

## 케이블 돔의 기하학적 비선형 동적해석

### Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Cable Domes

한 상울\*      서준호\*\*      김종범\*\*\*

Han, Sang-Eul      Seo, Jun-Ho      Kim, Jong-Bum

#### ABSTRACT

Cable domes deform very largely because of the characteristics of flexible hybrid system and pre-tension, and include geometrical non-linearity in those structural behavior. Especially wind load is more dominant than seismic loads, because cable domes are flexible structures whose stiffness is very small and self-weight is very light.

Therefore, in this paper, Modified Stiffly Stable Method is applied to analyze the nonlinear dynamic behavior of cable domes and compared these results with ones of Newmark- $\beta$  Method which is generally used.

The Seoul Olympic Gymnastic Arena is taken as an numerical example and three kinds of models with giving each different intensity of pre-tension are selected. And dynamic nonlinear behavior of cable domes are analyzed by artificial spectrum of wind velocity wave which is similar to actual wind loads.

#### 1. 서 론

대공간 구조는 힘의 흐름을 자연스럽게 하고, 휨모멘트의 영향을 가능한 저감시켜, 면내력만으로 외부하중에 저항케 하는 역학 개념을 기초로, 구조시스템의 효율성을 극대화시키는 형태저항형 구조 시스템이다. 그중 케이블 돔은 연성구조 시스템으로서 인장력을 도입하여 강성을 부여하고, 가능한 압축 부재의 수를 줄이고 인장 부재를 케이블로 대체하여 대공간 구조물이 요구하는 경량화 및 구조적 합리성을 도모한 최진 구조 시스템이다. 케이블 돔 구조는 케이블, 포스트, 막 요소로 구성되며, 초기에는 불안정하지만 케이블에 장력을 도입함에 따라 전체 구조 시스템이 안정화되고, 외력에 대한 강성을 갖게 되어 구조적 특성을 발휘하는 복합 구조 시스템이다. 그러나, 자중이 가볍고 연성이기 때문에 바람에 대한 응답이 강성구조물에 비하여 상당히 크기 때문에 동적 거동 특성에 관한 규명이 크게 요구된다. 따라서 이 논문에서는 대변형 거동 특성을 갖는 연성구조물의 동적 응답을 해석하기 위하여 동적해석 기법을 개발하고, 이를 적용함으로써 케이블 돔과 같은 연성구조물의 바람에 의한 비선형 동적거동 특성을 파악하고자 한다.

일반적으로 사용되는 동적 해석기법인 뉴마크-베타법(Newmark- $\beta$  Method)은 직접적분법의 하나로  $\gamma$ 와  $\beta$ 값의 변화로 여러 조건에 맞는 해석을 수행할 수 있다. 뉴마크-베타법 중 평균가속도법과 선형가속도법을 주로 사용하는데, 평균가속도법은  $\Delta t$ 에 관계없이 수렴의 안정성을 보이나 해의 정도가 떨어지며, 반대로 선형가속도법은 해의 정도는 좋으나,  $\Delta t$ 에 따라 수렴의 안정성이 결정된다. 여기에 기하학적 비선형성을 고려하게 되면 선형가속도법의 안정범위는 상당히 한정적이다. 안정수렴법(Stiffly Stable Method)<sup>1)</sup>은 후진차분을 근간으로 하고,  $\Delta t$ 에 관계없이 안정적으로 수렴하는 특징이 있으며, 수정 안정수렴법<sup>4)</sup>은 안정수렴법의 2단계법과 3단계법을 혼합하여 만들어진 기법이다. 이 연구에서는 동적 비선형 해석 시 안정성이 높은 수정 안정수렴법을 이용하여 케이블 돔의 해석을 수행하고, 그 결과를 뉴마크-베타법의 결과와 비교·분석한다.

케이블 요소는 트러스 요소와 같은 형식을 갖으나, 인장력에만 저항하고 압축력에는 저항하지 못하기 때

\* 정희원, 인하대학교 건축학부 교수

\*\* (주)동양구조엔지니어링 사원

\*\*\* 인하대학교 건축학부 박사과정

문에 케이블 요소에 압축력이 작용하면 주름(wrinkling) 등의 불안정현상이 나타난다. 케이블에 불안정현상이 발생하면 강성행렬의 행렬식이 '0'이 되는 특이현상(singularity)이 발생하여 해석이 더 이상 진행되지 못한다. 그러므로, 케이블 돔의 해석 시, 케이블 부재의 불안정문제를 극복하는 기법을 적용하여야만 해석을 수행할 수 있다. 이 논문에서는 동적 해석의 특징을 이용하여 케이블 요소의 불안정문제 처리기법을 적용하였다.

## 2. 수치해석 알고리즘

### 2.1 기하학적 비선형 동적해석법

기하학적 비선형 해석을 위한 수렴단계가 포함된 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{d}_i^k + C\dot{d}_i^k + K_{i-1}\Delta d^k = R_i - F_i^{k-1} \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 뉴마크-베타법의 비선형 알고리즘

선형가속도법을 적용한 뉴마크-베타법에 수렴 형식과 증분 식을 취하여 정리하면

$$\begin{aligned} \dot{d}_i^k &= \frac{3}{\Delta t}(d_i^{k-1} + \Delta d^k - d_{i-1}) - \frac{1}{2}\ddot{d}_{i-1} - 2\dot{d}_{i-1} \\ \ddot{d}_i^k &= \frac{6}{\Delta t^2}(d_i^{k-1} + \Delta d^k - d_{i-1}) - \frac{1}{\Delta t}\ddot{d}_{i-1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{d}_{i-1} - \ddot{d}_{i-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

이 되고, 위 식을 운동방정식 (2.1)에 대입하여  $\Delta d^k$ 에 대하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \left\{ K_{i-1} + \frac{3}{\Delta t}C + \frac{6}{\Delta t^2}M \right\} \Delta d^k &= R_i - F_i^{k-1} - C \left\{ \frac{3}{\Delta t}(d_i^{k-1} - d_{i-1}) - \frac{1}{2}\ddot{d}_{i-1} - 2\dot{d}_{i-1} \right\} \\ &\quad - M \left\{ \frac{6}{\Delta t^2}(d_i^{k-1} - d_{i-1}) - \frac{1}{\Delta t}(\ddot{d}_{i-1} + 4\dot{d}_{i-1}) - \ddot{d}_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2 수정 안정수렴법의 비선형 알고리즘

Park의 제안 식에 수렴 형식과 증분 식을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{d}_i^k &= \frac{1}{6\Delta t}(10d_i^{k-1} + 10\Delta d^k - 15d_{i-1} + 6d_{i-2} - d_{i-3}) \\ \ddot{d}_i^k &= \frac{5}{18\Delta t^2}(10d_i^{k-1} + 10\Delta d^k - 15d_{i-1} + 6d_{i-2} - d_{i-3}) - \frac{1}{6\Delta t}(15\dot{d}_{i-1} - 6\dot{d}_{i-2} + \dot{d}_{i-3}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

위 식을 운동방정식 (2.1)에 대입하여  $\Delta d^k$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left\{ K_{i-1} + C\frac{5}{3\Delta t} + M\left(\frac{5}{3\Delta t}\right)^2 \right\} \Delta d^k &= R_i - F_i^{k-1} - \left( \frac{C}{6\Delta t} + \frac{5M}{18\Delta t^2} \right) (10d_i^{k-1} - 15d_{i-1} + 6d_{i-2} - d_{i-3}) \\ &\quad + \frac{M}{6\Delta t} (15\dot{d}_{i-1} - 6\dot{d}_{i-2} + \dot{d}_{i-3}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.3 케이블 요소의 불안정문제 처리

케이블 요소는 트러스 요소와 같은 형식을 갖으나, 인장력에만 저항하고 압축력에는 저항하지 못한다. 따라서 케이블 요소에 압축력이 작용하면 불안정문제가 발생한다. 이러한 케이블의 불안정문제를 해결하기 위

해 압축응력이 발생하는 부재의 응력과 탄성계수를 '0'으로 치환한다. 이렇게 하면 그 부재는 압축응력이 발생하지 않고 강성 또한 '0'이 된다.

$$\sigma_x = 0, \quad E_x = 0 \quad (2.6)$$

식 (2.6)과 같은 치환을 통해 구조물의 새로운 전체 강성행렬을 구한 후, 다음단계 해석을 수행한다.

케이블의 불안정문제 처리에 있어서 정적해석에서는 강성행렬의 행렬식이 '0'이 되는 특이현상이 나타나 변위를 구할 수 없는 경우가 발생하지만, 동적해석에서는 감쇠항과 질량항의 존재로 이런 특이현상이 일어나지 않는다. 따라서 케이블 부재에 압축응력 발생으로 인한, 식 (2.6)과 같은 처리를 하더라도 절점의 변위는 계속 구할 수 있으며, 인장력이 회복되는 단계에서 다시 부재의 탄성계수를 복원시켜 해석함으로써, 구조체가 가지는 물리적 성질을 표현할 수 있다.

### 3. 수치해석 및 고찰

#### 3.1 단위 스타돔의 동적 비선형 해석

해석모델은 그림 3.1과 같고, 부재 재원은  $E=2,100 \text{ t/cm}^2$ ,  $A=0.5 \text{ cm}^2$  인 스타돔이며, 하중은 정점에 Z 방향으로 그림 3.2와 같은 형태로 주고, 해석은 뉴마크-베타법과 수정 안정수렴법을 사용하여  $\Delta t$ 가 각각 0.005, 0.01, 0.05, 0.1 초 일 때 비선형 동적해석 결과와  $\Delta t$ 가 0.01 초 일 때 선형해석 결과를 비교하였다.

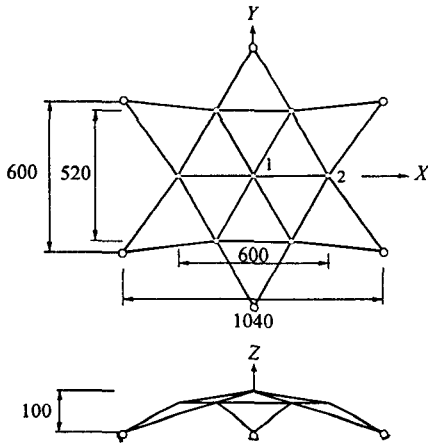


그림 3.1 해석모델 (스타돔)

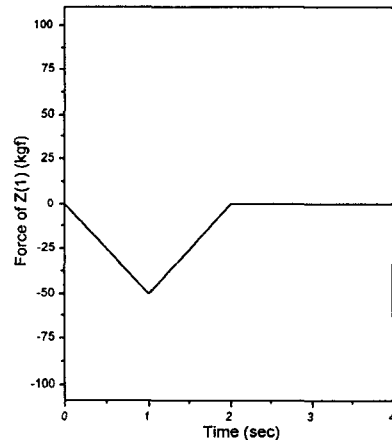


그림 3.2 하중형태

선형해석에서는 두 가지 해석방법의 결과가 거의 동일하여 뉴마크-베타법의 해석결과만 표기하였다.

표 3.1-3.2, 그림 3.3-3.4에서와 같이 뉴마크-베타법과 수정 안정수렴법의 해의 정확도 차이는 거의 없으나, 뉴마크-베타법은  $\Delta t$ 가 0.04 초 일 경우(굵은 점선) 해석결과가 수렴되지 못하고 발산하였다. 그러나, 수정 안정수렴법에서는  $\Delta t$ 가 0.05 초 일 경우에도 안정적으로 수렴하였으며, 이보다 큰 값인 0.1 초에서도 비록, 주기가 어느 정도 이완되는 현상을 보이긴 했지만 안정적으로 수렴하였다.

표 3.1 해석방법에 따른 변위 비교 (정점의 Z축)

해석방법	$\Delta t$ (sec)	최대변위 (mm)	발생시간 (sec)	비고
선형해석	0.01	-5.999	1.05	뉴마크-베타법
뉴마크-베타법	0.005	-6.779	1.075	
	0.01	-6.782	1.10	
	0.04	$\infty$	-	발산
수정 안정수렴법	0.005	-6.785	1.095	
	0.01	-6.783	1.10	
	0.05	-6.799	1.10	
	0.1	-6.903	1.10	

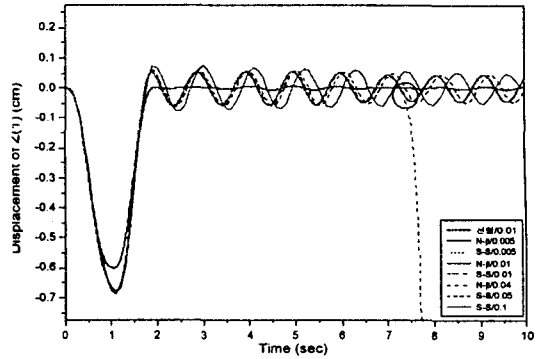


그림 3.3 정점(절점1)의 Z방향 변위

표 3.2 해석방법에 따른 변위 비교 (절점2의 X축)

해석방법	$\Delta t$ (sec)	최대변위 (mm)	발생시간 (sec)	비고
선형해석	0.01	0.2438	1.12	뉴마크-베타법
뉴마크-베타법	0.005	0.2439	1.12	
	0.01	0.2438	1.12	
	0.04	$\infty$	-	발산
수정 안정수렴법	0.005	0.2437	1.12	
	0.01	0.2437	1.12	
	0.05	0.2436	1.10	
	0.1	0.2462	1.10	

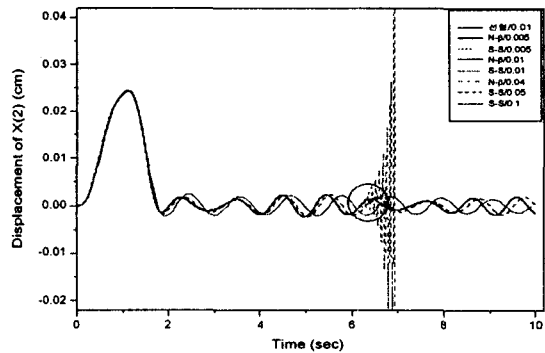


그림 3.4 절점2의 X방향 변위

3.2 단위 트러스-케이블 모델의 동적 비선형 해석

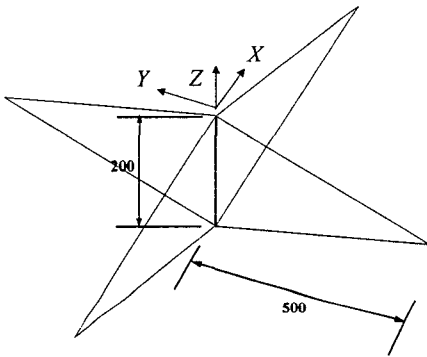


그림 3.5 단위 트러스-케이블 모델

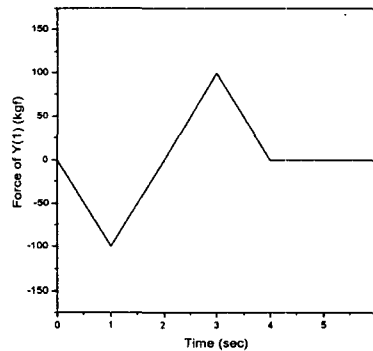


그림 3.6 하중형태

해석모델은 그림 3.5와 같고, 부재 제원은 중앙의 스트럿 부재가  $E = 2,100 \text{ t/cm}^2$ ,  $A = 5.0 \text{ cm}^2$ 이며, 방사 케이블 부재가  $E = 1,400 \text{ t/cm}^2$ ,  $A = 0.1 \text{ cm}^2$  인 단위 트러스-케이블 모델이다. 하중은 정점에 Y 방향으로 그림 3.6과 같은 형태로 주었다. 또한 초기장력을 각각 100 kgf 와 25 kgf 로 설정하여 케이블 부재에 불안정 문제가 발생하였을 경우와 발생하지 않은 경우를 비교하였고,  $\Delta t$ 가 각각 0.005, 0.01초 일 때 비선형 동적해석 결과와  $\Delta t$ 가 0.005초 일 때 선형해석 결과를 비교하였다.

표 3.3 해석결과 (정점의 Y축 방향)

해석기법	$\Delta t$ (sec)	초기장력 (kgf)	최대변위 (mm)	발생시간 (sec)	비 고
뉴마크-베타법	(선형해석) 0.005	100	2.270	3.10	발 산
		25	$\infty$	-	
	0.005	100	2.270	3.10	
		25	1.743	3.12	
	0.01	100	2.267	3.10	
		25	1.766	3.06	
수정 안정수렴법	(선형해석) 0.005	100	2.264	3.10	
		25	-1.046	0.995	
	0.005	100	2.261	3.10	
		25	1.395	3.07	
	0.01	100	2.256	3.10	
		25	1.426	3.07	

표 3.4 해석결과 (정점의 Z축 방향)

해석기법	$\Delta t$ (sec)	초기장력 (kgf)	최대변위 ( $10^{-3}$ cm)	발생시간 (sec)	비 고
뉴마크-베타법	(선형해석) 0.005	100	0	-	발 산
		25	$\infty$	-	
	0.005	100	0.1931	3.62	
		25	-168.91	3.345	
	0.01	100	0.1929	3.62	
		25	178.07	2.53	
수정 안정수렴법	(선형해석) 0.005	100	0	-	
		25	-43.51	0.895	
	0.005	100	0.1858	3.61	
		25	-122.98	3.345	
	0.01	100	0.1848	3.61	
		25	-122.91	3.35	

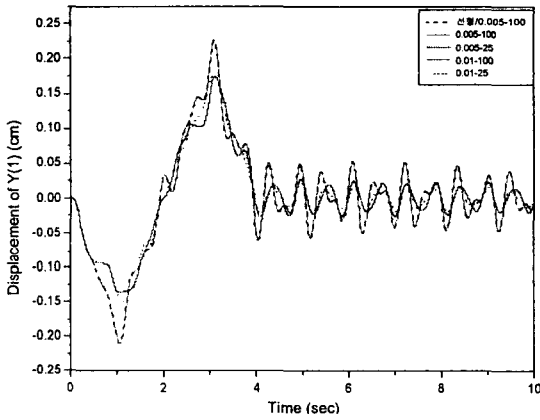


그림 3.7 정점에서의 Y방향 변위 (뉴마크-베타법)

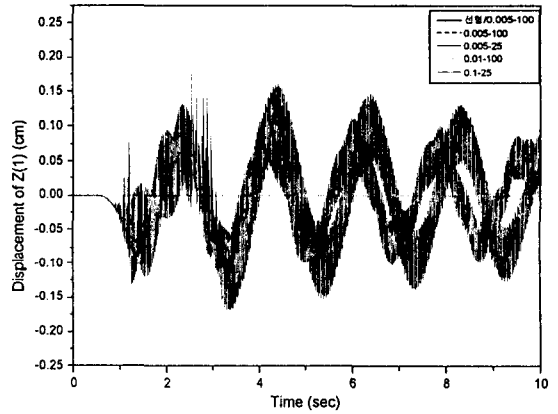


그림 3.8 정점에서의 Z방향 변위 (뉴마크-베타법)

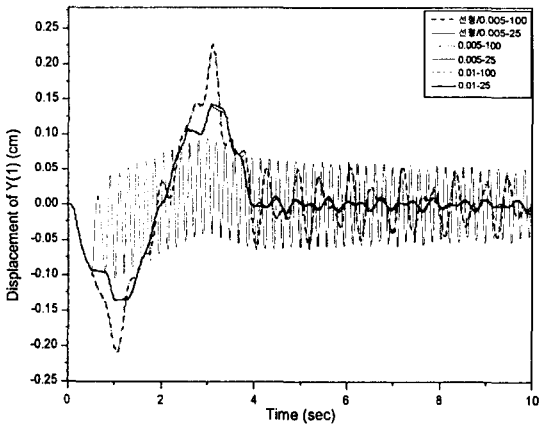


그림 3.9 정점에서의 Y방향 변위 (수정 안정수렴법)

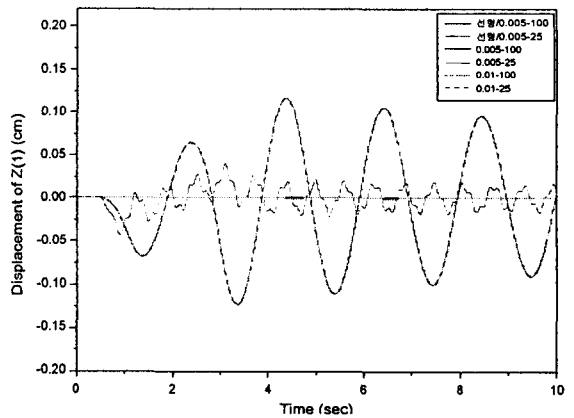


그림 3.10 정점에서의 Z방향 변위 (수정 안정수렴법)

그림 3.7-3.10과 표 3.3-3.4에서 나타나는 것처럼 뉴마크-베타법과 수정 안정수렴법의 해의 정도차이는 미미하나, 케이블에 불안정현상이 발생하였을 때 뉴마크-베타법은 선형해석 시  $\Delta t$ 의 값은 실제 해석에서 무의미할 정도의 작은 값을 요하고, 비선형 해석 시 수렴은 되나 극히 불안정한 형태로 진행이 되며  $\Delta t$ 의 값도 수정 안정수렴법에 비해 매우 제한적이다. 따라서, 불안정현상이 발생할 수 있는 케이블 부재를 사용한 구조물의 동적 비선형 해석 시 뉴마크-베타법보다 수정 안정수렴법을 선택하는 것이 효과적이다.

### 3.3 케이블 돔의 동적 비선형 해석

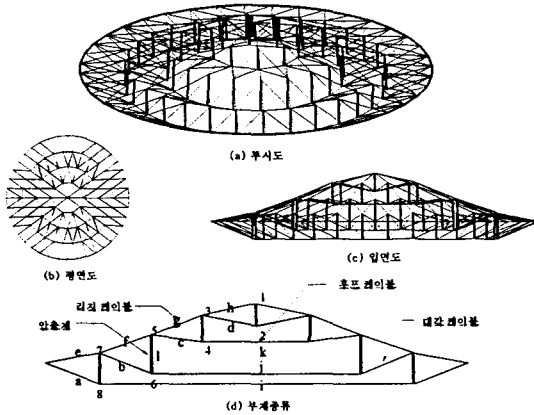


그림 3.11 수치해석 모델

해석모델로는 그림 3.11과 같이 서울올림픽체조경기장과 동일한 시스템을 갖는 직경 100 m의 케이블 돔이며, 부재내력의 크기에 따라 구조체의 거동에 미치는 영향을 파악하기 위해 사례 1, 사례 2, 사례 3으로 구분하였고, 그 크기는 표 3.5와 같으며 해석방법은 수정 안정수렴법을 적용하였다.

수정 안정수렴법에서의  $\Delta t$ 의 크기는 해석과정의 안정성과는 무관하며 어느 값 이하가 되면 해석상의 오차를 무시할 수 있다.  $\Delta t$ 가 작아질수록 고차모드의 거동형상을 보여줄 뿐 해의 정확도는 크게 변하지 않는다. 따라서 해의 정확도와 시간의 효율적인 측면을 고려하여  $\Delta t$ 를 0.05 초로 놓고 해석을 수행하였다.

#### 3.3.1 바람하중의 산정

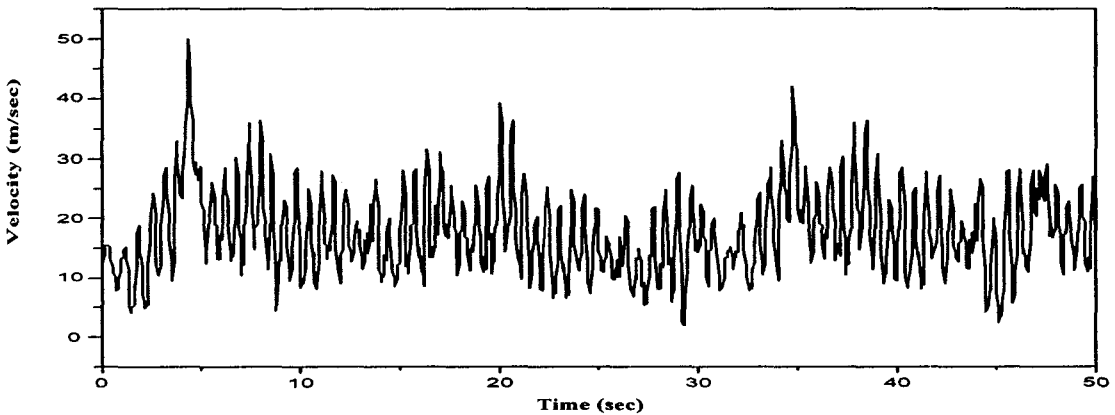


그림 3.12 가정된 풍속파

표 3.5 해석종류에 따른 부재내력 (( ) : 초기장력) 단위:ton

부재명		사례 1	사례 2	사례 3
스트럿	l	-64.405	-65.645	-56.446
	a	49.1(50)	45.2(45)	29.4(30)
대각케이블	b	40.2(40)	39.7(40)	40.3(40)
	c	51.4(50)	50.1(50)	40.9(40)
	d	31.2(30)	30.9(30)	30.2(30)
	e	91.693	91.860	92.418
리치케이블	f	104.775	97.968	84.582
	g	59.011	58.244	52.323
	h	29.089	28.591	21.784
	i	477.888	486.944	287.362
후프케이블	j	271.777	270.223	272.454
	k	215.352	188.424	167.826

3.3.2 해석결과 ; overall downforce 작용 시

표 3.6 최대변위 및 최대내력 단위(cm, ton)

	사례 1	사례 2	사례 3
최대변위(노드)	3.534(82)	-4.809(34)	-5.752(48)
스트럿	l	-85.989	-76.813
대각케이블	a	115.504	121.841
	b	140.484	125.784
	c	83.103	79.280
	d	48.108	77.822
리지케이블	e	91.173	73.223
	f	80.005	107.564
	g	84.361	157.324
	h	50.054	59.368
후프케이블	i	536.414	586.507
	j	318.711	503.479
	k	255.612	284.382

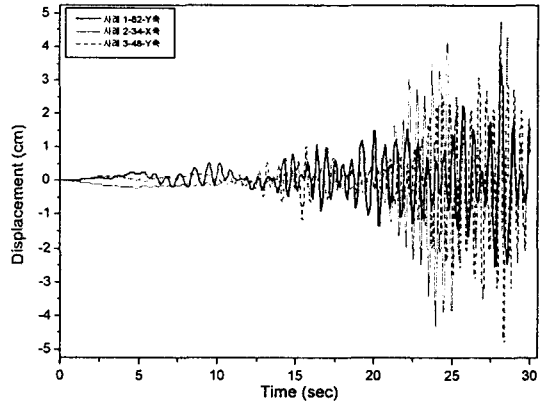


그림 3.13 최대변위 발생 절점의 변위

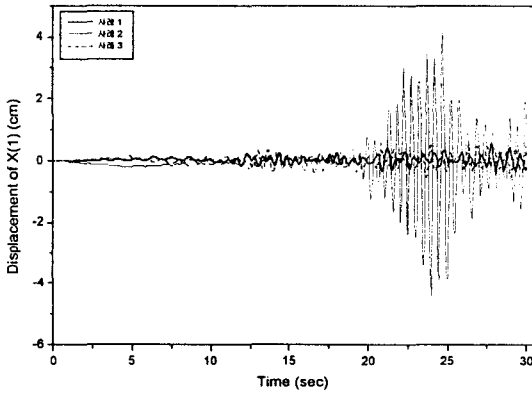


그림 3.14 정점(절점1)에서의 수평변위

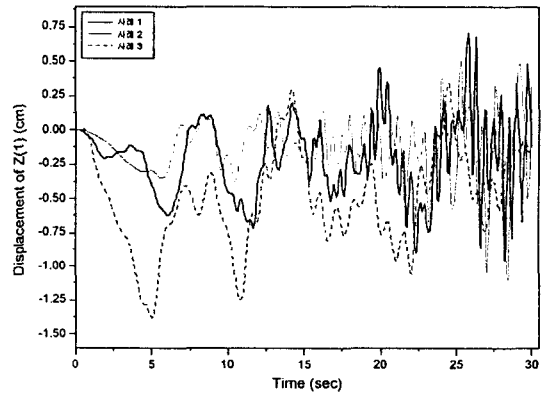


그림 3.15 정점(절점1)에서의 수직변위

3.3.2 해석결과 ; overall uplift 작용 시

표 3.7 최대변위 및 최대내력 단위(cm, ton)

	사례 1	사례 2	사례 3
최대변위(노드)	12.613(23)	12.382(24)	12.546(23)
스트럿	l	-80.860	-82.509
대각케이블	a	53.333	53.176
	b	46.091	46.265
	c	57.781	52.507
	d	42.431	42.189
리지케이블	e	101.079	96.777
	f	113.218	106.625
	g	68.930	68.604
	h	37.631	37.906
후프케이블	i	492.999	494.001
	j	278.604	279.425
	k	230.729	208.193

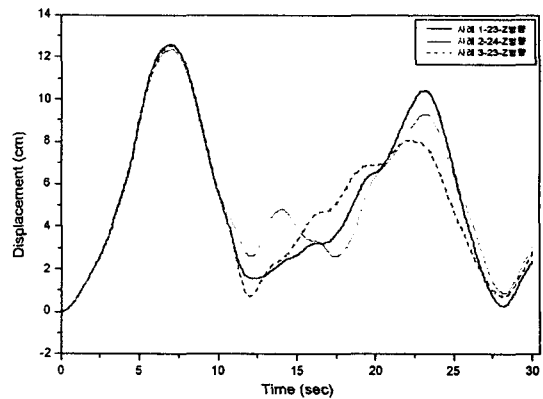


그림 3.16 최대변위 발생 절점의 변위

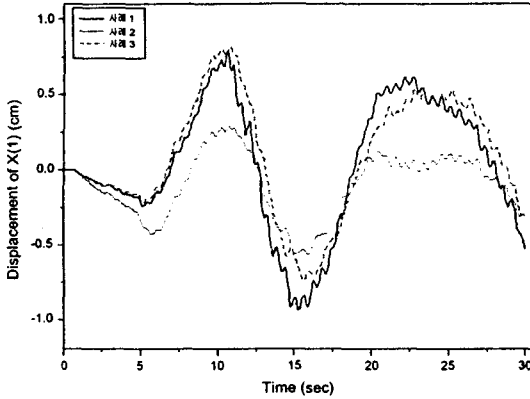


그림 3.17 정점(절점)에서의 수평변위

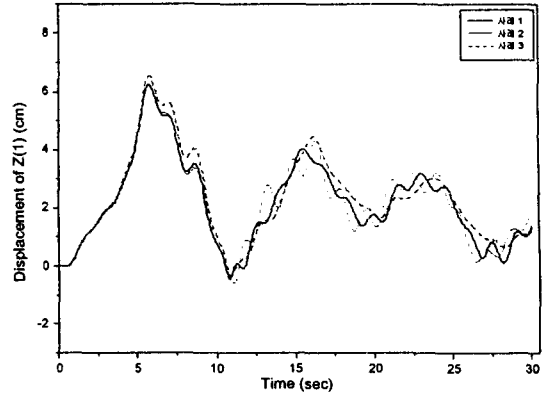


그림 3.18 정점(절점)에서의 수직변위

#### 4. 결 론

1. 수정 안정수렴법은 뉴마크-베타법과 비교하여 해의 정도도 3.78 퍼센트 이하의 오차를 갖는 만족할 수 있는 수준이며,  $\Delta t$ 의 크기에 관계없이 해석과정의 안정성을 갖는 장점이 있다. 또한 케이블 부재에 발생할 수 있는 불안정현상을 극복하는 해석기법의 적용에 있어서도 뉴마크-베타법보다 안정적으로 수렴되었다. 따라서, 케이블 돔의 동적 비선형 해석 시, 일반적으로 널리 사용되는 뉴마크-베타법보다는 수정 안정수렴법을 적용하는 것이 효과적이며,  $\Delta t$ 가 작아질수록 고차모드의 거동을 보여줄 뿐, 해의 정확도는 크게 변함이 없으므로 해석의 정확도와 시간의 효율적인 측면을 고려하여  $\Delta t$ 를 0.05 초 전후로 놓는 것이 효율적이라 사료된다.

2. 케이블 돔과 같은 연성구조물은 구조체를 안정화하기 위해 초기 장력이 도입되는데, 바람하중이 downforce로 작용하는 경우 초기장력 크기에 따른 해석결과를 보면, 정점의 X 축 변위에서 사례 1과 사례 3은 해석 전반에 걸쳐 크게 일어나지 않으나, 사례 2에서는 20 초 이후 변위의 증가가 두드러지게 일어났다. 또한, 정점의 Z 축 변위에서 각 사례별 변위 크기가 2~5배정도 차이가 나, 초기장력에 따른 케이블 돔의 바람에 대한 응답이 매우 민감하게 나타났다. 따라서, 구조 시스템에 따른 적절한 초기장력 결정 시, 정적해석 뿐만 아니라 바람에 의한 동적 해석 결과, 특히 동적 비선형 해석 결과가 고려되어야 한다.

#### 참고문헌

1. Adeli, H., Gere, J. M., and Weaver, W. Jr., "Algorithms for Nonlinear Structural Dynamics," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST2, 1978, pp. 263-280.
2. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Mexico, 1996.
3. Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics," Transaction of the ASCE, Vol. 127, Part I, 1962, pp. 1406 -1435.
4. Park, K. C., "An Improved Stiffly Stable Method for Direct Integration of Nonlinear Structural Dynamic Equations," Journal of Applied Mechanics, Series E, ASME, 1975, pp. 646-670.
5. 한국전산구조공학회, 대공간 구조물의 해석 및 설계, 전산구조공학회 기술강습회교재 15-2, 1997.
6. 한상을, 윤종현, "케이블 돔의 구조적 거동 특성에 관한 연구," 한국전산구조공학회 가을학술발표회 논문집, 제 13권 2집, 2000.
6. 한상을, 이경수, "케이블돔 구조물의 안정화 이행과정 및 구조적 거동특성에 관한 연구," 한국전산구조공학회 봄학술발표회 논문집, 제 11권 1집, 1999.