

# 주파수영역 손상식별 SI 기법에 적용할 최적센서 위치결정법

## Determination of Optimal Sensor Locations for Modal System Identification-based Damage Detection on Structures

권순정\*      신수봉\*\*      박영환\*\*\*  
Kwon, Soon-Jung   Shin, Soobong   Park, Young-Hwan

### ABSTRACT

To define an analytical model for a structural system or to assess damage in the system, system identification(SI) methods have been developed and widely applied. The paper presents a method of determining optimal sensor location(OSL) based on the maximum likelihood approach, which is applicable to modal SI methods. To estimate unknown parameters reliably, it is necessary that the information provided by the experiment should be maximized. By applying the Cramer-Rao inequality, a Fisher information matrix in terms of the probability density function of measurements is obtained from a lower bound of the estimation error. The paper also proposes a scheme of determining of OSL on damaged structures by using maximum strain energy factor. Simulation studies have carried out to investigate the proposed OSL algorithm for both undamaged and damaged structures.

### 1. 서 론

토목구조물의 거동을 측정하여 구조물의 해석모델을 확정하거나 구조물에 발생한 손상을 식별하기 위하여 다양한 SI(System Identification) 기법들이 개발되고 적용되고 있다. 그러나 토목구조물은 그 규모가 크고 해석모델 역시 많은 자유도를 갖도록 설정되기 때문에, 어느 위치의 어느 자유도를 측정하느냐는 것이 보다 좋은 SI 결과를 얻는데 주요한 영향인자가 된다. 특히 SI 기법에 의한 구조변수의 추정에 측정오차를 고려할 경우, SI 결과의 정확성은 이러한 측정위치의 선택에 따라 크게 좌우되곤 한다. 따라서 본 논문은 주파수영역 SI 기법을 사용하여 구조물에 발생한 손상위치를 확인하고 손상의 정도를 추정하기 위하여 구조물에 대한 진동실험을 할 경우에 가속도 센서를 어느 위치에 어느 방향으로 부착하여야 하는지를 결정하는 방법인 최적센서위치(OSL: Optimal Sensor Location) 결정법을 제시하고자 하는 것이다.

본 논문에서 비교·분석할 OSL 기법은 FIM(Fisher Information Matrix)을 사용하는 방법으로 제한하였으며, 진동형상(eigen-vector)의 구조변수에 대한 민감도를 사용하여 FIM을 정의하고 이의 유효독립분포벡터를 구성하여 OSL을 결정하는 새로 개발된 방법인 MSIV(modal sensitivity information vector)을 정리하고 일반적인 선택방법과 비교·분석하였다.

손상식별을 고려한 OSL 선택법의 개발을 위해서는 구조물에 임의로 발생하는 손상의 부재별 손상발생 가능성을 상대적인 값으로 계산하여 가중행렬로 고려하도록 하였다. OSL 선정에 손상발생 가능성을 포함하

\* 인하대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 정회원·인하대학교 토목공학과 조교수

\*\*\* 한국건설기술연구원 수석연구원

기 위하여 변형에너지를 기초로 한 손상발생 가능성을 구조 부재별로 계산하였으며, 이를 가중함수로 기존의 개발된 OSL 기법에 추가하여 최적센서위치를 결정하도록 하였다.

## 2. 주파수영역에서의 OSL결정

구조물을 진동시켜 측정된 시간영역 데이터를 처리하여 주파수영역의 고유진동수와 진동형상을 구하게 된다면, 측정된 진동형상과 계산에 의한 진동형상의 오차를 최소화하는 과정을 거쳐 최적의 구조변수를 구하는 주파수영역 SI 기법을 정의할 수 있게 된다. 이렇게 정의된 주파수영역 SI 기법의 최적화 수식은 ML (Maximum likelihood)법을 이용하여 확률론적인 관점에서 접근할 수 있는 근거를 제공할 수 있다. 즉, 측정 오차가 센서 사이에 서로 독립적이고 평균이 제로이고 분산이  $\sigma_n^2$  인 정규화분포를 한다고 하면, 구조변수  $\mathbf{x}$ 의 최적 값은 측정치에 미치는 가능성이 예측에 비해 상대적으로 최대가 되게 하는 것이라 정의할 수 있다. 다시 말하면, 최적의 변수 추정값은 측정의 확률밀도함수  $f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})$ 를 최대화시키는 것이라 정의할 수 있다.<sup>5)</sup> 여기서,  $\tilde{\Phi}_m$ 는 다음 식(2)로 정의되는 측정된  $nmm$ 개의 모드의 제한된 자유도에서 측정된 진동형상 행렬이며, likelihood 함수  $f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})$ 는 식(1)로 정의될 수 있다.

$$f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}) = \left[ (2\pi)^{N_m \times nmm} \prod_{i=1}^{nmm} \text{Det}(S_i) \right]^{-1/2} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nmm} (\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi})^T S_i^{-1} (\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi}) \right] \quad (1)$$

$$\tilde{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_{m1} & \cdots & \tilde{\phi}_{m,nmm} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $S_i (N_m \times N_m) = i$ 번째 모드의 측정치에 대한 covariance 행렬이다.

Likelihood 함수  $f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})$ 을 Log스케일로 변환시키고, 실험에 의한 측정오차가 구조변수  $\mathbf{x}$ 와 독립적이라고 가정하며, 측정치의 분산  $\sigma_n^2$ 이 모든 측정위치와 측정값에 대해 동일하다고 가정한다면 아래 식(3)을 얻을 수 있다.

$$\text{Minimize}_{\mathbf{x}} L = \sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^{nmm} (\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi})^T (\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) - \tilde{\phi}_{mi}) \quad (3)$$

위의 식(3)의 least-squares 문제를 풀어 해를 구하기 위해서는  $N_m \times nmm \geq N_p$ 의 조건이 만족되어야만 한다. 여기서  $N_m$ 은 측정된 자유도수이고,  $N_p$ 는 미지변수의 개수이다.

미지의 구조변수를 추정하기 위해서는 실험에 의해 제공되는 정보가 최대화되어야 할 것이다. 모든 실험 계획은 허용 가능한 실험조건에 대한 제약을 고려해서 세워지는 것이기 때문에, 서로 다른 실험의 유용성을 비교하기 위해서는 실험의 우수성을 서로 비교할 수 있는 잣대를 정할 필요가 있다. 일반적으로 이러한 최적의 조건을 정의하기 위해 사용되는 대부분의 접근법들은 추정오차를 최소화하여 구조변수를 추정하는 방법을 기초로 하고 있다. 이러한 방법들 중 하나인 Cramer-Rao 부등식에 의한 방법을 적용하면, 추정오차의

lower bound는  $\mathbf{F}^{-1}$ 로 정의된다. 여기서,  $\mathbf{F}$ =Fisher Information Matrix (FIM)로 위에서 정의한 확률밀도 함수  $f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})$ 에 의해 다음 식(4)로 정의될 수 있다.

$$\mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) = E_{\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x}} \left\{ \left[ \frac{\partial \log f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \left[ \frac{\partial \log f(\tilde{\Phi}_m | \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right\} \quad (4)$$

식(4)에 식(1)을 적용하면, FIM  $\mathbf{F}$ 는 식(5)로 정리된다.

$$\mathbf{F}(\tilde{\Phi}_m, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nmn} [\Theta_i^T \Theta_i] \quad (N_p \times N_p) \quad (5)$$

즉, 식(5)의 FIM  $\mathbf{F}$  행렬은 진동형상의 구조변수에 대한 민감도행렬(sensitivity matrix)로 정의된다. 여기서  $\Theta_i (N_m \times N_p)$ 는 식(6)으로 정의되는 함수이다. 진동형상의 민감도는 식(7)의 직접 계산법<sup>6)</sup>을 사용하였다. 식(7)은 eigen-value가 중근인 경우에도 응용할 수 있는 방법이다.

$$(\Theta_i)_j = \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, \dots, nmn \quad j = 1, 2, \dots, N_p \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{x}) - \lambda_i \mathbf{M} & -\mathbf{M} \phi_i(\mathbf{x}) \\ -\phi_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \phi_i(\mathbf{x}) / \partial x_j \\ \partial \lambda_i / \partial x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{G}_j \\ 0.5 \phi_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{M} \end{Bmatrix} \phi_i(\mathbf{x}) \quad (7)$$

여기서,  $\lambda_i$ =i번째 모드의 고유진동수,  $x_j$ =j번째 구조변수,  $\mathbf{K}$ =강성도행렬, 그리고  $\mathbf{M}$ =질량행렬,  $\mathbf{G}_j = \partial \mathbf{K}(\mathbf{x}) / \partial x_j =$  j번째 kernel matrix이다. 이러한 수식들을 정리하여 식(7)로 eigen-vector의 민감도를 계산하면 다음 식(8)과 같이 표현할 수 있게 된다.

$$(\Theta_i)_j = \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial x_j} = \mathbf{D}_j^{(i)} \tilde{\phi}_i \quad (8)$$

여기서, i번째 모드에 대한  $\mathbf{D}_j^{(i)}$ 는  $\mathbf{D}_j^{(i)} = \mathbf{D}_j^{(i)}(\lambda_i, \phi_i, \mathbf{K}(\mathbf{x}), \mathbf{M}, \mathbf{G}_j)$ 의 함수로 정의되는 상수행렬이 된다. 그러나, 만약 대상구조물이 일정한 길이를 갖고 전체좌표계에 대하여 일정한 강성도행렬을 갖는 것으로 정의되는 극단적인 예의 경우에는 모든 부재에 대한 kernel matrix  $\mathbf{G}_j = \mathbf{G} = \text{constant}$ 로 되어  $\partial \phi_i / \partial x_j = \mathbf{D}^{(i)} \phi_i$ 로 모든 구조변수에 일정한 값을 갖게 되고,  $\text{rank}(\Theta_i) = 1$ 이 되어 버린다.  $\Theta_i$ 는 각 모드마다 계산되므로, 유효독립분포(EIDV<sup>11</sup>: effective independence distribution vector)  $\mathbf{e}_d$ 는 각 모드의 합이 된다. 여기서  $\mathbf{E}_i$ 는 i번째 모드의 멱등원 행렬(idempotent matrix)이다.

$$\mathbf{E}_i = \Theta_i [\Theta_i^T \Theta_i]^{-1} \Theta_i^T, \quad \mathbf{e}_d = \text{diag}[\mathbf{E}_i], \quad \mathbf{e}_d = \sum_{i=1}^{nmn} \mathbf{e}_{di} \quad (9)$$

이러한 rank deficiency 문제를 해결하기 위해서, 본 논문에서는 singular value decomposition (SVD) 기법을 적용하여 singular value가 정의한 tolerance 보다 작은 값은 무시하는 방법을 통하여 FIM  $\mathbf{F}_i$ 의 역행렬을 구하도록 하였다.

### 3. 손상식별을 고려한 주파수영역에서의 OSL결정법

SI 기법의 적용은 구조해석 모델을 확정하기 위하여 적용하거나, 손상의 위치 및 정도를 식별하기 위하여 적용한다. 두 경우의 차이점은 일반적으로 손상진단의 경우 손상이 없는 구조변수 및 구조물에 관한 정보를 기지의 값으로 설정하고 이와 비교·분석에 의해 손상을 정의한다는 것이다. 따라서 최적센서위치 결정이 손상식별과 연계되는 경우에는 구조변수 추정에 사용할 초기치를 손상이 되지 않은 경우의 값을 바로 적용하면 된다. 즉, 초기치 설정에 따른 통계적 분석이나 복잡성을 고려할 필요가 없게 되는 용이성이 있다. 그러나 반면에 손상이 발생할 위치를 알 수 없기 때문에 센서위치 선정에 어떤 체계적인 법칙을 만들어 내는 것이 어렵게 된다. 일반적으로 손상이 발생하는 위치에 근접하게 계측센서를 설치했다면 그곳에서 발생하는 손상을 추적하는 것이 보다 용이할 것이라는 것은 쉽게 알 수 있다. 따라서 손상식별과 연계하여 계측센서의 위치를 결정하는 문제는 거꾸로 손상발생이 가능한 부재의 선별이 우선될 수밖에 없게 된다.

본 연구에서는 측정가능 자유도별 손상발생 가능성을 구조물에 대한 모멘트의 영향선에서 최대모멘트를 대한 포락선을 사용하여 구하였다. 즉, 부재별 발생가능 최대 모멘트를 구하고, 절점별 수직변위에 대한 가중치를 그 절점에 연결되어 있는 부재들의 최대 모멘트의 합에 대한 상대적인 값으로 정의하였다. 이를 이용해 단면에 대한 응력을 계산하여 구한 부재별 발생가능 최대 변형에너지를 기준으로 정의하고자 한다. 즉, 각 부재별 발생가능한 최대 변형에너지를 계산하고 이를 최대값에 대한 상대적인 값으로 다음 식(10)에 의해 정의한다.

$$d_k = \frac{U_k}{\max(U_i)} \quad (10)$$

여기서,  $U_k$  = 측정가능 자유도를 포함한 절점 k에 연결된 부재들에서 계산된 최대변형에너지의 합,  $d_k$  = 전체 측정가능 자유도에서의 최대변형에너지에 대한 k번째 자유도에서의 최대변형에너지의 상대적인 값이다. 이들 측정가능 자유도별 상대값을 대각선 항으로 하는 가중행렬을  $\Omega$  라고 하면, 이 가중행렬을 고려한 변형된 맥등원행렬  $E^*$ 는 다음 식(11)과 같이 각 모드별로 정의될 수 있다.

$$\Omega = \text{diag} \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & d_k & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$E^* = \Omega^T E \Omega$$

식(11)에서 가중행렬  $\Omega$  는 대각선행렬이기 때문에  $\Omega^T = \Omega$  가 되며, 이 가중행렬은 기지의 행렬로 본 연구에서는 정의하고 있다.

이러한 가중행렬은 Penny et al.(1993)<sup>5)</sup>에 의해 제안된 진동형상으로 FIM을 정의하는 OSL 방법에도 동일하게 적용할 수 있다.

#### 4. 예 제

구조물의 최적센서위치(OSL) 및 손상식별을 고려한 OSL를 결정하기 위한 시뮬레이션 예제로 2경간 다주형 교량을 Grid Model로 이상화하여 적용하였다. 그림 1에서 보듯이 총 부재수는 58개, 총 절점 수는 39개로 모델링하였으며, 부재의 모든 재료 및 단면은 계산의 편의를 위해 동일하게 하였다.

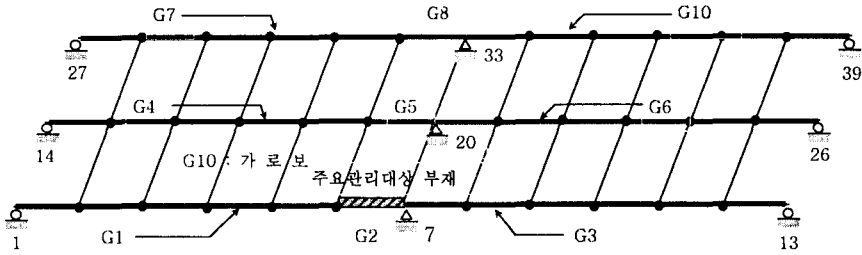


그림 1 손상식별을 위한 Grid Model

그림 1에서 손상을 고려하지 않은 OSL을 위한 그룹지정은 아래쪽 주형부터 위 세 번째 주형까지 차례로 G1, G2, G3으로 그룹을 지정하고 가로보전체를 G4로 그룹을 지정하였다.

본 예제에서 최적 측정위치 고려 대상은 네 번째 모드까지로 하였으며, 회전 자유도는 가속도계로 실제 측정이 난해하므로 고려 대상에서 제외하였다. 그림 2는 MSIV에 의한 선택된 결과를 표시한 것이다. 그림 3과 그림 4는 OSL에 의한 선택의 결과와 비교하기 위해 일반적으로 선택 가능한 계측점을 표시한 것이다.

본 예제에서는 6개의 가속도계를 사용할 수 있는 경우를 고려하였다. 따라서, 그림 2에서 유효독립분포벡터의 향의 값이 가장 큰 4개의 자유도와 나머지 2개를 선택하였는데, 그림에서 4개씩 값이 동일한 관계로 그림 2에서와 같이 확대칭되는 2개의 점을 5번째와 6번째의 계측점으로 선택하였다.

2경간의 경우에 대한 진동형상에서는 1번째와 2번째 모드가 휨모드이고 3번째와 4번째 모드가 비틀림모드인 관계로 4개의 모드를 고려할 경우 가운데 주형의 진동에너지는 3번째 모드와 4번째 모드에서 사라지게 된다. 이런 이유로 선택되는 자유도는 외측의 주형을 따라 정해지고 있으며, 또한 진동변위가 큰 곳에 근접하게 선택되고 있음을 확인할 수 있다.

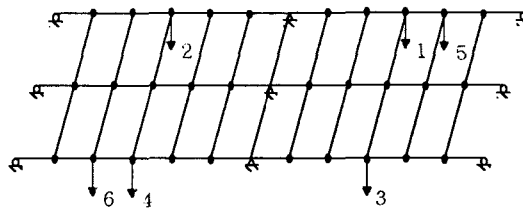


그림 2 MSIV에 의한 측정위치 선택

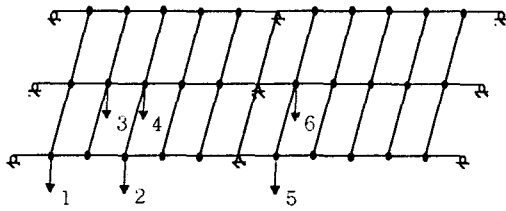


그림 3 일반적인 측정위치 선택 1

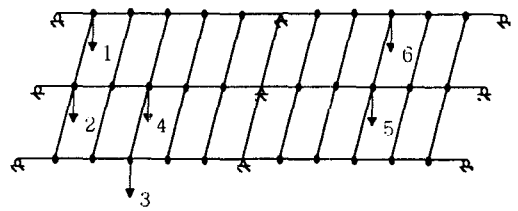


그림 4 일반적인 측정위치 선택 2

세 가지 방법(MSIV, 일반적인 선택 1, 2)에 의해 선택된 6개의 측정위치에서 역해석을 수행한 결과 그림 5에서 보듯이 일반적인 선택의 결과가 MSIV에 의해 선택된 점에 비해 분산도 크고 정해에서 멀리 떨어져 분포되고 있다.

MSIV & 일반적 선택 1,2 initial 80%

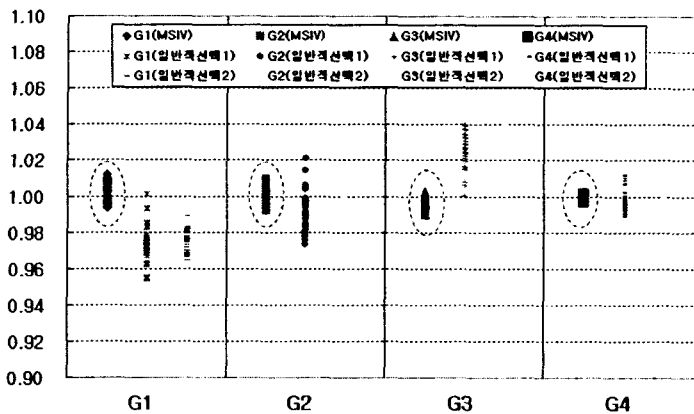


그림 5 Grid 모델에서 측정 Data에 의한 역해석 결과

손상식별을 위한 OSL에서는 지점부위 중 경간 중앙 지점들이 부모멘트 발생 등에 의해 손상발생 가능성이 높다고 보고, 특히 그림 1에 표시한 부재를 주요관리대상 부재로 선정할 예제를 수행하였다.

해석결과 WDMISV에서 6번 절점의 센서선택 우선순위가 올라 왔으나, 여전히 6번째의 측정센서위치에는 포함되지 않았다. 39개의 측정대상 순서 중 6번째까지의 선택순서는 WDMISV와 MSIV가 동일한 순서로 나타났다.

현재 제안한 WDMISV 기법은 정적하중에 의한 변형에너지에만 의존하기 때문에 이런 결과가 나타났으나, 향후 기 안전진단한 교량 안전진단 보고서들의 손상부재에 대한 문헌 조사와 통계처리를 하여 보다 현실적인 가중치를 도출할 수 있다면 보다 향상된 손상식별의 결과를 가져올 것이다.

그림 6은 WDMISV 혹은 MSIV로 OSL를 선택한 경우, 즉 6번 절점의 수직자유도가 계측자유도로 선정이 되지 않은 경우 수행한 SI 결과이며, 그림 7은 그림 2에서 5번째 선택점 대신 6번 절점의 수직자유도를 선택 자유도로 가정하고 수행한 SI 결과이다. 손상을 고려하기 위해 6번 부재의 휨강성을 40% 줄였으므로 역해석 수행 결과에서는 6번 절점의 수렴 값이 0.6일 때가 정해이다. 그림에서 보듯이 두 그림에서 모두 6번 부재에서의 손상을 식별하고 있으나, 6번 절점의 수직자유도를 고려한 경우에서의 평가된 부재강성도가 보다 정해진 0.6에 근접하고 있다.

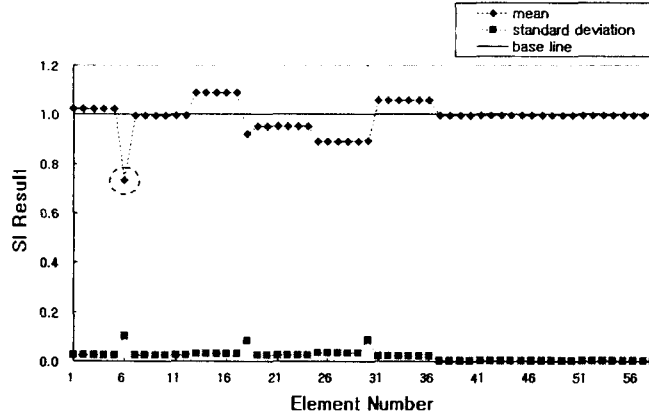


그림 6 WDMSIV & MSIV에 의한 손상식별 결과

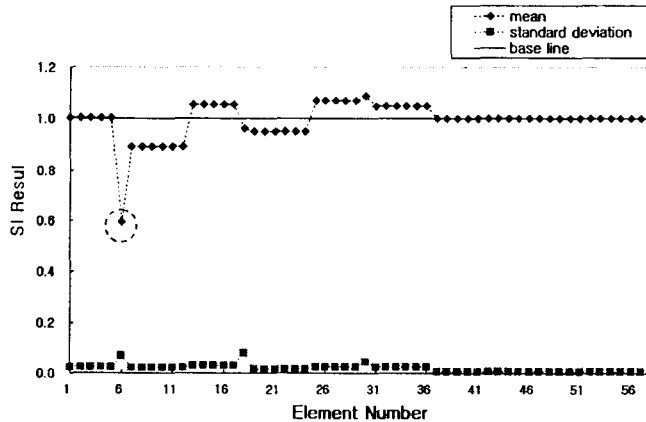


그림 7 6번을 측정점으로 하였을 때의 의한 손상식별 결과

## 5. 결 론

주파수영역 SI기법을 구조물에 발생한 손상의 위치와 손상 정도를 확인하기 위하여 적용할 때, 어느 위치에서 구조물 거동 데이터를 측정하는 것이 보다 신뢰받고 정확한 결과를 줄 수 있는 것인지에 대한 연구를 수행하였다. 본 연구에서는 최적센서위치(OSL)를 결정할 수 있는 방법을 제안하고, 이를 시뮬레이션 연구를 통하여 검증하였다.

본 연구에서는 Maximum Likelihood 법의 수식화에서 시작하여 정규분포된 측정오차에 대한 가정을 통하여 진동형상의 민감도에 대한 Fisher Information Matrix (FIM)로 구해지는 OSL 결정법을 정리하였다. 그리고 이 진동형상의 민감도에 의한 OSL 접근법에서 발생할 수 있는 rank deficiency 문제로 인하여 본 연구에서 선택한 예제와 같은 극단적인 경우에는 진동형상 자체에 의해 정의되는 FIM에 의한 OSL 기법으로 전개

될 수 있음을 밝혔다. 그리고, 이 진동형상 자체에 의한 FIM으로 정의되는 OSL 기법은 현재 가장 널리 사용되고 있는 기법임을 문헌조사에서 또한 확인할 수 있었다.

본 연구의 목적인 손상식별과 연계된 OSL 기법을 개발하기 위하여 교량에 대한 다경간 grid model 예제를 선정하여 제안된 방법들의 타당성 및 효율성을 검증하기 위한 시뮬레이션 연구를 수행하였다. 결론적으로 개발된 방법들에 의한 OSL 에서의 데이터를 사용하여 SI기법을 적용한 결과가, 그렇지 않은 임의의 OSL선택에 의한 SI 결과보다 훨씬 안정적이며 정확하다는 것을 확인할 수 있었다. 다만, 손상식별에 있어서는 아직 가중치의 계산이 제한된 개수의 센서를 사용할 경우 만족할 영향을 미치지 못하고 있지만, 이 경우에도 센서의 개수를 증가시키는 등의 방법으로 타협점을 찾을 수 있을 것이라 판단된다.

#### 참고 문헌

1. Penny, J.E.T., Friswell, M.I., and Garvey,S.D. (1993), "Automatic Choice of Measurement Locations for Dynamic Testing," AIAA Journal, 32(2), 407-414.
2. Udawadia F.E. (1994), "Methodology for Optimum Sensor Locations for Parameter Identification in Dynamic Systems," ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 120(2), 368-390.
3. Shin, S. (1994) "Damage Detection and Assessment of Structural Systems from Measured Response", Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
4. Kammer D.C. (1995), "Optimal Sensor Placement for Modal Identification using System-Realization Methods," Journal of Sound and Vibration, 19(3), 729-731.
5. Fadale, T.D., Nenarokomov A.V., and Emery, A.F. (1995), "Two Approaches to Optimal Sensor Locations," Journal of Heat Transfer, 117, 373-379.
6. Lee, I.-W. and Jung, G.-H. (1996), "An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities part I. Distinct natural frequencies part II. Multiple natural frequencies," Computers & Structures, 62(3), 429-443.
7. Hjelmstad, K.D. and Shin, S. (1997), "Damage Detection and Assessment of Structures from static response," ASCE J. of Engineering Mechanics, 123(6), 568-576.
8. Li, Y.Y. and Yam, L.H. (2001) "Sensitivity Analyses of Sensor Location for Vibration Control and Damage Detection of Thin-Plate Systems," Journal of Sound and Vibration, 240(4) 623-636
9. Shin, S., Kwon, S.J., and Kang, T.W. (2002) "Automatic Optimal Sensor Location for System Identification," Third World Conference on Structural Control, April 2002 Como, Italy