

# 기하학적 비선형을 고려한 아치 구조물의 정현형 조화하중에 의한 동적 불안정 현상에 관한 연구

## Dynamic Instability of Arch Structures Considering Geometric Nonlinearity by Sinusoidal Harmonic Excitation

윤 태 영\*                      김 승 덕\*\*  
Yun, Tae-Young              Kim, Seung-Deog

---

### ABSTRACT

We investigate the fundamental mechanisms of the dynamic instability when the sinusoidal shaped arch structures subjected to sinusoidal harmonic excitation with pin-ends. In nonlinear dynamics, examining the characteristics of attractor on the phase plane and investigating the dynamic buckling process are very important thing for understanding why unstable phenomena are sensitively originated by various initial conditions.

In this study, the direct and the indirect snap-buckling of shallow arches considering geometrical nonlinearity are investigated numerically and compared with the step excitation critical load.

---

### 1. 서    론

아치는 구조적으로 안정되고 미적으로 아름답기 때문에 오래 전부터 널리 사용된 구조 형식이다. 곡률을 가진 곡선구조 형태인 아치 구조물은 외부하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 구조물의 곡률을 이용하여 주로 압축력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다. 따라서 가볍고, 얇게 대공간을 만들 수 있는 장점을 갖고 있다. 아치가 가늘고 길어질수록 그 강도는 좌굴강도에 의해 결정되고, 또한 좌굴강도는 좌굴형상에 의해 지배된다. 따라서 좌굴형상 및 좌굴강도의 해석, 즉 구조불안정 문제의 해결은 아치의 설계강도 결정에 중요한 인자이고, 이는 기하학적 비선형 문제가 된다.

이러한 이유로 아치의 구조설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의해 구조거동의 비선형적 특성을 파악해야 할 경우가 많다. 특히 외력 자체가 동적 특성이 강할 경우에는 동적 비선형 문제를 다루어야 한다.

셸형 구조물의 동적불안정은 외력과 구조물 형상에 따라 직접좌굴(direct snapping) 및 간접좌굴(indirect snapping)등, 매우 복잡한 거동을 하는 것이 일반적이다. 그 중에서도 대칭변형모드와 비대칭변형모드와의 연성(coupling) 작용에 의한 간접좌굴 문제는 초기조건에 민감하게 반응하며, 비선형성이 강하게 나타나는 것이 특징이다.

본 연구의 해석 모델은 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)를 이용하였으며, 양 지지점은 핀으로 고정되

---

\* 정희원 · 세명대학교 건축공학과 석사과정

\*\* 정희원 · 세명대학교 건축공학과 부교수

있다. 외력은 정현형 분포하중으로 하고, 시간변화에 따른 하중 지속 형태는 정현형 조화하중(sinusoidal harmonic excitation)을 받았을 때의 알은 아치를 대상으로 한다. 비선형성에 의한 구조물의 동적응답거동 특성과 초기조건에 민감한 구조계에서의 불안정성의 증폭 과정을 수치 시뮬레이션에 의해 조사한다. 즉, 동적 좌굴 발생 경로를 파악하기 위하여 비선형 시각력 응답곡선과 이들의 위상면에서의 끌개(attractor) 특성을 고찰한다. 또 초기불완전(initial imperfection)에 의해 민감하게 반응하는 동적 비선형 문제인 간접좌굴에 관하여 카오스의 생성 여부도 관찰한다.

## 2. 비선형 운동방정식

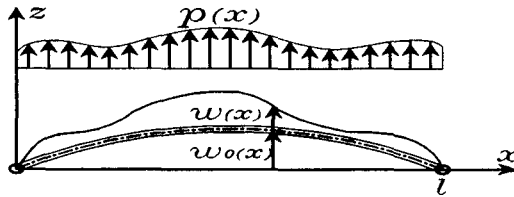


그림 1 아치의 기하학적 형상

그림 1에서와 같이 직교좌표계를 사용하여 아치의 초기형상을  $w_0(x)$ ,  $x$ 방향 및  $z$ 방향의 변위를  $u(x)$ ,  $w(x)$ 로 나타내면, 아치의 비선형 운동방정식은 식(1)과 같이 얻어진다.

$$EI w_{,xxxx} - \frac{EA}{2I} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2w_{0,x} w_{,x}] dx \cdot (w_{0,xx} + w_{,xx}) + c w_{,t} + \rho A w_{,tt} - p = 0 \quad (1)$$

여기서,  $E$ : 탄성계수,  $A$ : 단면적,  $I$  = 단면2차모멘트,  $c$  = 감쇠정수,  $\rho$  = 밀도이다.

알은 아치의 일반화된 좌굴해석을 위하여 식(2)와 같은 무차원 파라미터를 도입한다.

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \eta = \frac{w}{k}, \quad \eta_0 = \frac{w_0}{k}, \quad \xi = \frac{\pi}{l} x, \quad q = \frac{p}{EI k} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \quad (2)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\rho A \omega_0}$$

윗 식의 파라미터를 식(1)에 대입하여 정리하면 식(3)과 같은 무차원화된 비선형 운동방정식이 얻어진다.

$$\eta_{,tttt} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(\eta_{,\xi})^2 + 2\eta_{0,\xi} \eta_{,\xi}] d\xi \cdot (\eta_{0,\xi\xi} + \eta_{,\xi\xi}) + \gamma \eta_{,t} + \eta_{,tt} - q = 0 \quad (3)$$

## 3. Galerkin법에 의한 이산화 운동방정식

무차원화 비선형 방정식인 식(3)의 해를 얻기 위하여 Galerkin법을 적용하여 이산화한다. 본 연구에서는 초

기형상과 작용하는 분포하중이 모두 정현형(正弦型)일 때를 대상으로 한다. 초기형상, 변위, 하중을 Fourier급 수를 이용하여 정의하면 식(4)와 같다.

$$\eta_0 = H \sin \xi, \quad \eta = \sum_{n=1}^N (-D_n) \sin n\xi, \quad q = -\Lambda \sin \xi \quad (4)$$

여기에서 변위 및 하중의 방향을 역방향으로 하기 위하여 '-'를 추가하였다. 이산화 과정에서 각 함수의 직교성(orthogonality)과 Galerkin법을 이용하면 일반화 좌표  $D_n(\tau)$ 를 변수로 하는 비선형 운동방정식이 식(5)와 같이 구해진다.

$$F_r(D_1, \dots, D_N, \Lambda) = \sum_{n=1}^N n^4 D_n \delta_{nr} + \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^N n^2 D_n^2 - 2HD_1 \right) \left( -H\delta_{1r} + \sum_{n=1}^N n^2 D_n \delta_{nr} \right) \\ + \gamma \sum_{n=1}^N \dot{D}_n \delta_{nr} + \sum_{n=1}^N \ddot{D}_n \delta_{nr} - \Lambda \delta_{1r} = 0 \quad (5)$$

여기서,  $\delta_{nr}$ 는 Kronecker symbol,  $N$ 은 자유도 수이다.

얇은 아치의 동적 불안정 현상을 파악하기 위해 식(5)에  $n=1, 2$ 를 대입하고, 관성항 및 감쇠항을 제거하여 2자유도계의 비선형 운동방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$F_1(D_1, D_2, \Lambda) = \left( 1 + \frac{1}{2} H^2 \right) D_1 - \frac{3}{4} HD_1^2 - HD_2^2 + D_1 D_2^2 + \frac{1}{4} D_1^3 - \Lambda = 0 \quad (6)$$

$$F_2(D_1, D_2, \Lambda) = 16D_2 - 2HD_1 D_2 + D_1^2 D_2 + 4D_2^3 = 0 \quad (7)$$

#### 4. 정현형 조화하중에 의한 동적 불안정

비선형 운동방정식을 수치적분하기 위해 Newmark- $\beta$ 법 적용에 있어 반복법을 이용하며, 여기서  $\beta = 1/6$ 로 한다. 정현형 조화하중(sinusoidal harmonic excitation)은  $F(\tau) = F_0 \sin \alpha \omega_0 \tau$ 를 이용한다. 여기서  $\omega_0$ 는 해석 대상모델의 1차 고유각 진동수이고,  $\alpha$ 는 Sine파 자체가 나타내는 진동수와 해석모델의 고유 진동수와의 관계를 나타내는 파라미터이며,  $\alpha = 1.0$ 인 경우는 입력파의 진동수가 해석 모델의 1차 고유 진동수와 일치한 경우이다.

snapping 현상이 일어나는 하중레벨을 찾기 위해 시간이력의 지속시간을  $100T$  ( $T$ : 하중레벨 0에서의 고유주기)로, 시간간격은  $\Delta t = T/100$ 로 하고, 하중레벨  $\Lambda$ 의 증분간격은 정적 뿔좌굴 하중을 100등분한 값으로 채택하여 수치적분을 수행한다. 초기 형상 불완전량은 아치 높이의 0.001배의 2차 역대칭 진동모드를 이용하였다. 그림 2는 완전형상일 경우 아치를  $H$ 의 변화에 따라 외력-최대변위 관계를  $\alpha = 1.0$ 인 경우에 대해서 나타낸 것이다. 완전형상의 최대변위응답에서  $H=1$ 에서는 점진적인 곡선을 나타내며,  $H=3$ 이상에서 snapping이 발생함을 알 수 있다. 여기서 일반화 좌표  $D_2$ 는 나타나지 않는다. 그림 3은 형상초기불완전을  $D_2^0 = 0.001H$ 로 입력한 결과이다.  $H=1$ 인 경우에는 완전형상일 때의 결과와 거의 일치하고 있으나,

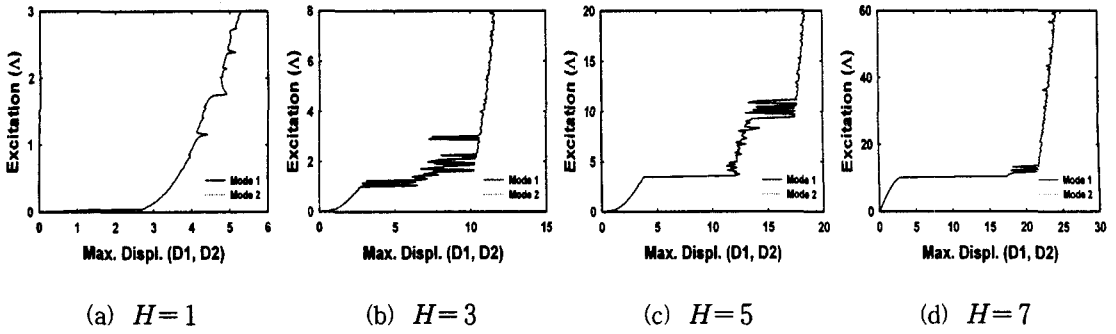


그림 2 완전형상의 최대변위응답 ( $D_2^0=0, \alpha=1.0$ )

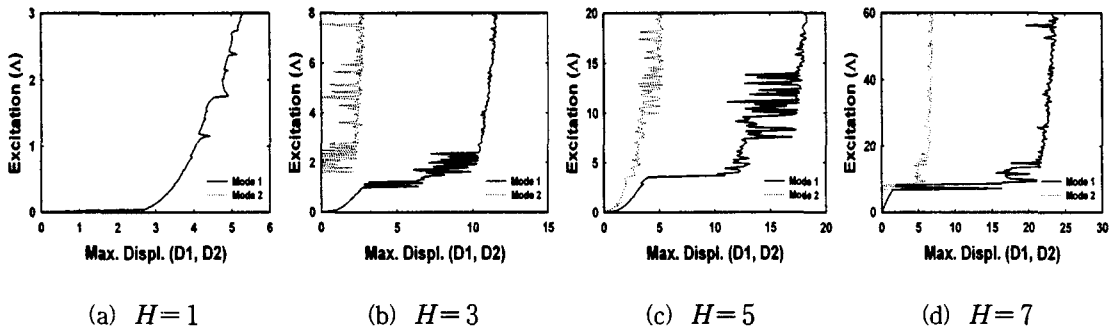


그림 3 불완전형상의 최대변위응답 ( $D_2^0=0.001H, \alpha=1.0$ )

$H=3$ 에서부터  $D_2$ 의 비대칭 변위모드가 미소하게 나타나며, 이는 좌굴하중에도 영향을 미친다.

그림 4는 파라미터  $\alpha$ 를 0.1에서 2.0까지 변화시킨 결과이다. 또한  $\alpha$ 를 변화시키면, 비선형 효과로 인하여  $H=3, 5$ 일 경우  $\alpha=0.9$ 일 때,  $H=6$ 인 경우에는  $\alpha=1.0$ ,  $H=7$ 인 경우에는  $\alpha=1.2$  지점에서 가장 낮은 좌굴하중으로 된다. 이는 아치의 형태가 깊어지면(deep arch) 선형해석 결과로부터 얻은 고유진동수 보다 높은 주파수에서 공진성 좌굴이 일어남을 알 수 있다.

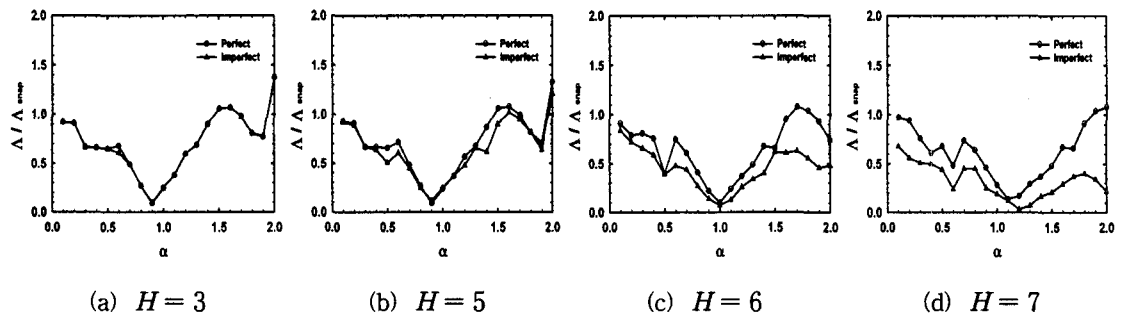
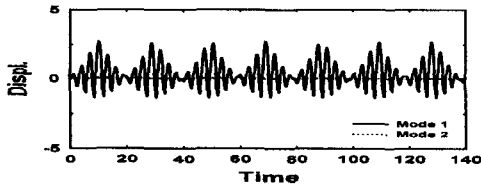


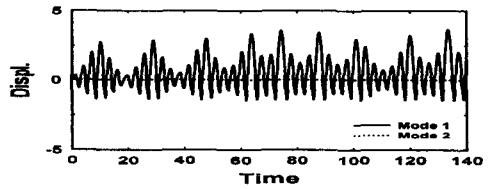
그림 4 좌굴하중과  $\alpha$ 와의 관계

비선형 변위응답의 특성을 분석하기 위해 형상파라미터  $H=3, 5, 7$ 에 대하여 pre-buckling 및 post-buckling 레벨에서 비선형 시각력 응답곡선을 구하여 본다. 완전형상의  $H=3, 5, 7$ 에 대한 시각력 곡선을 그림 5에 나타낸다. 좌굴전에는 형상파라미터  $H$ 의 변화에 따라 진폭의 차는 있으나 유사한 패턴을 나타냄을 알 수 있다. 형상초기불완전  $D_2^0=0.001H$ 인 경우는 그림 6에 나타낸다.  $H=3$ 의 결과는 완전형상의 결과( $D_2^0=0$ )와 거의 일치하고 있으나,  $H=5, 7$ 의 결과에서는 비대칭 변위 모드( $D_2$ )의 현저한 증폭으로 완전형상의 결과와는 다른 패턴을 나타냄을 알 수 있다. 특히 형상파라미터  $H$ 가 증가함에 따라 이러한 현상은 더욱 두드러지며,  $H=7$ 의 post-buckling에서는  $\tau \approx 100$ 까지의 초기진동은 pre-buckling과 유사한 진동패턴을 나타내나,  $\tau$ 가 100을 지나면서 비대칭 모드( $D_2$ )의 간섭으로 인한 대칭모드( $D_1$ )의 진폭이 급격히 증가한다. 이는 대칭모드와 비대칭모드의 연성(coupling)작용에 의한 간접좌굴(indirect snapping)의 메커니즘을 보여주는 것이다.

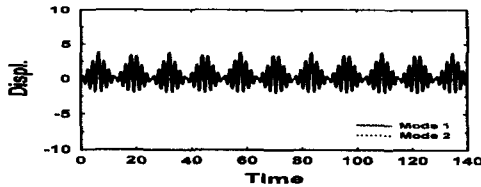
시각력 곡선을 변위-속도 위상곡선으로 나타내면 그림 7,8과 같다. 형상파라미터  $H$ 의 변화와는 관계없이 끌개(attractor)는 한계순환(limit cycle)을 보여주고 있다. 가력레벨이 pre-buckling에서 post-buckling 레벨로 변화함에 따라 끌개의 모양이 한 개의 물방울이 두 개의 물방울로 연결된 모양으로 변한다. 즉, 완전형상일 때는 위상곡선의 궤도는 단일궤도로 연결되어 끌개가 한계순환을 나타내고 있으나, 불완전형상인 경우에는 형상초기불완전에 의한 비선형성의 증폭으로 인해 위상곡선의 궤도는 중복되지 않는 항상 새로운 궤도를 만



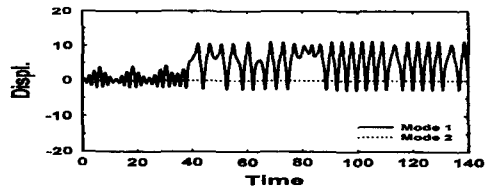
(a) pre-buckling ( $\Lambda=1.02$ ),  $H=3$



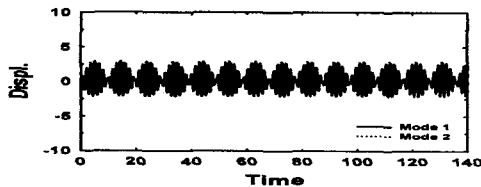
(b) post-buckling ( $\Lambda=1.06$ ),  $H=3$



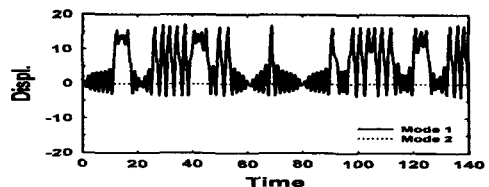
(c) pre-buckling ( $\Lambda=3.42$ ),  $H=5$



(d) post-buckling ( $\Lambda=3.57$ ),  $H=5$

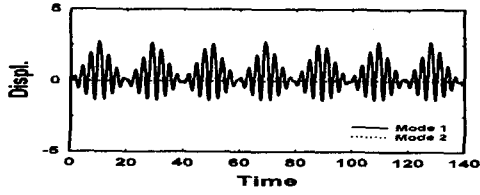


(e) pre-buckling ( $\Lambda=10.09$ ),  $H=7$

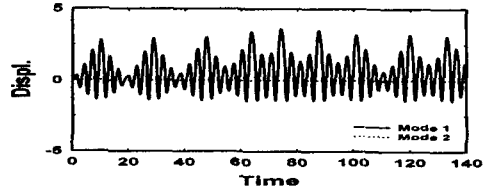


(f) post-buckling ( $\Lambda=10.45$ ),  $H=7$

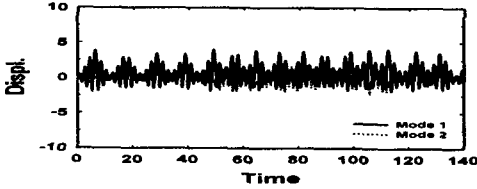
그림 5 완전형상의 시각력곡선 ( $D_2^0=0$ ,  $\alpha=1.0$ )



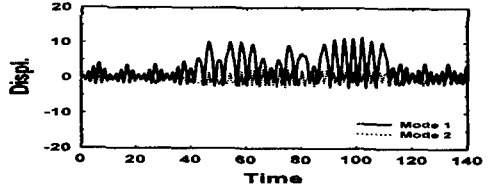
(a) pre-buckling ( $\Lambda=1.02$ ),  $H=3$



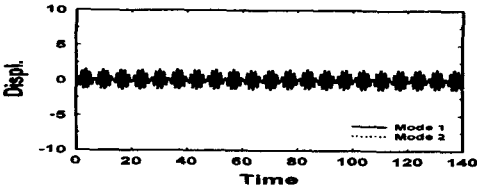
(b) post-buckling ( $\Lambda=1.06$ ),  $H=3$



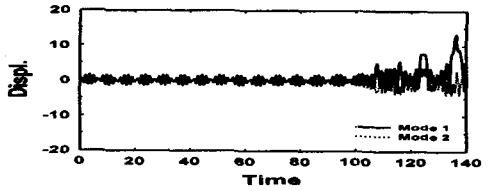
(c) pre-buckling ( $\Lambda=3.57$ ),  $H=5$



(d) post-buckling ( $\Lambda=3.71$ ),  $H=5$

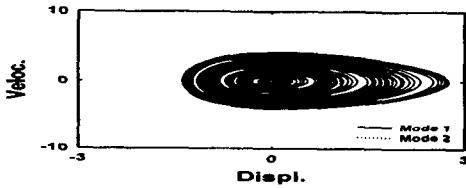


(e) pre-buckling ( $\Lambda=6.85$ ),  $H=7$

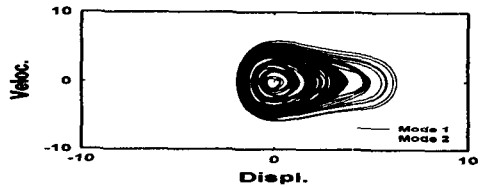


(f) post-buckling ( $\Lambda=7.21$ ),  $H=7$

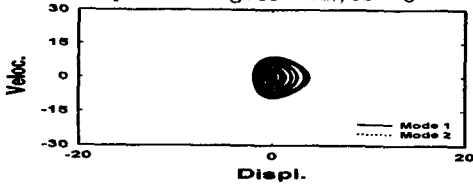
그림 6 불완전형상의 시각력곡선 ( $D_2^0 = 0.001H$ ,  $\alpha = 1.0$ )



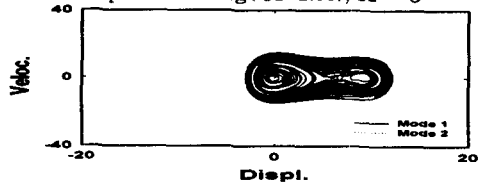
(a) pre-buckling ( $\Lambda=1.02$ ),  $H=3$



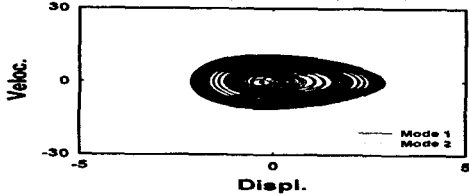
(b) post-buckling ( $\Lambda=1.06$ ),  $H=3$



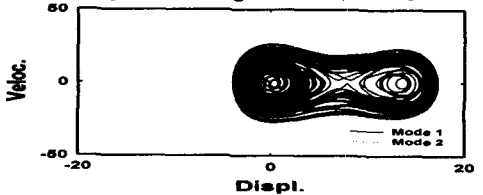
(c) pre-buckling ( $\Lambda=3.42$ ),  $H=5$



(d) post-buckling ( $\Lambda=3.57$ ),  $H=5$

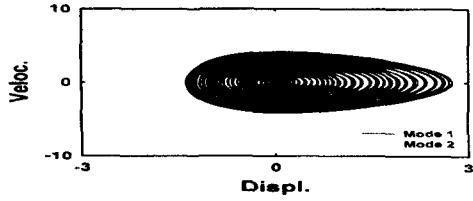


(e) pre-buckling ( $\Lambda=10.09$ ),  $H=7$

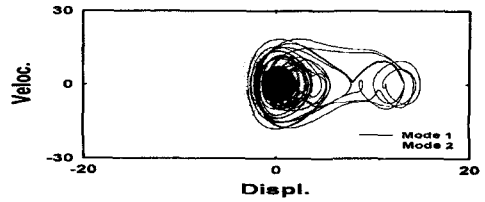


(f) post-buckling ( $\Lambda=10.45$ ),  $H=7$

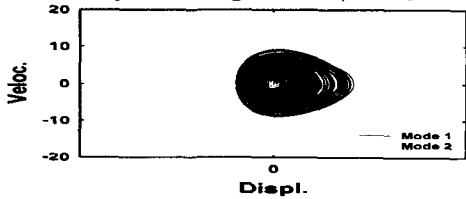
그림 7 완전형상의 위상곡선 ( $D_2^0 = 0$ ,  $\alpha = 1.0$ )



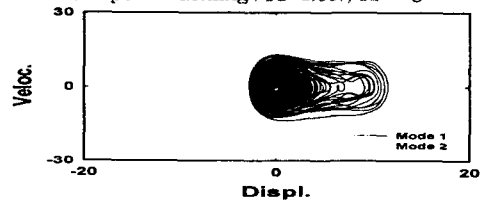
(a) pre-buckling ( $\Lambda=1.02$ ),  $H=3$



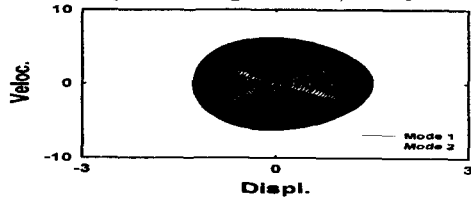
(b) post-buckling ( $\Lambda=1.06$ ),  $H=3$



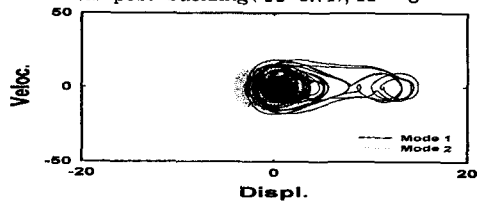
(c) pre-buckling ( $\Lambda=3.57$ ),  $H=5$



(d) post-buckling ( $\Lambda=3.71$ ),  $H=5$



(e) pre-buckling ( $\Lambda=6.85$ ),  $H=7$



(f) post-buckling ( $\Lambda=7.21$ ),  $H=7$

그림 8 불완전형상의 위상곡선 ( $D_2^0 = 0.001H$ ,  $\alpha = 1.0$ )

들며 카오스를 생성한다.

이상으로 얇은 아치의 동적 불안정 현상을 파악하기 위하여 형상파라미터  $H$ 의 변화에 따른 직접 및 간접 좌굴 하중레벨의 변화, 좌굴하중과  $\alpha$ 와의 관계, pre-buckling 및 post-buckling레벨에서의 시차력 응답 및

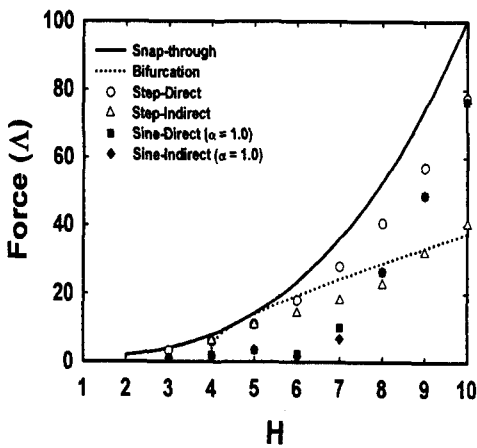


그림 9 좌굴하중의 분포

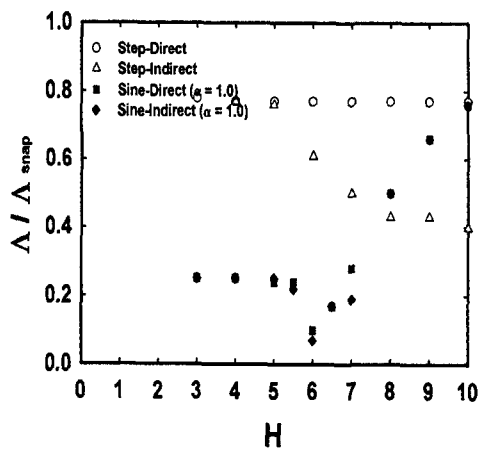


그림 10 좌굴하중의 비교

위상곡선의 변화 등이 비선형성에 의해 변화됨을 고찰하였다.

이들 결과를 정리하여 정적 및 동적 좌굴하중의 분포를 그림 9에 나타낸다. 정적 해석결과는 실선이 뒀좌굴 하중을, 점선이 분기좌굴 하중을 나타내며, 동적 해석결과는 Step 하중하에서는 「○」, 「△」으로, 정현형 조화하중 하에서는 「■」, 「◆」으로 각각 나타낸다. 여기서 정현형 조화하중의 결과는  $\alpha = 1.0$ 일 경우를 나타내었다. 정현형 조화하중에 의한 결과들을 정적 뒀좌굴 하중과 비교하여 그 비율을 나타낸 것이 그림 10이다. Step 하중하에서 직접좌굴 하중레벨은 정적 뒀좌굴의 약 80%정도이나, 정적 분기좌굴은  $H$ 가 5를 넘어서면 점차 감소하여 약 40%까지 낮아진다. 정현형 조화하중(sinusoidal harmonic excitation) 하에서는 전체적으로 정적 뒀좌굴의 약 25~30%정도이나,  $H = 6$  근방에서는 현저히 낮아짐을 알 수 있다. 이는 그림 4에서와 같이 동적좌굴이 아치의 형상에 따라 공진성 좌굴 주파수가 달라짐을 나타낸다.

이러한 현상으로부터 정적 불안정 해석에서 얻어지는 정적 임계하중에 비해 훨씬 낮은 하중레벨에서 동적 불안정에 의한 파괴 메커니즘이 생성됨을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 아치 구조물의 동적 불안정 현상을 파악하기 위하여 비선형 운동방정식을 유도하고, 이를 Galerkin법에 의해 이산화시킨후, Newmark- $\beta$ 법을 이용하여 정현형 아치의 좌굴 특성에 관하여 고찰하였다. 대상 모델은 조화하중을 받았을 때의 편지지 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)로 하였다. 정현형 조화하중(sinusoidal harmonic excitation)에 대한 동적 해석결과는 다음과 같다.

- 1) 정현형 조화하중에 의한 동적좌굴 하중 레벨은 아치의 형상 변화에 따른 비선형성으로 인해 공진성 좌굴 주파수가 달라진다. 즉 아치가 깊을수록(deep arch) 공진성 좌굴 주파수는 빨라진다.
- 2) 간접좌굴 현상은 형상초기불완전의 도입과 함께 비선형성의 증폭으로 인해 카오스(chaos)가 생성된다.

이상으로 얇은 아치 구조물의 정현형 조화하중에 의한 동적 불안정 현상을 정리하였다. 초기불완전으로 인한 동적 불안정 현상은 비선형계에 크게 의존하고, 이는 카오스의 생성으로 발전하게 된다.

## 참고 문헌

1. Fulton, R. E. and Barton, F. W., "Dynamic buckling of shallow arches," *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, pp.865-877
2. Donaldson, M. T., and Plaut, R. H., "Dynamic stability boundaries for a sinusoidal shallow arch under pulse loads," *AIAA J.*, Vol.21, No.3, March, 1983, pp.469-471.
3. Nayfeh, Ali H. and Mook, Dean T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, 1979.
4. 金勝德, 扁平構造物の動的安定に関する研究, 東京大學博士學位論文, 1990.
5. Kim, S. D., Kang, M. M., Kwun, T. J. and Hangai, Y., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," *Computers & Structures*, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp.481-489
6. 김승덕, 박지운, 권택진, "얇은 정현형 아치의 불안정 거동에 관한 연구(2)-스텝하중에서의 동적좌굴 특성," 한국전산구조공학회 논문집, 제 12권 3호, 1999, pp.417-426