한국전산구조공학회
2003년도 봄 학술발표회 논문집

포화 다공질 매체의 Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 정식화

Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) Formulations of Saturated Porous Media

박대효* 정소찬**
Park, Taehyo Jung, Sochan

ABSTRACT

The solids and the fluids in porous media have a relative velocity to each other. Due to physically and chemically different material properties and their relative velocity, the behavior of saturated porous media is extremely complicated. Thus, in order to describe and clarify the deformation behavior of saturated porous media, constitutive models for deformation of porous media coupling several effects such as flow of the fluids or thermodynanical change need to be developed in frame of Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) description. The aim of ALE formulations is to maximize the advantages of Lagrangian and Eulerian elements, and to minimize the disadvantages. Therefore, this method is appropriate for the analysis of porous media that are considered for the behavior of the solids and the fluids. In this work, governing equations of porous media based on ALE description are obtained from governing equations in frame of updated Lagrangian description. Then, weak forms of these equations are derived using arbitrary weighting functions.

1. 서 론

다공질 매체는 다른 고체 재료에 비해 상대적으로 많은 간극들을 가지며 그 내부 구조가 간극 속의 유체들과 뼈대 구조로 구성되어 있다. 또한 다공질 매체 속의 내부 구조를 이루고 있는 고체 부분과 간극 부분은 서로 다른 재료특성을 가지는 물체들로 구성되어 있고 각 구성물들은 서로 다른 상대 속도를 가지고 이동하기 때문에 다공질 매체의 구조적 변형 거동을 해석하는 것은 매우 복잡하다 (Lewis and Schrefler, 1998; de Boer, 2000). 따라서 다공질 매체의 역학적인 거동을 해석하기 위해서는 변형 거동에 영향을 주는 내부 구조 속 유체의 흐름, 열역학적인 변화 등과 같은 여러 가지 복합적인 요인들이 고려된 구성방정식들을 세우는 것이 필수적이며 그러한 구성방정식에 대한 해를 구하기 위하여 유한 요소법을 이용한 수치적 연구 수행이 요구되어 진다.

물체에 대변형이 발생될 때 Lagrangian 요소들은 그 물체와 함께 변형되고 경계 영역과 접촉 영역들은 요소가 변형되기 전의 영역들과 동일하게 유지되기 때문에 구성방정식을 세우는 것이 용이하고 상대적으로 간단한 방법으로 물체의 변형에 대한 유한요소 해석을 수행할 수 있다. 하지만 사용되어지는 요소가 고차 (higher order elements)일수록 요소에 대한 유한요소 해석은 점점 부정확해지고 대변형으로 물체의 거동을 해석하는 많은 문제들에 있어서 Lagrangian mesh가 새로 구성되어져야 하기 때

* 정회원· 한양대학교 토목공학과 조교수
** 한양대학교 토목공학과 석사과정

문에 유한요소 해석을 수행할 때 발생하는 오차는 증가될 수 밖에 없다. 이러한 Lagrangian 방법은 고체역학과 같이 물체가 어떻게 변형되었는지를 해석하는 문제들에는 널리 사용되어 왔지만 유체역학과 같이 물체의 변형경로나 영역 자체에 주안점을 둔 문제들을 해석할 때에는 Lagrangian 방법보다는 Eulerian 방법이 더 효율적을 사용되어 왔다. Eulerian 유한요소들은 공간에 고정되어 있고 물체는 요소들이 변형되는 경로를 따라 이동하므로 Eulerian 유한요소들은 물체의 운동에 의한 변형이 발생하지 않는다. 하지만 요소들의 변형 경로를 따라 물체가 이동하기 때문에 구성방정식을 만들거나 경계조건을 적용시키는 것은 매우 복잡한 문제이다. 따라서 그러한 문제들을 해결할 수 있는 방법들이 연구되어 오고 있었고 근래에 들어서 Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 방법이 제안되어 사용되어 오고 있다.

처음에 연속체 역학에서 ALE 방법은 유체 역학을 다루는 분야에서 시작되었다. 그 후 비선형 고체 역학 분야로 발전되었는데 ALE 방법이 적용된 유체 역학과 비교하여 직면하게 되는 주된 어려움은 stress update, 즉 구성방정식의 시간에 대한 적분을 해결해야 되는 것이었다. 구성방정식의 convective term을 얼마나 정확하게 다루느냐가 ALE 비선형 고체 역학의 핵심 요소라고 제시되고 논의되었으며 (Rodríguez-Ferran et al., 1998), 많은 연구자들에 의해 ALE 기법이 사용되어 고체 역학에서의 비선형 문제들과 다양한 문제에 대한 연구가 성공적으로 수행되어져 오고 있다 (Liu et al., 1986; Liu et al., 1991; Yamada and Kikuchi, 1993).

또한 Benson (1992)에 의해 Large deformation이나 Finite strain transient problems를 풀 수 있는 전산처리 방법 (computational methods)에 대한 알고리즘들이 설명되었으며 유한 차분법과 유한 요소법에 관한 많은 참고 문헌들도 조사되어 다양한 전산처리 방법에 대한 outline이 제시된다. 뿐만 아니라 Gadala and Wang (1998)의 연구에서는 입자의 운동에 대한 설명 (kinematic description)부터 자세하게 설명되어 ALE formulation이 유도되고 Jaumann stress rate을 이용한 구성방정식과 Truesdell stress rate을 이용한 구성방정식이 다루어 진다. 이러한 과정을 통해 updated Lagrangian 정식화에서 확장된 식들이 제시되고 여러 가지 예제들에 대한 수치적인 값들과 실험적인 값들이 비교되고 검증되어진다. 한편 Love (2000)의 연구에서는 고체 역학의 관점에서 Finite strain elasticity와 Plasticity 문제들에 관한 ALE 유한요소 정식화에 대한 연구가 수행되고 해석되었으며 원형 봉의 충격 (impact of circular bar)과 같은 문제들에 대한 수치적 연구가 이루어져 Lagrangian 방법과 비교되고 있다. 또한 유체 역학의 관점에서 점성을 가진 유체의 액면요동 (sloshing)에 관한 문제도 다루어지고 있다. 하지만 ALE 유한요소 해석의 안정성 (stability)과 같은 문제들은 보다 철저히 다루어질 필요가 있다고 제시한다. Hypoelastic-plastic model에 대한 ALE approach 방법도 Rodríguez-Ferran et al. (2002)의 연구에서 제시되고 Hyperelastic-plastic model에 대한 여러 가지 접근 방법들 중에서 Godumov-like stress update 알고리즘 기법이 적용된 방법이 고려되고 논의된다.

현재까지 수행되었거나 수행되고 있는 연구들은 고체 물질에 가해지는 충격이나 유체 물질의 액면요동에 관한 해석같이 ALE 방법으로 이루어진 연구라고 할지라도 고체 부분이나 유체 부분 각각에 중점을 두고 이루어져 왔다. 또한 Lagrangian 방법은 고체의 변형 또는 운동을 기술하는데 장점이 있으며 Eulerian 방법은 유체의 변화나 흐름을 설명하는데 더 효율적이다. 하지만 다공질 매체는 고체 부분과 유체 부분을 함께 고려해야 되기 때문에 다공질 매체에 대한 거동 해석을 위해서는 ALE 방법이 적합하다고 할 수 있다. 따라서 기존의 Updated Lagrangian 방법으로 제시되었던 다공질 매체의 지배 방정식들 (Lewis and Schrefler, 1998)에 ALE 방법이 적용되어 식들이 표현되고 그 식들을 weak form의 형태로 나타낸다.

6. A. Krishnan., E. Dujardin., T. W. Ebbesen., P. N. Yianilos., M. M. J. Treacy., "Young's Modulus of Single-Walled Nanotubes," *Physical Review B*, Vol.58, No.20, 1998, pp.14013~14019

7. E. Hernandez., C. Goze., P. Bernier, A. Rubio., "Elastic Properties of C and $B_xC_yN_z$ Composite Nanotubes," *Physical Review Letters*, Vol.80, No.20, 1998, pp.4502~4505

8. B. I. Yakobson., C. J. Brabec., J. Bernholc., "Nanomechanics of Carbone nanotubes : Instabilities beyond Linear Response." Physical Review Letters, Vol.76, No.14, 1996, pp.2511~2514

9. A. K. Rappe, *Molecular Mechanics Across Chemistry*, University Science Books, Sausalito, California, 1997, p.5

10. W. D. Cornell., P. Cieplak., C. I. Bayly., I. R. Gould., K. M. Merz, Jr., D. M. Ferguson., D. C. Spellmeyer., T. Fox., J. W. Caldwell., P. A. Kollman., "A Second Generation Force Field for the Simulation of Proteins, Nucleic Acid, and Organic Molecules," *Journal of the American Chemical Society*, Vol.117, No.19, 1995, pp.5179~5197

11. M. Ostoja-Starzewski., P. Y. Sheng., K. Alzebdeh., "Spring Network Models in Elasticity and Fracture of Composites and Polycrystals," *Computational Materials Science*, Vol.7, No.1-2, 1996, pp.82~93

12. D. Qian, W. K. Liu., R. S. Ruoff., "Mechanics of C_{60} in Nanotubes," *Journal of Physical Chemistry B*, Vol.105, No.44, 2001, pp10753-107589.

13. O. L. Blakslee, D. G. Proctor., E. J. Seldin., G. B. Spence., T. Weng., "Elastic Constant of Compression-annealed pyrolitic graphite," *Journal of applied Physics*, Vol.41, No.8, 1970, pp.3373~3382

14. G. M. Odegard., T. S. Gates., L. M. Nicholson., K. E. Wise., "Equivalent-Continuum Modeling of Nano-Structured Materials," *Composite Science and Technology*, Vol.62, No.14, 2002, pp.1869~1880

15. S. P. Timoshenko., S. Weinowsky-Kreiger, *The Theory of Plates and Shells*, McGraw Hill, New York, 1959. pp.47

16. D. H. Robertson., D. W. Brenner., J. W. Mintmire., "Energetics of Nanoscale Graphitic Tubules" *Physical Review B*, Vol.45, No.21. 1992, pp.12592-12595

$$\boldsymbol{\chi} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\mathbf{x},t) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X},t),t) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X},t) \tag{2}$$

Eulerian 좌표계에서 입자의 운동을 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X},t)$, 속도를 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$로 나타낼 때 임의의 함수 f에 대한 물체 도함수 (material time derivative)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{Df(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot \mathrm{grad}f \tag{3}$$

또는 $$\frac{Df(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}v_i$$

한편 ALE 좌표계에서 입자의 운동을 식 (1)처럼 나타낼 때 물체의 속도 벡터 $\mathbf{v}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \boldsymbol{\chi}}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \tag{4}$$

또는 $$v_j = \frac{\partial \phi_j(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\phi}_j(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}_j(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \chi_j}\frac{\partial \Psi_j(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \hat{v}_j + \frac{\partial x_j(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

이 때 물체 속도 $\mathbf{v}$와 mesh 속도 $\hat{\mathbf{v}}$ 사이의 차를 의미하는 convective 속도 $\mathbf{c}$ 또는 c_i는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \boldsymbol{\chi}}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \tag{5}$$

또는 $$c_i = v_i - \hat{v}_i = \frac{\partial x_i(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \chi_j}\frac{\partial \chi_j(\mathbf{X},t)}{\partial t}$$

여기서 식 (5)를 이용하여 ALE 좌표계에서 임의의 함수 f에 대한 물체 도함수는 식 (6)과 같이 표현된다.

$$\frac{Df(\boldsymbol{\chi},t)}{Dt} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot \mathrm{grad}f \tag{6}$$

또는 $$\begin{aligned}\frac{Df(\boldsymbol{\chi},t)}{Dt} &= \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial \chi_i}\frac{\partial \Psi_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi},t)}{\partial x_j}c_j\end{aligned}$$

식 (3)과 식 (6)에서 나타내어지는 것 같이 Eulerian 좌표계와 ALE 좌표계로 표현되는 식은 물체도 함수의 표현에 그 차이점을 가진다.

3. 포화된 다공질 매체에 대한 ALE 정식화

3.1 지배 방정식

고체 부분에 대한 질량 보존 법칙은 weak form에서 유효 응력이 도입되기 때문에 유체 부분에 관한

질량 보존 법칙만 필요하게 된다. Updated Lagrangian 방법으로 표기된 다공질 매체의 유체 부분에 대한 질량 보존 법칙은 다음과 같이 주어진다 (Lewis and Schrefler, 1998).

$$\left(\frac{\alpha-n}{K^s}\left(S^w\right)^2+\frac{nS^w}{K^w}\right)\frac{Dp^w}{Dt}+\frac{\alpha-n}{K^s}S^wS^g\frac{Dp^g}{Dt}+\left(\frac{\alpha-n}{K^s}p^wS^w-\frac{\alpha-n}{K^s}p^gS^w+n\right)\frac{DS^w}{Dt}$$
$$-\beta_{sw}\frac{DT}{Dt}+\alpha S^w\mathrm{div}\mathbf{v}^s+\frac{1}{\rho^w}\mathrm{div}\left\{\rho^w\frac{\mathbf{k}k^{rw}}{\mu^w}\left[-\mathrm{grad}p^w+\rho^w(\mathbf{g}-\mathbf{a}^s-\mathbf{a}^{ws})\right]\right\}=-\frac{\dot{m}}{\rho^w} \tag{7}$$

이 식은 고체 부분의 입자가 압축성을 가진다고 할 때 표현되는 식이며 여기서 S^w와 S^g는 각각 액체 (특히 물)와 기체에 대한 포화도를 나타내는 함수이고 $\alpha=1-\dfrac{K^t}{K^s}$는 Biot 상수를, K^t, K^s, K^w는 각각 skeleton, grain material, 액체의 bulk modulus를 나타낸다. n은 다공질 매체의 간극이고 p^w와 p^g는 각각 액체와 기체의 압력을 나타내는 함수이다. 또한 고체와 액체에 대한 열팽창 계수를 각각 β^s와 β^w라고 하였을 때 $\beta^{sw}=S^w\left[(\alpha-n)\beta^s+n\beta^w\right]$이다. 그리고 T는 다공질 매체 속 온도와 외부 온도의 차를 나타내고 $\mathbf{v}^s$와 $\mathbf{a}^s$는 각각 속도, 가속도 벡터이다. ρ^w는 액체의 밀도, $\mathbf{k}$는 matrix 형태로 표현된 다공질 매체 전체의 투수계수, k^{rw}는 포화도의 함수로 나타낼 수 있는 상대 투수계수이다. 마지막으로 μ^w는 동점성 계수, $\mathbf{g}$는 중력가속도 벡터, $\dot{m}$는 기체의 질량 변화율을 나타낸다.

식 (7)에서 가속도에 대한 항은 물체 도함수와 고체에 대한 액체의 상대 속도 $\mathbf{v}^{ws}=\mathbf{v}^w-\mathbf{v}^s$를 이용하여 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{a}^w=\mathbf{a}^s+\mathbf{a}^{ws}+\mathrm{grad}\mathbf{v}^w\cdot\mathbf{v}^{ws} \tag{8}$$

식 (8)과 기본 가정을 적용하면 $S_w=1$, $S_g=0$, $DT/Dt=0$, $k^{rw}=1$, $\mathrm{grad}\mathbf{v}^w=0$, $\mathbf{a}^{ws}=\mathbf{a}^w-\mathbf{a}^s=0$, $\dot{m}=0$ 이기 때문에 식 (7)은 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\frac{\alpha-n}{K_s}+\frac{n}{K_w}\right)\frac{Dp^w}{Dt}+\alpha\mathrm{div}\mathbf{v}^s+\mathrm{div}\left\{\frac{\mathbf{k}}{\mu^w}\left(-\mathrm{grad}p^w+\rho^w\left(\mathbf{g}-\mathbf{a}^w\right)\right)\right\}=0 \tag{9}$$

Updated Lagrangian 방법으로 표기된 다공질 매체의 운동량 보존 법칙에 대한 표현은 고체 부분과 유체 부분을 하나의 매체로 간주하여 다음과 같이 표현된다 (Lewis and Schrefler, 1998).

$$-\rho\mathbf{a}^s-nS_w\rho^w\left(\mathbf{a}^{ws}+\mathrm{grad}\mathbf{v}^w\cdot\mathbf{v}^{ws}\right)-nS_g\rho^g\left(\mathbf{a}^{gs}+\mathrm{grad}\mathbf{v}^g\cdot\mathbf{v}^{gs}\right)+\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}=0 \tag{10}$$

여기서 $\mathbf{v}^{gs}$는 고체에 대한 기체의 상대 속도로서 $\mathbf{v}^{gs}=\mathbf{v}^g-\mathbf{v}^s$로 표현되며 기본 가정을 적용하면 $S_w=1$, $S_g=0$, $\mathbf{a}^{ws}=0$, $\mathrm{grad}\mathbf{v}^w=0$이기 때문에 식 (10)은 다음과 같이 표현된다.

$$-\rho\mathbf{a}^s+\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}=0 \tag{11}$$

여기서 ρ는 다공질 매체 전체에 대한 유체의 밀도로 다음과 같이 주어진다.

$$\rho = (1-n)\rho^s + n\rho^w \tag{12}$$

3.2 Weak forms

지배 방정식들을 이산화 (discretization) 시켜 유한요소 해석을 수행하기 위해서 지배 방정식의 weak forms의 유도가 필요하다. 따라서 앞서 구해진 식 (9)와 (11)에 초기 조건들과 경계 조건들이 적용되어진 weak forms가 구해진다. 시간 $t=0$ 일 때 영역 (domain of interest) Ω 와 경계 (boundary of interest) Γ 에 대하여 변위 $\mathbf{u}$ 와 유체 부분의 압력 p^w 에 대한 초기조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o \ , \quad p^w = p^w_o \tag{13}$$

주어지는 값의 경계 조건을 Γ_π, fluxes의 경계 조건을 Γ^q_π 라 할 때 경계조건 $\Gamma = \Gamma_\pi \cup \Gamma^q_\pi$ 로 표현될 수 있다. 이것은 변위와 압력에 대한 경계 조건이 식 (14)같이 주어질 수 있다는 것을 나타낸다.

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \quad p^w = \tilde{p}^w \text{ on } \Gamma_w \tag{14}$$

응력에 대한 traction boundary condition은 식 (15)로 주어진다.

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma^q_u \tag{15}$$

그리고 유체에 대한 flux boundary condition은 식 (16)으로 주어진다.

$$\rho^w \frac{\mathbf{k}}{\mu^w}\left(-\mathrm{grad}p^w + \rho^w(\mathbf{g} - \mathbf{a}^w)\right)\cdot \mathbf{n} = q^w \text{ on } \Gamma^q_w \tag{16}$$

여기서 $\mathbf{n}$ 은 영역 Ω 의 경계 Γ 에 수직방향을 나타내는 단위 수직 벡터 (unit normal vector)이다.

유체 부분에 대한 질량 보존 법칙인 식 (9)에 flux boundary condition이 적용되고 weighting functions $\mathbf{w}$, $\breve{\mathbf{w}}$ 가 사용되어 weak form이 식 (17)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{w}\left[\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^w}\left(-\mathrm{grad}p^w + \rho^w(\mathbf{g}-\mathbf{a}^w)\right)\right) + \alpha \mathrm{div}\mathbf{v}^s + \left(\frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{n}{K_w}\right)\frac{Dp^w}{Dt}\right]d\Omega \\ + \int_{\Gamma^q_w} \breve{\mathbf{w}}\left[\frac{\mathbf{k}}{\mu^w}\left(-\mathrm{grad}p^w + \rho^w(\mathbf{g}-\mathbf{a}^w)\right)\cdot\mathbf{n} - \frac{q^w}{\rho^w}\right]d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{17}$$

또한 식 (17)에 식 (18)과 같은 경계 조건을 적용시킬 수 있다.

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_w \ , \quad \breve{\mathbf{w}} = -\mathbf{w} \text{ on } \Gamma^q_w \tag{18}$$

그리고 식 (17)에 ALE 정식화가 도입되면 세 번째 항인 물체도함수 항에 식 (19)가 대입된다.

$$\frac{Dp^w}{Dt} = \frac{\partial p^w(\chi, t)}{\partial t} + \mathrm{grad}p^w \cdot \mathbf{c} \tag{19}$$

마지막으로 식 (17)의 첫 번째 항에 Green theorem이 적용되면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}\left[\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^{w}}\left(-\operatorname{grad}p^{w}+\rho^{w}\left(\mathbf{g}-\mathbf{a}^{w}\right)\right)\right)\right]d\Omega=$$
$$-\int_{\Omega}(\operatorname{div}\mathbf{w})\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^{w}}\left(-\operatorname{grad}p^{w}+\rho^{w}\left(\mathbf{g}-\mathbf{a}^{w}\right)\right)\right)d\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{w}\left[\frac{\mathbf{k}}{\mu^{w}}\left(-\operatorname{grad}p^{w}+\rho^{w}\left(\mathbf{g}-\mathbf{a}^{w}\right)\right)\right]\cdot\mathbf{n}d\Gamma \tag{20}$$

식 (17)에 식 (18), (19), (20)이 대입되면 유체부분의 질량 보존 법칙에 대한 weak form이 구해진다.

$$\int_{\Omega}(\operatorname{div}\mathbf{w})\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^{w}}\left(\operatorname{grad}p^{w}\right)\right)d\Omega-\int_{\Omega}(\operatorname{div}\mathbf{w})\left(\frac{\mathbf{k}}{\mu^{w}}\left(\rho^{w}\left(\mathbf{g}-\mathbf{a}^{w}\right)\right)\right)d\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{w}\left(\alpha\operatorname{div}\mathbf{v}^{s}\right)d\Omega$$
$$+\int_{\Omega}\mathbf{w}\left(\frac{\alpha-n}{K_{s}}+\frac{n}{K_{w}}\right)\left(p^{w}_{,t[x]}+\operatorname{grad}p^{w}\cdot\mathbf{c}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_{w}^{q}}\mathbf{w}\frac{q^{w}}{\rho^{w}}d\Gamma=0 \tag{21}$$

한편 운동량 보존 법칙에 대한 표현인 식 (11)에 traction boundary condition인 식 (15)가 대입되고 weighting functions $\mathbf{w}^{*}$, $\breve{\mathbf{w}}^{*}$ 가 사용되어 weak form이 식 (22)와 같이 구해진다.

$$\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{g}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\rho\mathbf{a}^{s}d\Omega+\int_{\Gamma}\breve{\mathbf{w}}^{*}\left(\mathbf{t}-\tilde{\mathbf{t}}\right)d\Gamma=0 \tag{22}$$

그리고 식 (22)의 첫 번째 항에 Green theorem을 적용하면 다음 식 (22)가 얻어진다.

$$\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\right)d\Omega=-\int_{\Omega}\left(\operatorname{div}\mathbf{w}^{*}\right)\boldsymbol{\sigma}d\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{w}^{*}\mathbf{t}d\Gamma \tag{23}$$

또한 식 (22)에 식 (24)와 같은 경계 조건을 적용시킬 수 있다.

$$\mathbf{w}^{*}=\mathbf{0}\ \text{ on }\ \Gamma_{u},\quad \breve{\mathbf{w}}^{*}=-\mathbf{w}^{*}\ \text{ on }\ \Gamma_{u}^{q} \tag{24}$$

식 (22)에 식 (23), (24)가 대입되면 식 (22)는 다음과 같이 표현된다.

$$-\int_{\Omega}\left(\operatorname{div}\mathbf{w}^{*}\right)\boldsymbol{\sigma}d\Omega+\int_{\Gamma_{u}^{q}}\mathbf{w}^{*}\mathbf{t}d\Gamma+\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\rho\mathbf{g}d\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\rho\mathbf{a}^{s}d\Omega-\int_{\Gamma_{u}^{q}}\mathbf{w}^{*}\left(\mathbf{t}-\tilde{\mathbf{t}}\right)d\Gamma=0 \tag{25}$$

식 (25)의 두 번째 항과 다섯 번째 항을 정리하면 최종적으로 운동량 보존 법칙에 대한 weak form 이 구해진다..

$$\int_{\Omega}\left(\operatorname{div}\mathbf{w}^{*}\right)\boldsymbol{\sigma}d\Omega=\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\rho\mathbf{g}d\Omega+\int_{\Omega}\mathbf{w}^{*}\rho\mathbf{a}^{s}d\Omega+\int_{\Gamma_{u}^{q}}\mathbf{w}^{*}\tilde{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{26}$$

이 식은 물체 도함수를 포함하고 있지 않기 때문에 ALE 좌표계에서도 같은 형태의 식을 가진다.

4. 결　　론

ALE 정식화는 Lagrangian 방법과 Eulerian 방법에서의 Lagrangian 요소들과 Eulerian 요소들의 장점을 최대화하고 단점을 최소화하기 위하여 적용되어진다. ALE 방법은 경계 영역이나 접촉 영역들이 변형 전과 동일하게 유지되기 때문에 물체가 어떻게 변형되었는가 하는 변형 상태를 설명하는데 효과적으로 접근할 수 있는 Lagrangian 방법의 장점과 변형을 따라 물체의 변형 경로를 설명하는데 효과적인 Eulerian 방법의 장점을 최대화 할 수 있다. 반면에 대변형이 발생할 때 정확도가 감소되는 Lagrangian 방법의 단점과 요소들이 변형되는 경로를 따라 물체가 이동하기 때문에 구성 방정식들을

다루는데 있어서 복잡해지는 Eulerian 방법의 단점을 최소화 할 수 있다. 따라서 ALE 정식화가 적용되어진 포화된 다공질 매체에 대한 지배 방정식들이 나타내어 지고 유한요소 해석을 수행하기 위하여 weak form들이 표현되고 있다. 유한요소 해석이 수행되는데 있어서 기존의 방법들에 사용되어 지고 있는 Galerkin method가 적용되면 convective term때문에 수치적 연구에 대한 불안정성 (numerical instabilities)을 가지게 된다. 따라서 차후 수행되어질 연구에서는 수치적 불안정성을 극복하기 위해 Petrov-Galerkin method가 사용될 것이다. 보다 많은 연구가 이루어 진다면 포화 되었을 때 뿐만 아니라 부분 포화된 상태나 다른 조건들을 가지는 다공질 매체의 대변형 거동에 대한 구성방정식이 ALE 정식화의 토대 위에서 수립될 것이고 유한 요소법이 이용된 수치적 연구가 수행될 것이다. 그리고 실용적인 경계 조건들을 가지는 문제들에 이러한 연구가 적용되어 검증될 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (과제번호 : R01-2002-000-00063-0(2002)) 지원으로 수행되었으며 이에 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, Chichester, 2000, p.650

Benson, D.J., “Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.99, 1992, pp.235~394

de Boer, R., *Theory of Porous Media*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000, p.618

Gadala, M.S. and Wang, J., “ALE Formulation and Its Application in Solid Mechanics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.167, 1998, pp.33~55

Lewis, R.W. and Schrefler, B.A., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, John Wiley & Sons, Chichester, 1998, p.492

Liu, W.K., Belytschko, T. and Chang, H., “An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path-Dependent Materials,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.58, 1986, pp.227~246

Liu, W.K., Chen, J.S., Belytschko, T. and Zhang, Y.F., “Adaptive ALE Finite Elements with Particular Reference to External Work Rate on Frictional Interface,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.93, 1991, pp.189~216

Love, E., *Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Finite Element Formulations in Finite Strain Elasto-Plasticity*, Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 2000, p.266

Rogríguez-Ferran, A., Pérez-Forguet, A. and Huerta, A., “Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Formulation for Hyperelastoplasticity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.53, 2002, pp.1831~1851

Yamada, T. and Kikuchi, F., “An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods for Incompressible Hyperelasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.102, 1993, pp.149~177