

루프서브디비전 곡면을 이용한 일차전단 변형 쉘요소의 성능에 관한 연구

A Performance Study of First-order Shear Deformable shell Element Based on Loop Subdivision Surface

김형길* 조맹효**
Kim, Hyungkil Cho, Maenghyo

ABSTRACT

A first order shear deformable Loop-subdivision triangular element which can handle transverse shear deformation of moderately thick shell is developed. The developed element is general since it includes the effect of transverse shear deformation and has standard six degrees of freedom per node.(three translations and three rotations) The quartic box-spline function is employed as interpolation basis function. Numerical examples for the benchmark problems are analyzed in order to assess the performance of the newly developed subdivision shell element.Both in the uniform and in the distorted mesh configurations.

1. 서 론

셸 유한요소는 지난 30여년간 지속적으로 개발되어 왔으며 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 셸은 곡률을 가지는 얇은 구조물로서 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로는 셸 문제를 해석하는데 한계가 있다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 일반적으로 적용할 수 있는 도구이므로 셸 문제의 수치해석에 적합하다. 쉘요소의 요소경계에서 기울기의 연속조건을 만족시켜야 하는 번거로움 때문에 고전 셸 이론에 근거한 유한요소는 널리 쓰이지 않고 있고, 변위의 연속 조건만 만족시키면 되는 Mindlin/Reissner 타입의 셸 요소는 잠김(locking)현상이라는 수치 문제로 그 적용이 제한적이다. 최근 20여년간의 셸 요소 개발에 대한 연구는 locking을 방지하고 안정적인 선형/비선형 쉘요소를 개발하는데 초점이 맞추어져 왔다. 또한 Ahmad[1]등이 degenerated shell 요소를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선 좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 셸을 해석하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 degenerated shell 요소의 개발이 그 주종을 이루고 있다. 그러나 degenerated shell 요소는 요소 내에서의 기하학적인 셸의 형상을 근사를 통해 보간하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 셸을 효율적으로 해석하는데는 그 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적인 형상을 고려한 셸 이론에 근거한 유한요소의 개발이 Simo등에 의해 수행되었다.[2][3]

Cirak 등은 Loop의 subdivision 기법을 이용하여 곡면을 생성하고 곡면해석의 방법으로 고전 셸이론을 사용하여 곡면해석을 수행한바 있다.[4][5] 그러나 이 방법론은 고전 셸이론에 기초한 이론으로 공학적 설계에서 두께를 고려해야하는 비교적 두꺼운 셸 구조물이나 샌드위치 복합재료 적층 셸과 같이 횡전단 변형이 심한 셸 구조물에는 적용할 수 없고 아주 얇은 등방성 탄성 물체의 곡면에만 적용이 가능하므로 그 적용 범위에 한계가 있다. 그러므로 본 연구에서는 이러한 한계를 극복하기 위해 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단

* 서울대학교 기계항공공학부 석사과정

** 정희원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

변형 셸이론에 기초한 subdivision 유한요소를 개발하여 일반적인 곡면 구조물의 변형을 해석하는 도구를 확립한다. 먼저 곡면구현에 있어 Loop의 subdivision scheme을 사용하였다. Subdivision을 몇 단계 거치게 되면, 처음의 몇 개의 점들이 어떠한 위치로 수렴하게 된다. 이렇게 수렴되어서 구하게 되는 곡면이 극한곡면이다. 우리는 3-D스캐너나 B-spline으로 몇 점의 데이터를 얻게 된다. 그리고 이러한 데이터 값들은 우리가 원하는 극한곡면 위의 데이터 값이 된다. 따라서 몇 번의 subdivision 후 극한곡면에 근접하는 곡면을 얻어야하기 때문에 극한 데이터 값들로부터 그에 상응하는 초기 매쉬를 구하였다. 따라서 그 초기값을 가지고 subdivision을 통하여 정확한 극한곡면을 구현해 보았다. Cylinder, Hemisphere 등 여러 종류의 surface에서 여러 차례의 subdivision을 거치게 되면 좌표값과 곡률의 상대오차가 10^{-4} 이하의 정확한 극한곡면을 구현할 수 있었다. subdivision을 이용하여 실제곡면을 완성하고 이 곡면의 기하학적 형상을 이용하여 곡면의 강성행렬(stiffness matrix)을 만들 수 있다. 본 연구에서는 여러 가지 benchmark problem의 uniform mesh와 distorted mesh에 대한 해석결과를 제시하고자 한다.

2. 일반적인 셸 이론과 유한요소화

곡면 셸의 변형을 해석하는 것은 구조물의 강성, 강도, 안정성 등을 평가하는데 기본이 된다. 본연구의 해석 부분에서는 유한요소법을 사용하여 셸의 변형을 해석한다. 1차 전단변형 이론에 입각한 기하학적으로 정확한 셸이론에 기초하여 4차 box-스프라인 함수를 기저함수로 하는 셸 유한요소를 정식화하고 구현한다. Fig.1.은 Loop scheme의 삼각형 패치를 나타낸다.

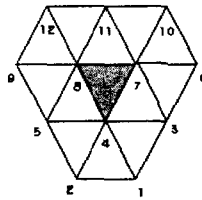


Fig.1. Loop scheme patch

루프 곡면의 표현식은 다음과 같다.

$$\bar{X}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{i=1}^{12} N^i(\theta^1, \theta^2) \bar{X}_i \quad (1)$$

선형 탄성 한계 내에서 변형을 미소변형으로 가정한다.

정식화를 위한 변형 전(\bar{R})과 변형 후(\bar{R}') 위치 벡터는 아래식과 같고 Fig.2.에 표시되어 있다.

$$\bar{R} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad -\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

$$\bar{R}' = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}'(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}'_3(\theta^1, \theta^2) \quad -\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2} \quad (3)$$

곡면의 면내 접선 벡터와 수직 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha} \quad \bar{a}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} \quad (4)$$

셸의 내부 점에서의 위치 벡터는 변형전에 \bar{g}_α 로 변형후에는 \bar{g}'_α 으로 주어진다.

$$\bar{g}_\alpha = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad \bar{g}_3 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^3} = \bar{a}_3 \quad (5)$$

$$\vec{g}'_\alpha = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^\alpha} = \vec{X}'_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \vec{a}'_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad \vec{g}'_3 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^3} = \vec{a}'_3 \quad (6)$$

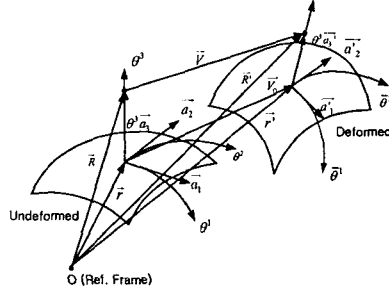


Fig.2. Shell 이론의 변위장

변위장은 1차 전단변형 이론에서 3개의 병진 변위와 3개의 회전 변위로 기술된다.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \hat{u}_1 \vec{e}_1 + \hat{u}_2 \vec{e}_2 + \hat{u}_3 \vec{e}_3 \\ \vec{\phi} &= \hat{\phi}_1 \vec{e}_1 + \hat{\phi}_2 \vec{e}_2 + \hat{\phi}_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 \vec{e}_i 는 전체 직교좌표계의 단위벡터이다.

변형률은 인장($\epsilon_{\alpha\beta}$), 굽힘($\omega_{\alpha\beta}$), 전단(γ_α) 변형률로 기술되어진다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{a}'_\alpha \cdot \vec{u}'_\beta + \vec{a}'_\beta \cdot \vec{u}'_\alpha) \quad (8)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\vec{\phi}'_\beta \cdot \vec{a}'_\alpha - \vec{u}'_\alpha \cdot \vec{a}'_{3,\beta} \quad (9)$$

$$\gamma_\alpha = \vec{a}'_\alpha \cdot \vec{\phi}' + \vec{u}'_\alpha \cdot \vec{a}'_3 \quad (10)$$

위 식을 바탕으로 각 요소에 대한 요소강성행렬을 구할 수 있다. 각각의 요소의 강성행렬을 구할 때 셸의 잠김 현상을 감안하여 전단변형강성행렬 가우스 적분의 경우는 1점 적분을, 인장강성행렬 가우스 적분의 경우는 1점 적분을, 굽힘강성행렬 가우스 적분의 경우는 3점 적분을 사용하였다.

적분점의 수에 대한 표시는 다음과 같다.

$$131 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ point integral for membrane part} \\ 3 \text{ points integral for bending part} \\ 1 \text{ point integral for shear part} \end{array} \right. \quad (11)$$

그러나 전체직교좌표계의 절점자유도를 사용하는 경우에는 경계조건을 부여하기에 불편하다.(Fig.3.), 따라서 경계 조건적용의 편리를 위하여 국지좌표계로 바꾸어주는 연산을 수행함으로써 전역 좌표계의 전역강성행렬의 변환연산을 통하여 국지 좌표계의 국소강성행렬로 바뀌어지게 된다. 따라서 국지 좌표계로 바뀌어진 국소강성 행렬에 경계조건을 부여하여 해석을 수행한다.

절점 변위를 전역 직교좌표계에서 기술하면 임의형상의 메시에 대해 변위를 표시할 수 있으므로 국지좌표계에서 전역 좌표계로 절점 변위를 변환한다.

$$\vec{d}_{Global} = A \vec{d}_{local} \quad (12)$$

$$\text{여기서} \begin{cases} \bar{\vec{d}} : \text{Global 좌표계의 절점미지벡터} \\ \vec{d} : \text{local 좌표계의 절점미지벡터} \\ \underline{A} : \text{Transformation matrix} \end{cases}$$

전역, 국지 좌표계에서 표현된 절점 변위 벡터는

$$\bar{\vec{d}}_{Global} = \hat{u}_1 \bar{e}_1 + \hat{u}_2 \bar{e}_2 + \hat{u}_3 \bar{e}_3 \quad (13)$$

$$\vec{d}_{local} = u^1 \bar{a}_1 + u^2 \bar{a}_2 + u^3 \bar{a}_3 \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix}_{local} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{Bmatrix}_{local} \quad (16)$$

$$\underline{K}_L = \underline{A}^T \underline{K}_G \underline{A} \quad (17)$$

$$\text{여기서} \underline{A} = \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

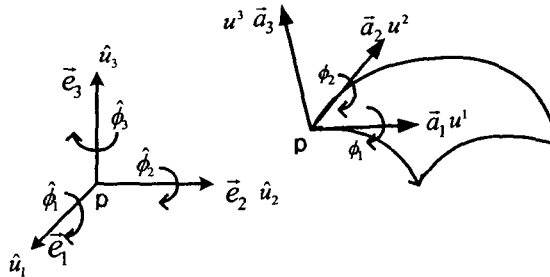


Fig.3. 국지 좌표계와 전역 좌표계에서의 변위

임의의 형상에 대하여 루프서브디비전 기법을 이용하여 메쉬형성을 할 경우 Fig.4.에서와 같이 valence가 6이 아닌 특이점을 포함하는 경우가 있다. 이 경우에는 적분하고자 하는 영역의 적분점이 포함될 때까지 (19)식에서 k번 서브디비전 과정을 거친다. k번 서브디비전과정을 거친 후에는 특이점을 포함하는 삼각형의 일부영역에 대하여 매개변수변환과정을 거치게 된다. 식(20)은 매개변수변환과정을 나타낸 식이다.[5] 따라서, 이와 같이 특이점을 포함한 영역에서도 매개변수변환을 통해 요소강성행렬을 구하는데 필요한 값들을 (21)식과 (22)식처럼 구한 다음 특이점 주위의 요소강성행렬을 조립하고 경계조건을 부과하여 해석한다.

$$\bar{X} = A^k \bar{X}_0 \quad (19)$$

$$\text{삼각형 1: } \bar{\theta}^1 = 2^k \theta^1 - 1, \quad \bar{\theta}^2 = 2^k \theta^2$$

$$\text{삼각형 2: } \bar{\theta}^1 = 1 - 2^k \theta^1, \quad \bar{\theta}^2 = 1 - 2^k \theta^2$$

$$\text{삼각형 3: } \bar{\theta}^1 = 2^k \theta^1, \quad \bar{\theta}^2 = 2^k \theta^2 - 1 \quad (20)$$

$$\bar{X}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{I=1}^{12} N^I(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) P_I A \bar{X}_0 \quad (21)$$

$$\bar{a}_\alpha(\theta^1, \theta^2) = -2 \sum_{I=1}^{12} N^I_\alpha(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) P_I A \bar{X}_0 \quad (22)$$

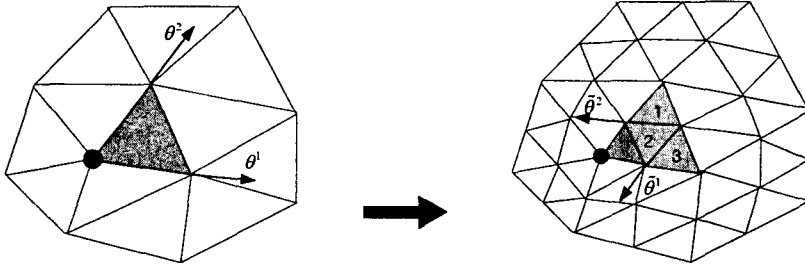


Fig.4. 특이점을 포함하는 메쉬에 대한 서브디비전 곡면해석

3. 해석결과

현재까지 보고된 다양한 benchmark 문제들의 대표적인 예제들에 대해 성능을 시험한다. 자세한 수치조건 및 하중조건들은 참고문헌[6]에 주어져 있다.

3.1 원통형 셸에 집중하중이 가해지는 문제

Fig.5.에 물체의 기하조건이 도시되어 있다. Fig.6.에 균일메쉬에 대한 변위수렴곡선을 도시하였다. 전체 실린더 모델을 사용하지 않고 1/8실린더 모델을 사용하여 경계조건을 부여하여 해석하였다. Fig.6.에서 요소의 수가 증가함에 따라 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다. Fig.6.에서 FSDLE는 First Order Shear Deformable Loop Subdivision Shell Element를 나타낸다.

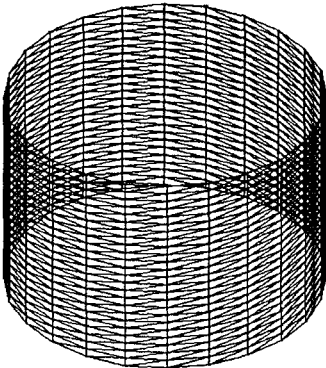


Fig.5. Pinched Cylinder

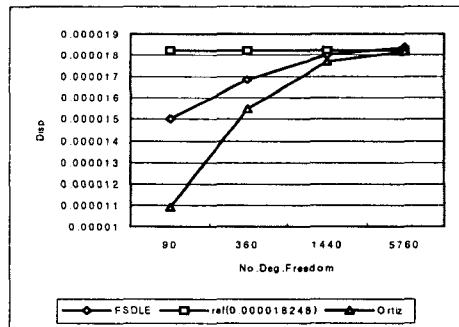


Fig.6. 1/8 cylinder 변위수렴곡선(균일메쉬)

Fig.7.와 Fig.8.에서는 불균일 원통형 셸의 기하형상과 변위수렴곡선을 나타내어 균일메쉬의 수렴성과 비교하였다. 불균일메쉬의 수렴성이 균일메쉬에 비해 떨어짐을 알 수 있다.

$$1st\ subdivision\ DOF : (3 \times 6) \times 5 = 90$$

$$2nd\ subdivision\ DOF : (3 \times 6) \times 2^2 \times 5 = 360$$

$$3rd\ subdivision\ DOF : (3 \times 6) \times 2^4 \times 5 = 1440$$

$$4th\ subdivision\ DOF : (3 \times 6) \times 2^8 \times 5 = 5760$$

(23)

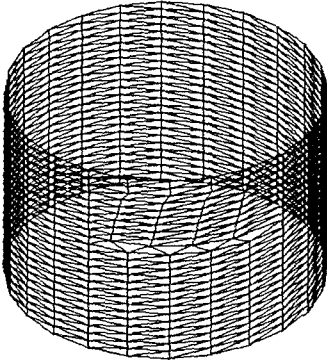


Fig.7. Distorted Pinched Cylinder

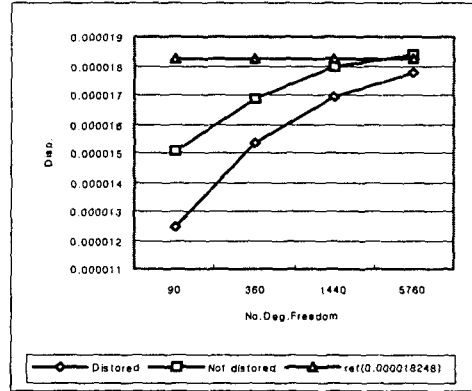


Fig.8. 균일 메쉬와 불균일 메쉬에서의 cylinder 변위수렴비교

3.2. 구형 셸에 집중하중이 가해지는 문제

문제에 대한 기하형상은 Fig.9.에 주어져있다. 균일메쉬에 대한 요소의 해석결과와 수렴성은 Fig.10.에 도시하였다. Fig.9.에서 FSDLE는 First order Shear Deformable Loop Subdivision Shell Element를, BD는 Bathe-Dvorkin을 나타내며 ST는 Stander et al(1989)를 나타낸다. 전체모델을 사용하지 않고 1/4 hemisphere모델만을 사용하여 해석을 수행하였다.

$$1st\ subdivision\ DOF : (4 \times 8) \times 5 = 160$$

$$2nd\ subdivision\ DOF : (4 \times 8) \times 5 \times 2^2 = 640$$

$$3rd\ subdivision\ DOF : (4 \times 8) \times 5 \times 2^4 = 2560$$

$$4th\ subdivision\ DOF : (4 \times 8) \times 5 \times 2^8 = 10240$$

(24)

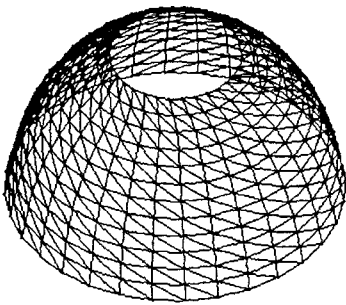


Fig.9. Pinched hemisphere with 18 deg cutout

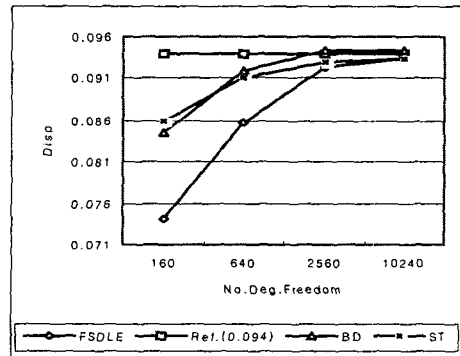


Fig.10. Pinched hemisphere 균일메쉬 변위수렴곡선

Fig.10.와 Fig.11.에서는 불균일 hemisphere메쉬의 기하학적 형상과 수렴성을 나타내었다. 요소의 수가 증가함에 따라 수렴하고 있으나 수렴속도는 균일메쉬보다 느리게 나타났다.

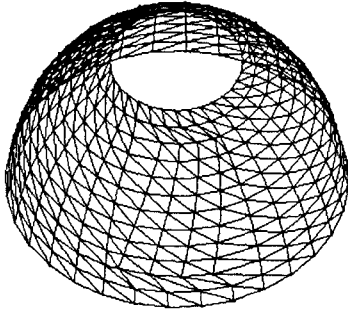


Fig.11. Pinched hemisphere with 18 deg cutout

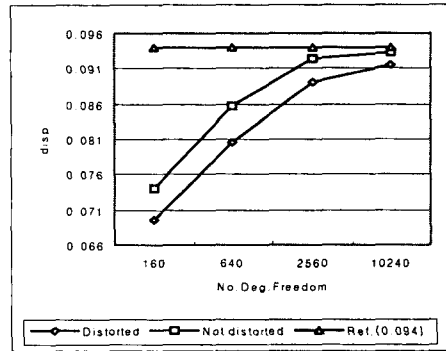


Fig.12. 균일메쉬와 불균일메쉬에서의 변위수렴곡선

Fig.13.에서 보여진 바와 같이 두께비가 작아짐에 따라 전단변형강성행렬에 의한 잠김현상이 나타남을 알 수 있다. 전단변형강성행렬을 감차적분을 함으로써 잠김현상을 막을 수 있다. Fig.13.에서 주어진 기호에 대한 설명은 아래에 주어진다. 전단변형부를 1점 적분함으로써 잠김현상을 대폭 줄일 수 있다.

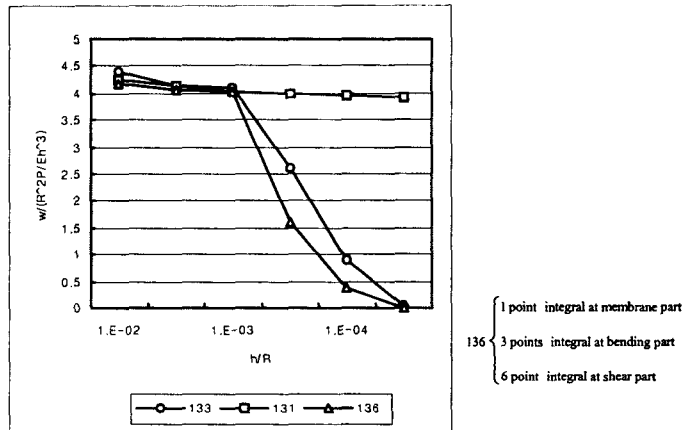


Fig.13. hemisphere의 두께비 변화에 따른 수렴성

4. 결 론

본 연구에서는 Loop 서브디비전 곡면을 이용한 쉘의 유한요소를 개발하였고 해석을 수행하여 해석 결과를 제시하였다. 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘이론에 기초한 subdivision 유한요소가 일반적인 곡면 구조물의 변형을 기술하기 위한 표준 subdivision 곡면요소로 개발되었으며 여러 benchmark 문제에 대한 성능 평가를 수행하였고 만족할 만한 수렴성과 효율성을 보여주었다.

본 연구의 방법론은 고전 쉘이론에 기초한 유한요소에 비해 C°조건만 요구되므로 구현하기 편리하며

경계조건을 부가하는데 특히 이득이 있다. 본 연구에서 개발된 Loop 서브디비전 쉘요소는 멀티 해상도를 가지는 곡면의 해석과 설계에 필요한 강력한 도구가 될 것으로 기대한다.

참고 문헌

1. Ahmad,S.,Iron,B., and Zienkiewicz,O., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419-451
2. Simo,J.C.and Fox,D.D., "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, 1989, pp.267-304
3. Simo,J.C.and Fox,D.D.,and Rifai,S., "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory ; Computational Aspects," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.73, 1989, pp.53-92
4. Cirak,F.,Ortiz,M.,and Schroder,P., "Subdivision surfaces : a new paradigm for thin-shell finite-element analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 47, 2000, pp.2039-2072
5. Cirak,F.,Ortiz,M., "Fully C¹-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 51, 2001, pp.813-833
6. Maenghyo Cho, Hee Yuel Roh, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates", *International Journal for numerical methods in engineering*, 2003, Vol.56, No.1, pp.81-115