한국전산구조공학회
2003년도 봄 학술발표회 논문집

비비례하중을 고려하는 개선소성힌지 해석을 이용한 3차원 강뼈대 구조물의 해석

3-D Frame Analysis Using Refined Plastic Hinge Analysis Accounting for Non-Proportional Loading

김 창 성[1)] 김 승 억[2)] 주 환 중[3)]
Kim, Chang Sung Kim, Seung Eock Joo, Hwan Jung

ABSTRACT

In this paper, the refined plastic-hinge analysis accounting for the effect of strain reversal caused by non-proportional loading is developed. This analysis accounts for material and geometric nonlinearities of the structural system and its component members. Moreover, the problem, conventional refined plastic-hinge analyses have underestimated the strength of structures subjected to non-proportional loading, is overcome. The modified stiffness degradation model approximating the effect of strain reversal is discussed in detail. The proposed analysis is verified by the comparison of the finite element analysis. A case study shows that the effect of strain reversal is a very crucial element to be considered in second-order plastic-hinge analysis. The proposed analysis is shown to be an efficient, reliable tool ready to be implemented into design practice.

1. 서 론

기하학적 비선형성과 재료적 비탄성을 효율적으로 고려할 수 있는 방법은 개선소성힌지해석법이다. 지금까지 Ziemian et al[(1)], Prakash and Powell[(2)], Liew and Tang[(3)], Kim et al.[(4)] 등이 몇가지 개선소성힌지해석에 대하여 연구하였다. 소성힌지해석법의 장점은 구조시스템과 개별부재의 강도와 안정성을 효율적이고 정확하게 평가하는데 있다.

종래의 개선소성힌지법에서는 비비례하중(Non-Proportional Load), 즉 수직하중을 먼저 재하하고 수평하중을 재하하는 경우에 구조물의 거동을 정확히 예측하지못한다. 이 방법은 뼈대구조물의 해석에 있어서 구조시스템의 강도를 과소평가한다[(5)]. 그 이유는 수평하중이 재하될 때 단면에서 변형률 반전(Strain Reversal) 현상이 발생하기 때문이다. 변형률 반전이란 수직하중이 재하된 후 수평하중이 재하될 때 단면에서 변형률이 증가

1) (주) 교량과 고속철도/부설연구소 · 연구원
2) 정회원 · 세종대학교 토목환경공학과/건설기술연구소 · 부교수
3) (주) 교량과 고속철도 · 대표이사

하는 부분과 감소하는 부분이 각기 발생하는데 변형률이 증가하는 부분은 접선계수(Tangent Modulus)에 따라 강도가 변화하는 반면 변형률이 감소하는 부분은 탄성계수(Elastic Modulus)에 따라서 변화하는 현상이다[6]. 따라서 접선계수 및 탄성계수의 이중탄성계수(Double Modulus)에 의하여 구조물의 거동이 결정된다. 일반 유한요소해석에 있어서 plate요소를 사용하여 모델링하면 이러한 이중탄성계수 효과가 자연적으로 반영되나, 개선소성힌지법에서는 부피를 가지지 않는 선으로 모형화하므로 이중탄성계수를 고려하기 어렵다. 실제 구조물에 재하되는 하중은 자중 및 활하중 등의 수직하중이 먼저 재하되고 바람이나 지진등의 수평하중이 나중에 재하되므로, 개선소성힌지해석이 실용화 되기 위해서는 이러한 비비례하중을 반드시 고려하도록 개선하여야 한다. 2차원 뼈대구조물에 대하여 비비례하중에 의한 변형률 반전효과를 고려한 개선소성힌지법이 개발된 바 있다[5]. 그러나, 김의 방법에서는 비비례하중이 재하될 때 모든 단면에서 변형률 반전효과가 일어난다고 가정하였고, 2차원 강뼈대 구조물에만 국한하였다. 실제의 변형률 반전은 비비례하중이 재하될 때 단면이 부분적으로 항복해 있는 경우, 축하중에 의한 변형률의 증분보다 모멘트에 의한 변형률의 증분이 클 때 발생한다. 본 논문에서는 3차원 강뼈대 구조물에 대하여 강축과 약축에 의한 이중계수를 제곱합평방근(Square Root of Sum of Square : SRSS)법을 사용하여 반영하였다. 본 논문에서는 3차원 강뼈대 구조물에 대하여 이러한 변형률 반전효과를 고려하는 실용적인 개선소성힌지 해석기법을 개발하고자 한다. 이 방법은 비경제적인 유한요소해석법을 대체할 수 있어 설계에 매우 유용하게 사용될 것으로 판단한다.

2. 개선소성힌지해석

2.1 기하학적 비선형을 고려하는 안정함수

기하학적인 비선형성을 고려하기 위하여 안정함수를 사용한다. 안정함수란 축방향력에 의하여 휨 강성이 감소하는 영향을 고려하는 함수로서 부재를 하나 혹은 두 개의 요소로 이상화하여 기하학적인 비선형을 효과적으로 고려할 수 있다[6][7][8]. 3차원 보-기둥 부재에 대하여 안정함수를 이용한 힘-변위의 관계는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{yA} \\ M_{yB} \\ M_{zA} \\ M_{zB} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1\frac{EI_y}{L} & S_2\frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2\frac{EI_y}{L} & S_1\frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_3\frac{EI_z}{L} & S_4\frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4\frac{EI_z}{L} & S_3\frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \\ \phi \end{bmatrix} \tag{1}$$

여기서, P, M_{yA}, M_{yB}, M_{zA}, M_{zB} 및 T는 축력, y 와 z축에 대한 단모멘트 및 비틀림을 각각 나타낸다. δ, θ_{yA}, θ_{yB}, θ_{zA}, θ_{zB} 및 ϕ는 축변형, 절점의 회전각 및 비틀림각이다. S_1, S_2, S_3와 S_4는 각각의 y 와 z축에 대한 안정 함수로서 식 (2a), (2b), (2c) 및 식 (2d)와 같다.

$P > 0$ 일 경우

$$S_1, S_3 = \frac{\pi^2\rho\ \cosh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\ \sinh(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho}\ \sinh(\pi\sqrt{\rho})},\quad S_2, S_4 = \frac{\pi\sqrt{\rho}\ \sinh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2\rho}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho}\ \sinh(\pi\sqrt{\rho})} \tag{2a~2b}$$

$P < 0$ 일 경우

$$S_1, S_3 = \frac{\pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2\rho\cos(\pi\sqrt{\rho})}{2-2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})}, \quad S_2, S_1 = \frac{\pi^2\rho - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})}{2-2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})} \tag{2c~2d}$$

여기서 $\rho = P/(\pi^2 EI/L^2)$ 이다.

2.2 잔류응력을 고려하는 "Column Research Council"(CRC) 접선탄성계수

잔류응력을 가진 부재가 축방향력에 의하여 점진적으로 항복하는 것을 고려하기 위하여 CRC 접선계수를 사용한다. 이 접선계수는 식 (3a) 및 식 (3b)와 같이 축력의 함수로 나타낼 수 있다[9].

$$E_t = 1.0E \quad : \quad P \le 0.5P_y \tag{3a}$$

$$E_t = 4\frac{P}{P_y}E(1-\frac{P}{P_y}) \quad : P > 0.5P_y \tag{3b}$$

2.3 축력과 휨에 의한 점진적인 소성화

부재가 축력과 휨을 받는 경우 탄성강성에서 완전 소성강성 즉 영까지 점진적 변화를 나타내기 위하여 연화소성힌지(softening plastic hinge)를 사용한다. 연화소성힌지는 포물선함수 식 (4a) 및 식 (4b)로 나타낼 수 있다.

$$\eta = 1 \quad : \alpha \le 0.5 \tag{4a}$$

$$\eta = 4\alpha(1-\alpha) \quad : \alpha > 0.5 \tag{4b}$$

여기서, α는 단면에 작용하는 부재력의 크기를 나타내는 함수로서 Orbison이 제안한 완전소성면을 사용하였다[10].

<u>Orbison의 완전소성면</u>

$$\alpha = \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^4 + 3.5\left(\frac{P}{P_y}\right)^2\left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 + 3.0\left(\frac{P}{P_y}\right)^6\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 + 4.5\left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^4\left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^2 \tag{5}$$

그러므로, 3차원 보-기둥 부재의 연화 소성힌지를 고려하는 힘-변위의 관계는 식 (6)과 같이 정식화 된다.

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{yA} \\ M_{yB} \\ M_{zA} \\ M_{zB} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_t A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iiY} & k_{ijY} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ijY} & k_{jjY} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iiZ} & k_{ijZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ijZ} & k_{jjZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \\ \phi \end{bmatrix} \tag{6}$$

여기서,

$$k_{iiY} = \eta_A \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1}(1 - \eta_B) \right] \frac{E_t I_y}{L}, \qquad k_{ijY} = \eta_A \eta_B S_2 \frac{E_t I_y}{L} \tag{7a~7b}$$

$$k_{jjY} = \eta_B \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1}(1 - \eta_A) \right] \frac{E_t I_y}{L}, \quad k_{iiZ} = \eta_A \left[S_3 - \frac{S_4^2}{S_3}(1 - \eta_B) \right] \frac{E_t I_z}{L} \tag{7c~7d}$$

$$k_{ijZ} = \eta_A \eta_B S_4 \frac{E_t I_z}{L}, \qquad k_{jjZ} = \eta_B \left[S_3 - \frac{S_4^2}{S_3}(1 - \eta_A) \right] \frac{E_t I_z}{L} \tag{7e~7f}$$

3. 변형률 반전 효과를 고려하는 수정강성감소 모델

3.1 이중계수

이중계수(Double Modulus)이론은 Engesser[11]에 의하여 제안되었다. I-형강에 대하여 이중계수는 다음과 같다. I-형강 단면적의 반이 두 개의 플렌지에 분포하는 것으로 가정하고 웨브의 영향은 무시하기로 한다. 약축과 강축에 대한 이중계수는 다음과 같다.

약축에 대하여 : $$E_{d_y} = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2} \tag{8}$$

강축에 대하여 : $$E_{d_z} = \frac{2EE_t}{E+E_t} \tag{9}$$

식 (8)과 식 (9)의 분자 분모를 탄성계수 E로 나누어주어 정리하면 다음과 같다.

약축에 대하여 : $$e_{d_y} = \frac{4e_t}{(1+\sqrt{e_t})^2} \tag{10}$$

강축에 대하여 : $$e_{d_z} = \frac{2e_t}{1+e_t} \tag{11}$$

여기서 $e_{d_y} = \frac{E_{d_y}}{E}$, $e_{d_z} = \frac{E_{d_z}}{E}$ 이고 $e_t = \frac{E_t}{E}$ 이다.

3.2 변형률 반전 효과를 고려하는 수정강성 감소 계수

이중계수개념은 독립된 부재에서 뼈대구조로 그 적용을 확대할 수 있다. 수직하중이 뼈대구조에 재하될 때 압축력과 휨모멘트가 부재에 작용하게 된다. 식 (10)과 식 (11)은 독립된 부재의 이중계수로 사용될 수 있지만 휨모멘트를 고려하지 않기 때문에 뼈대구조를 구성하고 있는 부재에 직접 적용할 수 없다. 그래서 강성감소계수 η를 변형률 반전 효과를 고려하여 수정하고자 한다. η는 식 (4a, b)에서 보는 바와 같이 축력과 휨모멘트

를 고려하고 있다. 식 (10)과 식 (11)에서 유도한 것을 응용하면 약축과 강축에 대한 수정된 강성감소계수 즉 이중계수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

약축에 대하여 : $$\eta_{d_y} = \frac{4\eta_t}{(1+\sqrt{\eta_t})^2} \tag{12}$$

강축에 대하여 : $$\eta_{d_z} = \frac{2\eta_t}{1+\eta_t} \tag{13}$$

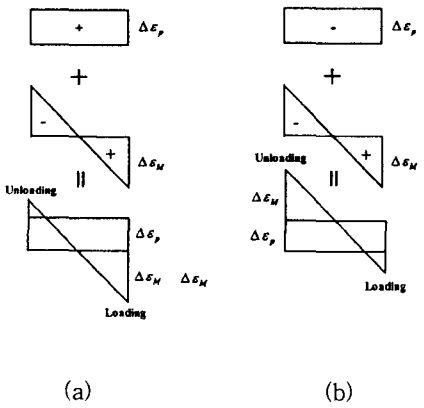
여기서 η_t는 식 (4a, b)에서 정의한 식과 동일하다.

그러나, 식 (12)와 식 (13)은 약축과 강축에 대하여 독립적인 수정강성감소계수이므로 3차원 거동을 고려하기 위해서 본 논문에서는 이 두 식을 제곱합평방근(Square Root of Sum of Square : SRSS)법을 이용하여 다음 식과 같이 단일화된 수정강성감소계수를 사용하였다.

$$\eta_d = \sqrt{(\eta_{d_y})^2 + (\eta_{d_z})^2} \tag{14}$$

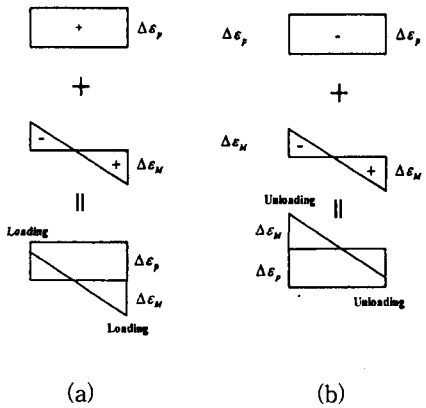
3.3 변형률 반전 발생의 유무에 대한 평가방법

변형률 반전 발생 유무에 대한 평가방법을 알아보기 위하여 2차원의 경우에 대해서 생각해 보자. 우선 이전 단계의 단면은 비탄성 상태에 있다고 가정한다. 그림 1은 휨 모멘트에 의한 변형률의 증분이 축하중에 의한 변형률의 증분보다 큰 경우의 변형률 분포를 나타낸 것이다. 그림 2에서 보는 바와 같이 휨 모멘트에 의한 변형률의 증분이 축하중에 의한 변형률의 증분보다 큰 경우는 단면내에서 Loading과 Unloading이 함께 일어남을 알 수 있다. 따라서 이중계수를 사용하게 된다. 즉, 종래의 개선소성힌지 해석에서 사용하는 η_t(식 4(a, b))가 아닌 η_d(식 (14))를 사용한다. 그림 3은 휨 모멘트에 의한 변형률의 증분이 축하중에 의한 변형률의 증분보다 작은 경우의 변형률 분포를 나타낸 것이다. 그림 2 a)는 전단면이 Loading상태에 있으므로 종래의 개선소성힌지 해석에서 사용하는 접선계수를 사용하게되며 그림 2 b))는 전단면이 Unloading상태에 있으므로 탄성계수를 사용하면 된다.



(a) (b)

그림 1. $|\Delta\varepsilon_p| < |\Delta\varepsilon_M|$일때의 변형률 분포



(a) (b)

그림 2. $|\Delta\varepsilon_p| > |\Delta\varepsilon_M|$일때의 변형률 분포

4. 예제 해석

변형률 반전 효과를 고려하는 개선소성힌지 해석과 변형률 반전 효과를 무시하는 종래의 개선소성힌지 해석에 의한 하중-변위 곡선과 극한하중계수를 비교함으로서 변형률 반전이 구조시스템의 거동과 강도에 미치는 영향을 평가하고자 한다. 예제 해석은 그림 3과 같은 3차원 2층 2경간 강뼈대 구조물을 대상으로 실시하였다. 각 부재의 항복강도는 250 *Mpa* (36 *ksi*)이고, 탄성계수는 200 *Gpa* (29000 *ksi*)이다. 부재의 종류는 그림 3에서 보는 바와 같이 1층 기둥, 1층 보, 2층 기둥 그리고 2층 보의 네가지를 사용하였으며 부재의 크기는 표 1에 나타내었다.

그림 4는 하중조건을 나타낸다. 구조물에 작용하는 하중은 수직하중을 재하한 후 뼈대구조물이 극한상태에 이를 때까지 x와 y방향의 수평하중을 증가 시켰다. 본 예제에서는 부재의 부분적인 소성화 정도에 따라서 변형률 반전이 구조시스템의 거동과 강도에 미치는 영향을 알아보기 위하여 표 2와 같은 2가지의 수직하중 조건에 대하여 해석을 수행하였다. 표 2에서 보는 것처럼 하중조건 1은 2층기둥 단면의 항복이 시작되는 단계이고 1층기둥은 단면의 항복이 어느 정도 진전된 상태이다. 하중조건 2는 1층 기둥과 2층 기둥 모두 단면이 부분적으로 항복한 상태이고 하중조건 1보다 단면이 더 많이 항복한 상태이다.

그림 5와 6은 하중조건에 따른 변형률 반전 효과를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 수평하중과 A점의 x방향 수평 변위 곡선을 나타낸다. 그림 5와 6에서 보는 바와 같이 수직하중이 재하되었을 때 단면의 소성화가 많이 진전되면 될수록 뼈대 구조물의 거동이 종래의 해석법과 차이가 크게 나타남을 알 수 있다. 변형률 반전 효과를 고려한 경우와 무시한 경우의 하중 조건에 따른 극한 하중 계수와 차이를 표 3에 나타내었다. 표 3에서 보는 바와 같이 변형률 반전 효과를 무시하는 종래의 개선소성힌지 해석은 뼈대구조물의 강도를 최대 51.7%까지 과소평가함을 알 수 있다. 이러한 차이는 수직하중이 재하되었을 때 단면의 소성화가 많이 진전되면 될수록 크게 나타났다. 따라서 변형률 반전효과는 비비례하중을 받는 강뼈대 구조물의 거동과 강도에 매우 중요한 영향을 끼침을 알 수 있고 실제설계에도 반드시 고려하여야 한다.

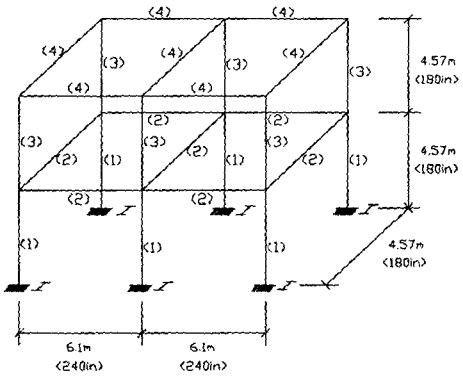


그림 3. 규격 및 부재 종류

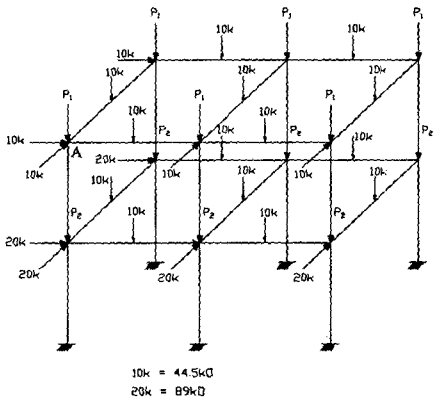


그림 4. 하중 조건

표 1. 부재 종류와 부재 크기

부재 구분	부재 종류	부재 크기
1층 기둥	(1)	W30X116
1층 보	(2)	W24X76
2층 기둥	(3)	W16X40
2층 보	(4)	W12X26

표 2. 하중조건과 기둥의 소성화 정도

하중조건	P_1	2층 기둥의 소성화 정도 $P_1/P_{y(2층기둥)}$	P_2	1층 기둥의 소성화 정도 $(P_1+P_2)/P_{y(1층기둥)}$
1	$0.5P_{y(2층기둥)}$	0.50	$0.3P_{y(1층기둥)}$	0.63
2	$0.6P_{y(2층기둥)}$	0.60	$0.3P_{y(1층기둥)}$	0.69
비고	$P_{y(1층기둥)}=5478.84\ kN\ (1231.2\ kips)$		$P_{y(2층기둥)}=3588.48\ kN\ (806.4\ kips)$	

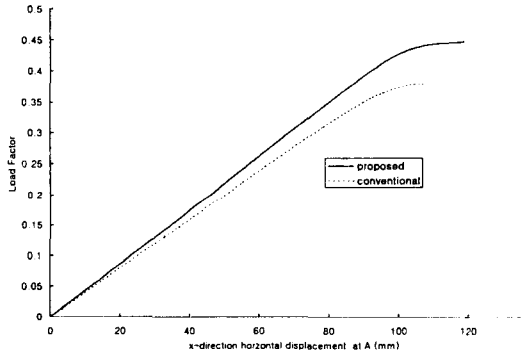


그림 5. 하중조건 1의 하중-변위 곡선

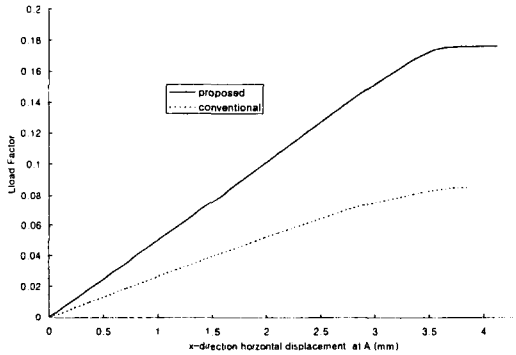


그림 6. 하중조건 2의 하중-변위 곡선

표 3. 하중 조건에 따른 극한 하중 계수와 차이

하중조건	변형률 반전을 고려한 경우	변형률 반전을 무시한 경우	차이(%)
1	0.446	0.379	15.0
2	0.176	0.085	51.7

5. 결론

(1) 종래의 개선소성 힌지해석은 변형률 반전 효과를 고려하지 않기 때문에 비례하중만을 고려할 수 있다. 그러나 실제 구조물에 재하되는 하중은 자중 및 활하중 등의 수직하중이 먼저 재하되고 바람이나 지진등의 수평하중이 나중에 재하되므로 개선소성힌지해석이 실용화되기 위해서는 이러한 비비례하중을 반드시 고려하여야 한다. 본 논문에서는 이중계수의 개념을 도입하여 수정된 강성감소계수를 사용하므로서 변형률 반전효과

를 고려하는 3차원 강뼈대 구조물에 대한 개선소성힌지 해석법을 개발하여 실제설계에 적극적으로 활용할 수 있게 하였다.

(2) 변형률 반전 효과를 고려한 경우 부재의 부분적인 소성화 정도가 커짐에 따라서 구조 시스템의 거동과 강도가 변형률 반전 효과를 무시한 경우와 매우 큰 차이를 보임을 알 수 있었다. 따라서 변형률 반전 효과는 비비례하중을 받는 강뼈대 구조물의 거동과 강도에 매우 중요한 영향을 끼침을 알 수 있고 실제설계에도 반드시 고려해야 한다.

(3) 본 방법은 고 비용과 많은 시간이 소요되는 단점이 있는 소성영역법을 대체할 수 있으므로, 설계 실무에 사용할 수 있는 경제적이고 정밀한 기법이다.

감사의 글

본 연구는 2000년도 한국과학기술부의 국가지정연구실 지원(과제번호: M10204000143-02J0000-12910)으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. Ziemian, R.D., McGuire, W., and Dierlein, G.G.(1992). "Inelastic limit states design partII: three-dimensional frame study", *Journal of Structural Engineering,* ASCE, 18(9), pp.2550-2568

2. Prakash, V. and Powell, G.H. (1993). *"DRAIN-3DX: Base program user guide, version 1.10"*, A Computer Program Distributed by NISEE / Computer Applications, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

3. Liew, J.Y. and Tang, L.K. (1998). Nonlinear refined plastic hinge analysis of space frame structures, Research Report No. CE027/98, Department of Civil Engineering, National University of Singapore, Singapore, 1998.

4. Kim, S.E. and Choi, S.H.(2001). "Practical advanced analysis for semi-rigid space frames." *Solids and Structures,* Elsevier Science.

5. 김승억(1998). "하중재하 순서를 고려하는 개선소성힌지해석 개발", 대한토목학회 논문집, 제 18권, 제1-5호, 1998, pp.663-671.

6. Chen, W.F. and Kim, S.E. (1997). LRFD steel design using advanced analysis, CRC Press, Boca Raton, Florida.

7. Kim, S.E. and Chen, W.F. (1996a). "Practical advanced analysis for braced steel frame design", *Journal of Structural Engineering,* ASCE, 122(11), pp.1266-1274

8. Kim, S.E. and Chen, W.F. (1996b). Practical advanced analysis for unbraced steel frame design, ASCE J. Struct. Eng., ASCE, 122(11): pp.1259-1265.

9. Chen, W.F. and Lui, E.M.(1992). Stability design of steel frames, CRC Press, Boca Raton, p.380.

10. Orbison, J.G.(1982). Nonlinear static analysis of three-dimensional steel frames, Report No. 82-6, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, New York.

11. Engesser, F. (1895). Shweizerishe Bauzeitung, 26:24.