한국전산구조공학회
2003년도 봄 학술발표회 논문집

특이점의 분할을 고려한 근사 서브디비전 방법에 대한 연구

A Study on approximating subdivision method considering extraordinary points

서 홍 석* 조 맹 효**
Suh, Hongsuk Cho, Maenghyo

ABSTRACT

In computer-aided geometric modeling(CAGD), subdivision surfaces are frequently employed to construct free-form surfaces. In the present study, Loop scheme and Catmull-Clark scheme are applied to generate smooth surfaces. To be consistent with the limit points of target surface, the initial sampling points are properly rearranged. The pointwise errors of curvature and position in the sequence of subdivision process are evaluated in both Loop scheme & Catmull-Clark subdivision scheme. In partcural, a general subdivision method in order to generate considering extraordinary points are implemented free from surface with arbitrary sampling point information.

1. 서 론

현재 널리 사용되고 있는 CAD(Computer Aided Design)의 CAGD(Computer Aided Geometric Design) 기술과 CAE(Computer Aided Engineering)기술, 최적설계기술 등은 각각 독자적으로 태동되고 발전되어 독립적인 학문분야로 인지되어 왔다. 그러나 최근에 이르러 모델링, 해석, 설계 그리고 더 넓게는 생산 공정까지 함께 모사할 수 있는 통합 시뮬레이션 개발기술이 제품 개발의 효율성과 생산 비용의 절감, 생산 시간의 절약 등을 위해 필요하다는 인식이 확대되어 있다. 그러므로 최근에는 다루고자 하는 대상의 범위와 기술의 깊이를 달리 하면서 통합 시뮬레이션 개발 기술에 노력이 경주되고 있다.

그러나 통합화 기술의 근본적인 문제점은 CAGD모델링 기술과 CAE기술, 최적설계기술들이 서로 다른 환경에서 개발되어 왔다는 데 있다. 그래서 그 통합 기술도 진정한 통합이라기보다는 입, 출력에 관여하는 데이터 파일들의 표준화와 데이터들의 효율적인 관리가 통합 프로그램의 근간이 되어 왔다. 또한 독립적으로 개발되어온 상용 프로그램들이 각 분야에서 쓰이고 있어 초기의 모델링, 해석, 설계라는 순차적 흐름에 따라 모델링의 결과를 입력데이터로 하여 해석을 수행하고 해석을 반복하여 설계를 결정하는 초창기의 제품 설계 방법에는

* 서울대학교 기계항공공학부 석사과정
** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

큰 문제가 없었다. 그러나 제품의 기능화와 정밀화가 요구되면서 형상변경이 필요하고 설계 목적함수 변경에 따라 설계의 반복 사이클이 필요한 상황이나 해석결과로부터 모델링을 변경해야하는 통합적인 상황에서는 각 소프트웨어들의 폐쇄성과 개발 환경의 상이성 때문에 통합기술의 구현이 쉽지않다. 그러므로 독립적인 소프트웨어에 가능한 한 공통성을 부여하고 개발환경을 동일하게 맞춘 통합 모델링-해석-설계 기술의 구현이 절실히 요구된다고 하겠다. 그러므로 본 연구에서는 곡면 구조물에 초점을 맞춰 곡면 구조물의 모델링, 해석, 설계를 통합하기 위하여 subdivision 곡면의 공통 환경에서 4차의 box-spline을 이용한 삼각 격자법과, 3차 B-spline을 이용한 사각 격자법을 구현하여 보았다.

최근 여러 학자들은 협동 연구를 통해 Loop의 subdivision 기법을 이용하여 곡면을 생성하고 이 곡면의 해석을 위한 고전 쉘 이론을 정립하여 곡면의 해석과 기하학적인 모델링을 연동하였다.[1] 또한 이 방법론을 비선형 탄성 쉘로 확장하였으며[2], 곡면의 형상 설계로의 확장성을 보였다.[3]

그러나 이 방법론은 고전 쉘이론에 기초하였으므로 두꺼운 쉘 구조물이나 샌드위치 복합재료 적층 쉘과 같이 횡전단 변형이 심한 쉘 구조물에는 적용할 수 없고 아주 얇은 등방성 탄성 물체의 곡면에만 적용이 가능하므로 그 적용 범위에 한계가 있다. 그러므로 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘이론에 기초한 subdivision 유한요소가 일반적인 곡면 구조물의 변형을 기술하기 위한 표준해석 도구로서 필요하다. 또한 삼각격자에 기초한 subdivision 기법인 Loop 방법뿐만 아니라 이와 동일하게 널리 사용되는 사각 격자에 기초한 Catmull-Clark 방법에 의해 곡면을 구현하는 기술을 확보할 필요가 있다. 치수와 크기가 정확해야 하는 기계공학의 모델에 적용하기 위한 subdivision geometric scheme을 확보하기 위해서는 재분할을 통해 얻어지는 극한점이 처음에 주어진 곡면의 데이터 점들과 일치하도록 하는 기술적인 문제를 해결해야 한다.

이런 견지에서 보면 최근에 태동한 subdivision technology는 다중 해상도를 최대한으로 활용하기 위한 방법론의 일반화와 adaptive 해석을 위해 많은 연구가 수행되어야할 분야이다. 특히 다중해상도(multi-resolution) 기능이 있는 subdivision기법은 형상 최적화 문제에서도 효과적으로 적용될 수 있으므로 다중 해상도 기능과 adaptive refinement 기법을 효과적으로 구현하는 문제가 연구되어야 한다.

본 연구에서는 subdivision 기법인 Loop 방법과 Catmull-Clark 방법에 의해 곡면을 구현하는 기술과 구현되는 곡면의 치수와 크기의 정확성을 위해서 재분할을 통해 얻어지는 데이터의 극한값이 처음에 주어진 곡면의 데이터 점들과 일치해야 하는 기술적인 문제들을 해결하고, Loop subdivision 기법에서 6각형 regular 메쉬와 6각형을 제외한 다각형들의 irregular 메쉬를 다루는 문제를 해결 하는데 중점을 두었다.

2. Subdivision

2.1. Subdivision의 개념과 종류

Subdivision은 주어진 간단한 메쉬에 새로운 점을 추가함으로써 물체를 좀더 부드럽게 보이게 하는 방법이며, 지역적으로 계산이 되고 주어진 방법에 의해서 새로운 점이 생성된다. 그래서 일반적으로 subdivision은 부드러운 곡면을 얻는데 사용되어지고 있다. 그러나 subdivision은 각각의 재분할 단계마다 4배의 새로운 점이 생성되기 때문에 많은 양의 데이

터를 다뤄야 한다는 단점이 있다. 더욱 자세한 subdivision 곡면 구현에 대한 정보는 참고문헌[1,4,5]에서 얻을 수 있다.

그림 1.은 현재 가장 널리 쓰이고 있는 Loop 방법[3]과 Catmull-Clark 방법[6]으로 구성된 형상을 나타낸다. Loop 방법은 데이터 점들을 삼각화를 통해 삼각격자들의 조합으로 곡면을 구성하고 재분할에 의해 부드러운 곡면을 얻는 방법이며, Catmull-Clark 방법은 사각 메쉬의 재분할을 통해 곡면을 생성하는 방법이다.

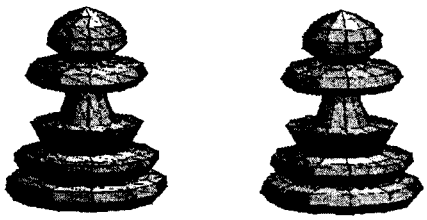


그림 1. Loop(왼쪽)과 Catmull-Clark(오른쪽) subdivision 방법

이와 달리 보간법을 이용하는 기법으로는 Butterfly 방법[7]과 Doo-Sabin 방법[8]등이 있다. 보간법과 근사법에 의한 subdivision 방법에 대한 개념은 그림 2.에 주어져 있다.

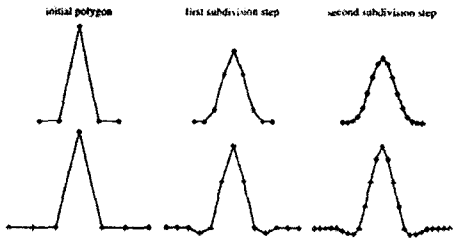


그림 2. 근사법(위)과 보간법(아래)

이중에서 부드러운 곡면은 근사법에 의해서 얻어지기 때문에 근사법에 기초한 방법이 선호되고 있다. 그러나 기계공학과 같이 대상의 치수와 크기가 분명한 경우에는 치수와 크기를 고려하여 처음부터 재분할을 수행할 때, 한 번 생성한 조정점의 위치가 계속 바뀌어야 하므로 적용하기가 용이하지 않다.

2.2.1 subdivision 방법

Loop subdivision 방법을 적용할 때에는 6개의 삼각형이 모여서 이루어진 6각형 모양이 기본이 된다. 위의 그림 3. 은 Loop subdivision 방법에 의해 한번의 subdivision 단계를 거친 다음에 새로운 점의 생성과 기존 점의 위치가 이동되는 것을 보여주고 있다. 그림 3.에서 보여지는 $p_0^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0, p_5^0, p_6^0$ 는 6각형을 이루는 각 점의 정보를 가지고 있다. p_i^j 에서 j 는 subdivision이 이루어진 횟수를 나타내고, i 는 하나의 6각형 안에서 7개점이 이루는 순서를 말해준다.

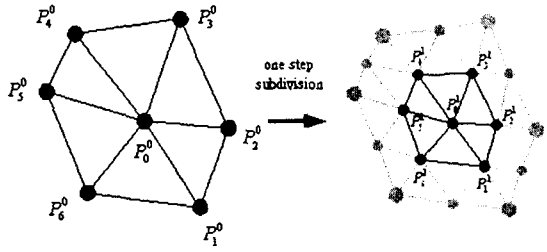


그림 3. Loop subdivision 방법

subdivision을 수행하는 과정에서는 두 가지의 단계가 수행되어야 한다. 첫 번째 단계는 새로운 점이 생성되어서 6각형 안에 삽입되는 것이고, 두 번째 단계는 기존에 있던 점을 재조정하는 과정이다. 두 단계의 과정은 아래 그림 4.에 나타나 있다.

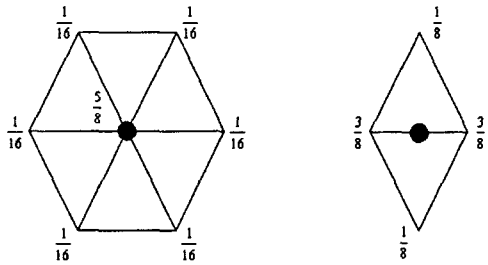


그림 4. Loop subdivision 방법에서 기존 점의
위치조정(왼쪽)과 새로운 점의 생성(오른쪽)

2.2.2 Catmull-Clark subdivision 방법

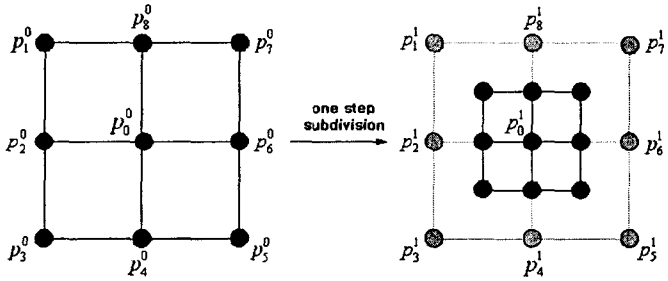


그림 5. Catmull-Clark subdivision 방법

위 그림 5.는 9개의 점을 기본으로 하는 사각 격자를 이용한 Catmull-Clark subdivision 방법에 의해 한 단계의 재분할 과정을 거쳤을 때를 그림으로 나타낸 것이다. 그림의 $p^1_0, p^1_1, p^1_2, p^1_3, p^1_4, p^1_5, p^1_6, p^1_7, p^1_8$ 의 점들은 Loop subdivision 방법 때와 마찬가지 과정으로 아래 그림 6.의 방법에 의해서 새로 삽입되어지고, 기존 점의 위치가 재조정되어진

점들이다.

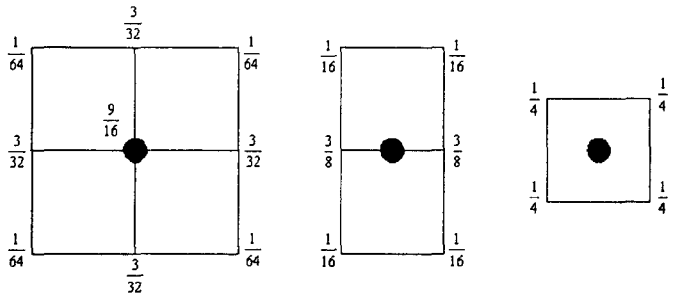


그림 6. Catmull-Clark subdivision 방법에서 기존 점의 위치 재조정(왼쪽)과 새로운 점의 생성(가운데, 오른쪽)

2.3 Subdivision 방법에 의한 정확한 곡면 구현

보간법은 부드러운 곡면을 제공하지 않기 때문에 단점이 있고 대신 근사법은 생성된 조정점의 위치가 재분할 과정에서 변한다는 어려움이 있다. 그러나 재분할을 통한 조정점이 결국은 하나의 극한점으로 수렴한다는 수학적인 성질이 있으므로 이를 이용하면 몇 차례의 subdivision을 통해서 기계공학에서 필요한 치수와 크기가 고정된 모델로 수렴해 가는 모델링 기법을 확립할 수 있다. 이것은 처음 얻게 되는 실제 데이터 값을 극한점으로 보고 극한점의 각각에 대한 초기 데이터 값을 구하여 몇 번의 subdivision과정을 통해 초기의 데이터 값들이 실제 데이터 값(극한점)으로 수렴 해가는 것을 확인하는 과정으로 이루어지는 기법이다.

그리고 이러한 모델링 기법을 바탕으로 하면 subdivision을 하고자 하는 초기의 곡면에서 몇 개의 조정점을 선택하여 이동시켜 주어진 데이터 값을 변형시킨 후, subdivision 과정을 통하여 우리가 원하는 형상의 곡면을 인위적으로 만들어 나갈 수도 있다.

$$X^{k+1} = SX^k \tag{1}$$

$$X^{\infty} = \lim_{k\to\infty} S^k X^0 \tag{2}$$

(1), (2)식에서 X는 좌표값의 matrix를 나타내며, S는 subdivision matrix를 나타낸다. (2)식에서 초기의 데이터 값을 가지고 무한번 subdivision을 수행하면 초기데이터 값이 극한값으로 수렴해 감을 알 수 있다.

$$S = R\Lambda L \tag{3}$$

where R : *right eigenvector*
L : *left eigenvector*
Λ : *eigenvalues*

$$S^{\infty} = R\Lambda^{\infty} L \tag{4}$$

$$S^{\infty} = L_0 \tag{5}$$

since $R_0 = \{1,1,1,1,\cdots 1\}$

그리고 S matrix는 (3)식으로 표현이 가능하고, S matrix를 무한번 연산 하였을 때, (4)식

으로 표현이 가능하기 때문에 (5)식을 얻어 낼 수가 있다.

$$\{\cup X_I^{\infty}\} = [\cup L_0]\{\cup X_I^0\} \tag{6}$$

$$\therefore [\cup L_0]^{-1}\{\cup X_I^{\infty}\} = \{\cup X_I^0\} \tag{7}$$

Where the symbol $\cup$indicates the merge process in global assembly

따라서 (5)식을 이용하여 (7)식을 얻어내면 우리가 초기에 얻게 되는 실제 데이터 값(극한점)에서 각각에 해당되는 초기데이터 값을 구할 수 있게 됨으로써 본 연구에서 목적으로 두었던 정확한 곡면을 모델링 하는 기법 구현이 가능하게 된다.

그리고 구하여진 초기 데이터 값을 가지고 몇 번의 subdivision과정을 수행하였을 때, 초기 데이터 값이 실제 데이터 값으로 수렴을 해 가는가는 곡률과 좌표 값의 상대오차를 이용하여 확인하여 볼 수 있다.

위의 (3),(4),(5)식에서 S matrix는 앞의 Loop 과 Catmull-Clark subdivision 방법에서 언급된 regular한 6각형(Loop)이나 사각형(Catmull-Clark) 모양에 대한 것만 나타내는 것이 아니라 irregular[9,10]한 모양도 모두 포함하고 있다. 아래 그림7.은 Loop subdivision 방법에서 irregular한 메쉬 중 하나인 5각형 모양의 메쉬를 나타내고 있다. 그리고 그림에서 n은 한 점에 연결된 주변 점들의 개수를 나타낸다.

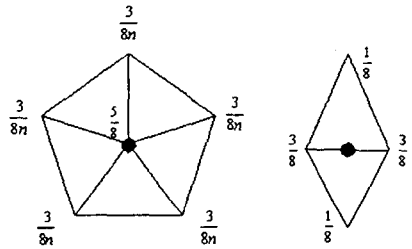
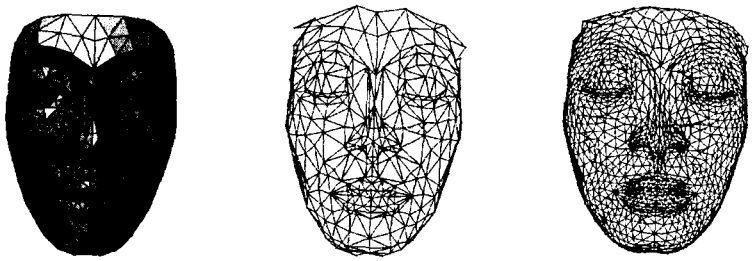


그림 7. Loop subdivision 메쉬 중 irregular한 5각형 메쉬

그림 8.에서 첫 번째 메쉬는 극한점을 가지고 구현한 메쉬이고, 세 번째 메쉬는 가운데의 초기 데이터 값을 가지고 구현한 메쉬에서 몇 단계의 subdivision 과정을 거쳤을 때, 이루어지는 형상을 나타낸다. 그리고 얼굴 메쉬는 4각형에서 11각형 까지의 메쉬들을 포함하고 있다.



Limit mesh　　Initial mesh　　Subdivision mesh

그림 8. subdivision 과정을 거친 face mesh

그림 9.는 subdivision을 수행함에 따라 모델링 하는 곡면이 주어진 실제 데이터 값에 수렴하는 과정을 나타내는 것이고, 그림 10.과 11.은 모델링 되는 곡면이 실제 데이터 값에 수렴할 때, 실린더에서 실제 데이터값에 대응되는 극한점과 주변 점들의 곡률(curvature)과 좌표의 오차를 보여준다.

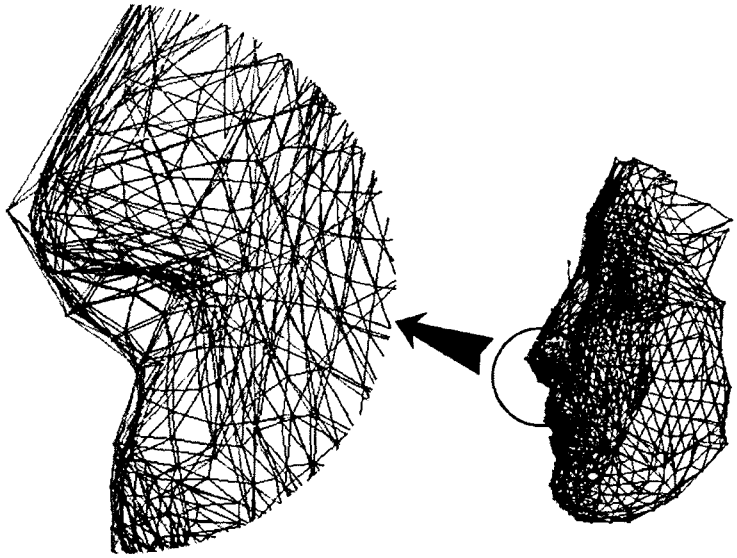


그림 9. Subdivision 과정에서 초기 데이터 값이 극한점에 수렴해 가는 과정

그림 9.는 그림 8.에서 나타내어진 두 가지의 메쉬가 겹쳐져 보이게 함으로써 subdivision을 수행 하였을 때, 초기의 데이터 값이 실제 데이터 값으로 수렴해 가는 과정을 쉽게 알아볼 수 있게 한 그림이다. 확대되어진 코 부분에서 몇 번의 subdivision과정을 거친다면 우리가 원하는 부드러운 정확한 형상을 얻을 수 있게 된다는 것을 알 수 있다.

그림 10.과 11. 에서는 Uniform subdivision을 통해 실린더의 곡률과 좌표점의 오차가 급격하게 줄어드는 것을 알 수 있다. 6회 정도의 subdivision을 통해 곡률과 좌표점의 상대오차가 10^{-4}정도에 도달함을 알 수 있었다. 그림 10.과 11.은 정확한 치수를 요구하는 CAD/CAE에 Loop subdivision과 Catmull-Clark subdivision이 적용될 수 있는 가능성을 보여주는 결과이다.

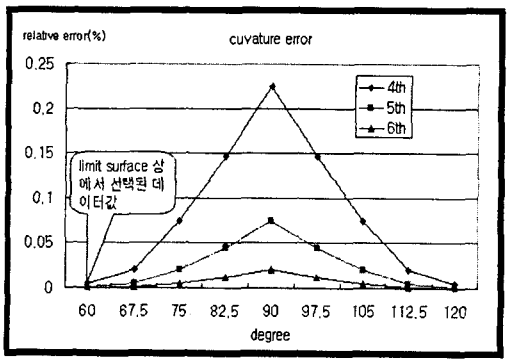


그림 10. Subdivision의 수행에 따른 실린더 곡률의 상대오차 변화

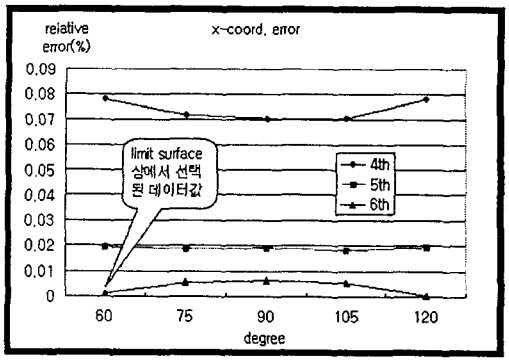


그림 11. Sundivision의 수행에 따른 실린더 좌표값의 상대오차 변화

3. 결 론

본 연구에서는 Loop Subdivision 방법에서 자유 곡면위에 있는 데이터 값을 가지고 곡면을 재구성 하였을 때, 일반적으로 피할 수 없게 되는 irregular 메쉬 subdivision 과정을 수행 하였다. 그리고 여러 종류의 곡면을 Loop 과 Catmull-Clark subdivision 방법에서 구현해보고 6번 정도의 subdivision 과정을 거쳐서 생성된 곡면이 실제 데이터 값의 10^{-4}의 오차 안으로 수렴된다는 것을 곡률(curvature)이나 좌표값의 위치에서 알 수 있었다. 이러한 방법으로 적은 양의 데이터 값으로 원하는 정확한 형상의 데이터 값들을 얻을 수 있게 된다.

그렇지만 곡면을 부드럽게 만들어주는 subdivision 과정에서 새로운 점이 생성되어서 삽입이 되어지더라도, 모델링 하는 곡면의 데이터 값들이 실제 데이터 값에 10^{-4}의 오차 안으로 수렴하지 않는 경우를 볼 수 있었다. 이런 경우는 곡률의 변화가 심한 경우에 일어나게 되는데, 이럴 때에는, subdivision 과정을 수행하기 전에 얻게 되는 초기의 데이터 값의 개수를 곡률의 변화가 심한 부분에 증가시켜서 subdivision 과정을 수행 하면, 해결할 수가 있다. 이와 같은 문제를 효과적으로 다루기 위해서는 앞에서도 언급하였듯이, adaptive refinement 기법이 요구되어지며, 이에 대한 연구는 현재 진행 중에 있다.

참고 문헌

1. Cirak, F., Ortiz, M., Schröder, P., *"Subdivision surface : a new paradigm for thin shell finite- element analysis,"*Internat J Number Methods Engrg, 2000, Vol. 47, pp. 2039-2072.

2. Cirak, F., Ortiz, M., *"Fully C^1-conforming subdivision element for finite deformation thin-shell anaysis,"* Internat J Number Methods Engrg, 2001, Vol. 51, pp. 813-833.6.

3. Cirak, F., Scott, M. J., Antonsson, E. K., Ortiz, M., Schröder, P., *"Integratedmodeling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision,"* Computer Aided Design, 2002, Vol. 34, pp. 137-148.

4. Zorin, D., Schröder, P., *"Subdivision for Modeling and Animation,"* SIGGRAPH 2000 Course Note.

5. Loop, C., *"Smooth subdivision for surfaces based on triangles,"* Master's thesis, University of Utah, 1987.

6. Catmull, E., Clark, J., *"Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes,"* Computer Aided Design, 1978, Vol. 10, No. 6, pp. 350-355.

7. Dyn, N., Levin, D., Grogory, J., *"A Butter Fly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control,"* ACM Transaction on Graphics, 1990, Vol. 9, No. pp. 160-169.

8. Doo, D., Sabin, M. A., *"Behavior of Recursive Subdivision Surfaces Near Extraordinary points,"* Computer Aided Design, 1978, Vol. 10, No. 6, pp. 356-360.

9. Peters, J., UmReif, G., *"Gaussian and mean curvature of subdivision surfaces,"* In Cipolla, R., Martin, R.(eds*)., "The mathematics of surfaces IX,"*IMA, 2000, pp. 59-69.

10. Peters, J., UmReif, G., *"Computing curvature bounds for bounded curvature subdivision,"* Computer Aied Geometric Design, 2002, Vol. 18, pp. 455-461.