. 이때 이동지점 B 의 수평처짐을 Δ 라고 하면, 보의 축은 비확장성이므로 x 축상 보의 길이는 $l - \Delta$ 이고, 부재축을 따라 측정한 보의 길이는 l 을 유지한다.

이 그림에서 (x, y) 는 정확탄성곡선을 나타내는 직교좌표계이며, 임의점 (x, y) 에서 s 는 원점 A 로부터 보의 축을 따라 측정한 곡선길이, θ 는 단면회전각, Q , N 및 M 은 각각 전단력, 축방향력 및 휨모멘트이다. 또한 α 는 A 점에서의 단면회전각이며, R 은 A 지점의 수직반력, al 은 x 축상에서 측정한 A 점으로부터 하중 재하 위치까지의 거리이다.

그림 1(b)에 표시한 보의 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler 보 이론의 지배를 받는다. 이 이론을 적용하기 위해서는 임의점 (x, y) 에서의 휨모멘트 M 식을 구하여야 하나 수평변위 Δ 와 수직반력 R 이 미지수이므로 M 식을 구할 수 없다. 그러므로 집중하중을 받는 보의 비선형 거동에 대한 정확해는 아직 알려져 있지 않다. 지금까지 발표된 논문들을 살펴보면 특정한 가정하에서 M 식을 구하고, 이에 대한 Bernoulli-Euler의 미분방정식을 풀어서 정확탄성곡선의 좌표 (x, y) 를 해석하고 있다.

본 연구에서는 변형된 보의 A 점에서 수직반력 R 과 임의의 좌표 (x, y) 에서 전단력 Q , 축방향력 N 및 휨 모멘트 M 을 다음과 같이 산출하였다.

$$R = P \left(1 - \frac{al}{l - \Delta} \right) \quad (1)$$

$$Q = \begin{cases} R \cos \theta, & 0 \leq x \leq al \\ (R - P) \cos \theta, & al \leq x \leq l \end{cases} \quad (2)$$

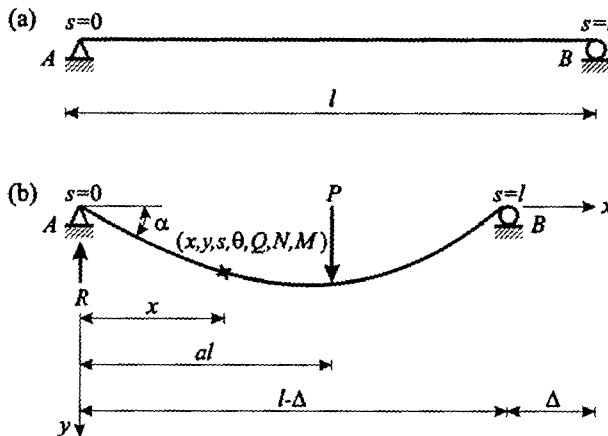


그림 1(a) 변형전의 대상 보 (b) 대상 보의 정확탄성곡선 및 제 변수

$$N = \begin{cases} R \sin \theta, & 0 \leq x \leq al \\ (R - P) \sin \theta, & al \leq x \leq l \end{cases} \quad (3)$$

$$M = \begin{cases} Rx, & 0 \leq x \leq al \\ Rx - P(x - al), & al \leq x \leq l \end{cases} \quad (4)$$

Bernoulli-Euler보 이론에 전단변형을 고려한 정확탄성곡선의 미분방정식은 다음 식과 같다⁽⁷⁾

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (5)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} + \frac{\alpha_s}{GA} \frac{dQ}{ds} \quad (7)$$

위의 식 (7)에서 EI 는 보의 휨 강성, α_s 는 단면의 형상에 따라 결정되는 전단계수이며, GA 는 축강도이다. 또한 식 (7)에서 α_s/GA 의 항이 전단변형의 영향요소이다.

그림 1(b)의 정확탄성곡선에서 A 지점의 단면회전각 α 는 $\pi/2$ 를 넘을 수 없고, B 지점의 수평처짐 Δ 는 $l - al$ 을 넘을 수 없으므로 다음과 같은 제약조건을 얻을 수 있다.

$$0 < \alpha < \pi/2 \quad (8a)$$

$$0 < \Delta < l - al \quad (8b)$$

보의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다. 먼저 회전지점인 $s=0$ 에서 수평처짐 및 수직처짐을 허용하지 않으므로 다음의 식과 같이 경계조건을 얻을 수 있다.

$$x=0, \quad s=0 \text{에서} \quad (9a)$$

$$y=0, \quad s=0 \text{에서} \quad (9b)$$

이동지점인 $s=l$ 에서 B 점은 Δ 만큼 수평변위를 일으키며, 수직처짐 및 휨모멘트가 "0"이므로 다음의 식과 같이 경계조건을 얻을 수 있다.

$$x=l-\Delta, \quad s=l \text{에서} \quad (10a)$$

$$y=0, \quad s=l \text{에서} \quad (10b)$$

$$M=Rx - P(x - al) = 0, \quad s=l \text{에서} \quad (10c)$$

본 연구에서는 상미분방정식을 무차원으로 유도하여 수치해석의 효율성을 높이기 위해 다음의 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \lambda = \frac{s}{l}, \quad a = \frac{al}{l}, \quad \delta = \frac{\Delta}{l} \quad (11-15)$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI}, \quad r = \frac{Rl^2}{EI}, \quad q = \frac{Ql^2}{EI}, \quad n = \frac{Nl^2}{EI}, \quad m = \frac{Ml}{EI} \quad (16-20)$$

$$\Gamma = \frac{G}{E}, \quad \kappa = \frac{l}{\sqrt{I/A}} \quad (21,22)$$

위의 식들에서 ξ , η 는 무차원 직교좌표계이며, λ , a 및 δ 는 각각 곡선길이, 하중재하위치 및 수평 처짐을 지간길이 l 로 정규화한 것이다. p 는 무차원 하중, r 은 무차원 반력, q , n , m 은 무차원 합응력이며, Γ 는 재료의 성질을 나타내는 탄성계수비, κ 는 세장비이다.

위에서 도입한 무차원 변수들을 이용하여 식 (1)~(4)의 반력 및 합응력을 무차원량으로 나타내면 다음의 식들과 같다.

$$r = p \left(1 - \frac{a}{l - \delta} \right) \quad (23)$$

$$q = \begin{cases} r \cos \theta, & 0 \leq \xi \leq a \\ (r - p) \cos \theta, & a \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (24)$$

$$n = \begin{cases} r \sin \theta, & 0 \leq \xi \leq a \\ (r - p) \sin \theta, & a \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (25)$$

$$m = \begin{cases} r\xi, & 0 \leq \xi \leq a \\ r\xi - p(\xi - a), & a \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (26)$$

앞에서 유도한 상미분방정식 식 (5)~(7)을 무차원 변수들을 이용하여 무차원화하면 다음 식들과 같고, 식 (29)에 포함되어 있는 $\alpha_s / \Gamma \kappa^2$ 의 항이 전단변형의 영향요소이다.

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos \theta \quad (27)$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \sin \theta \quad (28)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \begin{cases} -r\xi \left[1 - \frac{\alpha_s}{\Gamma \kappa^2} r \sin \theta \right]^{-1}, & 0 \leq \xi \leq a \\ -ap + (p - r)\xi \left[1 - \frac{\alpha_s}{\Gamma \kappa^2} (r - p) \sin \theta \right]^{-1}, & a \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (29)$$

식 (8a), (8b)에서 유도된 제약조건식들을 무차원 변수들을 이용하여 무차원화하면 다음 식들과 같다.

$$0 < a < \pi/2 \quad (30a)$$

$$0 < \delta < 1 - a \quad (30b)$$

식 (9a)~(10c)에서 유도된 경계조건식들을 무차원 변수들을 이용하여 무차원화하면 다음 식들과 같다.

$$\xi = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (31a)$$

$$\eta = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (31b)$$

$$\xi = 1 - \delta, \lambda = 1 \text{ 에서} \quad (32a)$$

$$\eta = 0, \lambda = 1 \text{ 에서} \quad (32b)$$

$$m = r\xi - p(\xi - a) = 0, \lambda = 1 \text{ 에서} \quad (32c)$$

경계조건식 식 (32a)~(32c)는 다음과 같이 하나의 식으로 정리하여 미분방정식을 시행착오법으로 해석하는 과정에서 미지수인 Δ 를 찾는 데 이용한다.

$$|\xi - 1 + \delta| + |\eta| + |r\xi - p(\xi - a)| = 0, \lambda = 1 \text{ 에서} \quad (33)$$

이상에서 유도된 식 (27)~(29)가 전단변형을 고려한 집중하중을 받는 단섬보의 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 상미분방정식이다. 이 미분방정식을 풀기 위해서는 식 (31a)~(32c)의 경계조건 이외에 좌측 단부 $\xi=0$ 에서의 회전각 α 를 알아야 하나 이 값이 미지수이다. 따라서 본 연구는 대상보의 하중조건 p , a 및 Γ , κ 가 주어지면 앞에서 유도한 무차원 미분방정식을 수치적분하여 우측단부의 경계조건인 식 (33)을 만족하는 단면회전각 α 를 구하는 문제로 귀결된다.

3. 수치해석 방법

본 연구에서 유도한 보의 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 상미분방정식 식 (27)~(29)의 정확해는 구할 수 없으므로 수치해석기법을 이용하여 수치해를 산출한다. 이 연구에서 개발한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 먼저 본 연구 대상보의 p , a , Γ 및 κ 를 정의한다. 미분방정식의 수치해석 문제는 초기치문제이므로 경계조건식 식 (31a), (31b) 이외에 미지수인 α 를 최초 0에서 일정한 증분으로 가정하고 Runge-Kutta법⁽⁸⁾을 이용하여 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 까지 수치적분한다. 가정된 α 값이 정확탄성곡선의 참값이면 우측단부의 경계조건인 식 (28)을 만족하여야 한다. 따라서 $D = \eta(1)$ 이라 하면 $D = 0$ 이어야 한다. 다음 식과 같은 수치해의 수렴조건을 만족하면 수치해 $\eta = \eta(\xi)$, $\lambda = \lambda(\xi)$, $\theta = \theta(\xi)$ 를 출력시킨다.

$$|D| = 1 \times 10^{-10} \quad (34)$$

위의 수렴조건을 만족하지 않으면 α 값을 $\alpha + \Delta\alpha$ 로 다시 가정하여 수치적분을 시행한다. 이러한 과정에서 D 의 부호가 바뀌면 참 α 값은 전 단계에서 가정된 α_1 과 현 단계에서 가정된 α_2 사이에 존재한다. 이 때의 α_1 과 α_2 사이를 더 세분화된 증분으로 증가시키며 위의 식 (34)를 만족하는 α 값을 찾는다. 이와 같이 α 값을 찾으면 Runge-Kutta법에 의하여 대상보의 정확탄성곡선과 함응력을 얻을 수 있다.

4. 수치해석 결과

표 1 과 표 2는 전단변형의 영향요소 중에서 탄성계수비 Γ 와 세장비 κ 의 영향을 분석한 표이다. Γ 와 κ 는 미분방정식 식 (29)의 전단변형효과 $\alpha_s / \Gamma \kappa^2$ 의 분모항에 포함되어 있으므로 Γ 와 κ 값이 감소하면 전단변형효과 영향이 증가하게 된다. 따라서 표 1과 표 2에서는 Γ 와 κ 값의 감소에 따른 거동값의 변화를 나타내었다.

표 1. 탄성계수비 Γ 에 따른 비선형 거동값의 변화
($p=15, a=0.3, \alpha_s=1.2, \kappa=50$)

Γ	α	δ	η_{\max}
infi	0.77110	0.12682	0.21887
0.40	0.77307	0.12727	0.21918
0.38	0.77321	0.12730	0.21920
0.35	0.77336	0.12733	0.21922
0.32	0.77353	0.12737	0.21925
0.30	0.77374	0.12742	0.21928

표 2. 세장비 κ 에 따른 비선형 거동값의 변화
($p=15, a=0.3, \alpha_s=1.2, \Gamma=0.4$)

κ	α	δ	η_{\max}
infi	0.77110	0.12682	0.21887
250	0.77118	0.12684	0.21888
200	0.77123	0.12685	0.21889
150	0.77132	0.12687	0.21890
100	0.77159	0.12693	0.21895
50	0.77307	0.12727	0.21918

표 1은 전단변형의 영향요소 중에서 탄성계수비 Γ 가 비선형 거동값 α, δ 및 η_{\max} 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 표에 나타낸 바와 같이 Γ 값이 감소하면 거동값들은 증가하는 것을 알 수 있으며, 그 영향력은 Γ 가 감소함에 따라 점점 증가하게 된다. 즉 전단변형효과는 구조물의 거동값을 증가시키는 요인임을 알 수 있다.

표 2는 전단변형의 영향요소 중에서 세장비 κ 의 변화에 따른 거동값의 변화를 나타낸 것이다. 이 표에서와 같이 κ 는 거동값을 증가시키는 요인이며, κ 값이 큰 경우에는 거동값의 변화가 작아 그 영향력이 거의 없으나, κ 값이 감소하면 거동값들이 증가하게 된다. 특히 세장비 κ 가 약 100이하인 경우에는 그 증가율이 더욱 커지므로 반드시 전단변형효과를 고려하는 것이 구조해석상 안전측에 든다.

그림 2는 $f=1.2, \Gamma=0.4, \kappa=100, a=0.3$ 인 보에 무차원 집중하중 p 의 크기가 변화할 때 거동값 $\alpha/\pi, \delta, \eta_{\max}$ 의 변화를 나타낸 것이다. p 가 증가하면 거동값들은 증가하며, 이 그림으로부터 하중과 거동의 관계는 비선형성을 나타내고 있음을 알 수 있다. 이들 곡선으로부터 δ 는 작은 하중에서의 증가율은 작게 나타나고, 하중이 증가하면 큰 증가율을 보이며, α/π 와 η_{\max} 는 작은 하중에서 더 큰 증가율을 보이고 하중이 증가함에 따라 증가율이 감소함을 알 수 있다.

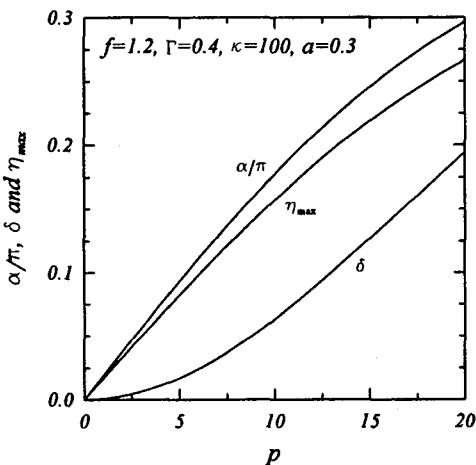


그림 2. 하중-변위 곡선

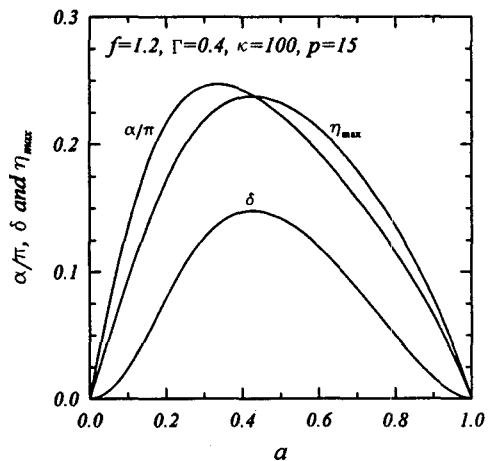


그림 3. 하중위치-변위 곡선

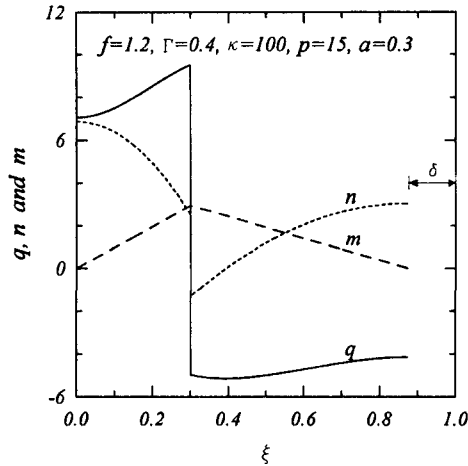


그림 4. 합용력선도

그림 3은 $f=1.2$, $\Gamma=0.4$, $\kappa=100$, $p=15$ 인 보의 하중위치 a 가 변화할 때 거동값 α/π , δ , η_{\max} 의 변화를 나타낸 것이다. 미소처짐이론에 의해 단순보의 거동을 해석하면 보의 중앙에 집중하중이 작용하는 경우 최대처짐이 발생하나 그림 3에서 최대처짐은 보의 중앙에서 회전지점쪽으로 이동한 것을 알 수 있다. 이는 보의 중앙에 하중이 작용하더라도 우단인 이동지점이 수평변위를 일으켜 회전지점쪽으로 이동하기 때문이다.

그림 4는 $f=1.2$, $\Gamma=0.4$, $\kappa=100$, $p=15$, $a=0.3$ 인 보의 합용력도 q , n , m 을 나타낸 것이다. 미소처짐이론에 의해 산출한 전단력은 하중 재하위치까지 그 크기의 변화가 발생하지 않으나, 이 그림에서 q 의 변화를 살펴보면 매우 큰 증가를 보이고 있다. 이는 단면회전각 θ 값이 감소함에 따라 식 (24)에 나타낸 q 값이 증가하기 때문이며, 축방향력 n 도 θ 의 변화에 따라 그 값이 매우 크게 변화한다. 따라서 대변형이 발생하는 구조물의 해석시에는 보다 정확한 합용력의 산출을 위해 반드시 비선형이론을 적용해야 함을 알 수 있다.

그림 5는 $f=1.2$, $\Gamma=0.4$, $\kappa=100$, $p=15$, $a=0.3$ 인 보의 하중단계별 정확탄성곡선 (ξ , η)의 예를 보여주고 있다. 하중의 크기가 증가함에 따라 좌단(회전지점)의 단면회전각 α 와 우단(이동지점)의 수평처짐 δ 가 증가함을 알 수 있다.

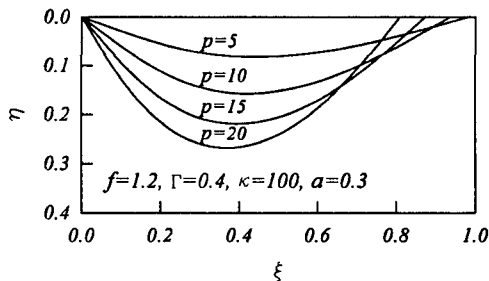


그림 5. 정확탄성곡선의 예

5. 결 론

이 논문은 전단변형을 고려한 집중하중을 받는 단순보의 거동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계를 이용하여 대상 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식으로 대상 보의 함용력 및 거동값들을 효율적으로 산출할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 지배미분방정식 및 해석결과를 무차원화하여 연구결과의 활용범위를 넓혔으며, 수치해석의 결과로 전단변형 영향요소들이 거동값에 미치는 영향을 분석하였다. 또한, 무차원 집중하중과 하중위치의 변화에 따른 거동값의 변화를 고찰하고, 비선형이론에 의한 함용력선도와 정확탄성곡선의 예를 제시하였다. 본 연구의 결과들은 대변형이 발생하는 구조물의 비선형 해석 및 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Chucheepsakul, S., Buncharon, S. and Huang, T., "Elastica of simple variable-arc-length beams subjected to end moment," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, 1995, pp.767-772.
2. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., "Large deflection of simple variable-arc-length beams subjected to a point load," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.4, 1996, pp.49-59.
3. Lee, B.K., Wilson J.F. and Oh, S.J., "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-Section," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.28, No.5, 1993, pp.579-589.
4. Lee, B.K. and Oh, S.J., "Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, No.18, 2000, pp.2507-2518.
5. Wang, C.M. and Kitipornchai, S., "Shooting optimization technique for large deflection analysis of structural member," *Engineering Structures*, Vol.14(4), 1992, pp.231-240.
6. Chucheepsakul, S, Buncharoen and Wang, C.M., "Large deflection of beam under moment gradient," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.120(9), 1993, pp.1848-1860.
7. Theocaris, P.S. and Panayotounakos, D.E., "Exact solution of the non-linear differential equation concerning the elastic line of a straight rod due to terminal loading," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.17, No.5/6, 1982, pp.395-402.
8. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1986.