

# 압전감지기와 압전작동기를 이용한 보구조물의 자유진동제어에 대한 유한요소 모형화

## Finite Element Modeling for Free Vibration Control of Beam Structures using Piezoelectric Sensors and Actuators

송 명 관\*                      한 인 선\*\*                      김 선 훈\*\*\*                      최 창 근\*\*\*\*  
Song, Myung-Kwan              Han, In-Seon                      Kim, Sun-Hoon                      Choi, Chang-Koon

### ABSTRACT

In this study, the method of the finite element modeling for free vibration control of beam-type smart structures with bonded plate-type piezoelectric sensors and actuators is proposed. Constitutive equations for the direct piezoelectric effect and converse piezoelectric effect of piezoelectric materials are considered. By using the variational principle, the equations of motion for the smart beam finite element are derived. The proposed 2-node beam finite element is an isoparametric element based on Timoshenko beam theory. Therefore, by analyzing beam-type smart structures with smart beam finite elements, it is possible to simulate the control of the structural behavior by applying voltages to piezoelectric actuators and monitoring of the structural behavior by sensing voltages of piezoelectric sensors. By using the smart beam finite element and constant-gain feed back control scheme, the formulation of the free vibration control for the beam structures with bonded plate-type piezoelectric sensors and actuators is proposed.

### 1. 서 론

압전재료가 대표적인 스마트 재료인데, 힘을 받아서 변형률이 발생하였을 경우, 압전재료 표면에 전하가 발생하며, 이를 직접 압전효과(direct piezoelectric effect)라고 한다. 그리고, 압전재료에 전기장이 가해질 경우, 압전재료 내에 변형률이 발생하게 되는데, 이를 역압전효과(converse piezoelectric effect)라고 한다. 이러한 직접압전효과와 역압전효과는 전기에너지와 기계에너지 사이의 변환기구(transduction mechanism)를 정의한다. 이러한 압전효과는 natural quartz crystals, polycrystalline piezoceramic, semicrystalline polyvinylidene polymer, 사람의 뼈와 같은 많은 재료들에서 관측되었으며, 기계적인 재료로서의 스마트

\* ㈜유신코퍼레이션 구조연구실, 과장 · 공학박사

\*\* 한국과학기술원 건설및환경공학과, 박사과정

\*\*\* 정회원 · 영동대학교 건설공학부 토목공학과, 부교수

\*\*\*\* 정회원 · 한국과학기술원 건설및환경공학과, 석좌교수

재료로서는 lead zirconate titanate(PZT), polyvinylidene fluoride(PVDF)가 주로 사용된다<sup>(1)</sup>.

사회기반 시설을 구축하는 다양한 토목·건축 분야의 주요 구조 부재에 이러한 재료를 이용한 스마트 구조물(smart structure)과 같은 지적 구조시스템을 도입함으로써, 지진이나 태풍 등의 자연 재해와 예지하기 곤란한 재해에 대한 생명, 재산 보전 등의 안정성 향상이 크게 기대되고 있다. 토목·건축 분야에서는 파괴 예지 센서로서 건전성 모니터링(health monitoring)의 기능이 실현될 수 있다면, 상기의 안정성 향상뿐만 아니라 내구성이나 노후화 점검에도 유효하여 구조물의 장수명에 따른 라이프사이클코스트 저감에 큰 효과를 볼 수 있다. 특히, 직접 육안 조사하기 어려운 기둥이나 보의 접합부, 지중·수중 구조물 등 비파괴로 검사하기 어려운 경우나 원자로 등 인간이 접근할 수 없는 구조물에는 매우 필요하다고 볼 수 있다.

이러한 스마트 구조물의 건설을 위해서는 역학적인 거동에 관한 정확한 수치적인 자료를 확보해야 하는 데, 이를 위해서는 직접적인 실험 또는 정확한 수치해석의 개발이 필요하다. 토목·건축 구조물의 거동의 해석에 있어서 주로 사용하는 수치해석 방법으로 유한요소해석 방법이 주로 사용된다. 기존에 개발된 여러 가지 유한요소들 중에서 토목·건축 구조물의 해석에 있어서는 보유한요소가 가장 많이 사용된다. 따라서, 보형태의 스마트 구조물의 해석을 위해서는 스마트 보유한요소의 개발이 필요하다.

이와 같은 기존의 연구들에 있어서 난해한 정식화 과정을 통하여 스마트 보유한요소(smart beam finite element)가 제안되었음에도 불구하고 해석결과에 있어서는 그 만큼의 정확성과 효율성에 있어서 개선이 이루어지지 않았다. 기존의 보구조물의 유한요소해석에 사용되어 오고 있는 등매개변수 Timoshenko 보유한요소의 정식화 방법은 명확하고 간결하며, 해석결과에의 정확성은 이미 검증된 바 있다<sup>(2)</sup>. 이러한 Timoshenko 보유한요소의 정식화 방법을 이용한 압전작동기와 압전감지기의 유한요소 모형화 방법이 제안된다면 보형태의 스마트구조물의 정확하고 효율적인 유한요소해석이 가능할 것이다. 따라서, 본 연구에서는 판형태의 압전감지기(piezoelectric sensor)와 압전작동기(piezoelectric actuator)가 접착되어 있는 보형태의 스마트구조물의 유한요소 모형화를 위한 2 절점 스마트 보유한요소를 제안하고, 이러한 스마트 보유한요소를 이용한 보구조물의 자유진동제어의 유한요소 모형화 방법에 대한 정식화를 제안한다.

## 2. 스마트 보유한요소 정식화

그림 1와 같이 보형태의 구조물에 압전재료를 부착하면, 압전작동기와 압전감지기의 기능을 수행할 수 있게 된다. 상부에 부착된 작동기는 압전재료의 역압전효과를 이용하여 전압을 가해주면 부착된 구조물에 하중을 전달하게 된다. 그리고, 하부에 부착된 감지기는 압전재료의 직접압전효과를 이용하여 외부하중에 의해 내부에 변형률이 생기면 전기장을 발생하게 된다. 이러한 압전감지기와 압전작동기가 부착된 보형태의 구조물의 유한요소 모형화를 위한 스마트 보유한요소를 정식화 한다.<sup>(3)</sup>

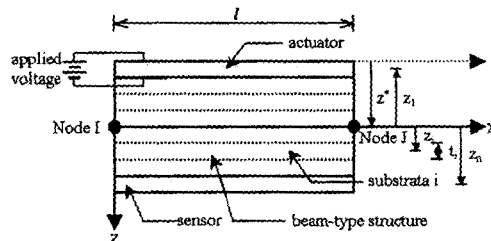


그림 1. 스마트 보유한요소(smart beam finite element)의 형태

### 3. 운동방정식의 유도

#### 3.1 전기장-전위 관계

압전작동기와 압전감지기에 대해서 전기장-전위 관계는 다음과 같다<sup>(3),(5),(6),(8)</sup>.

$$e_z^I = -\frac{\partial \phi_I}{\partial z} = \langle \mathbf{B}_p^I \rangle \{ \phi_I \} ; \quad e_z^n = -\frac{\partial \phi_n}{\partial z} = \langle \mathbf{B}_p^n \rangle \{ \phi_n \} \quad (1)$$

#### 3.2 전기작동벡터(electrical actuating vector)

그림 3에서와 같이 압전작동기의 표면에 작용되는 분포 전하 밀도(distributed applied charge density),  $\bar{\sigma}$ 를 전압(voltage, difference of electric potential)으로 표현하기 위하여 압전작동기에 분포하는 전위(electric potential)의 분포를 명기하여야 한다<sup>(6),(9)</sup>. 작용분포전하밀도(applied surface charge density)를 작용전압으로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\mu_z^s}{t_1} \left\{ \phi_1 \left( x, y, z_1 - \frac{t_1}{2} \right) - \phi_1 \left( x, y, z_1 + \frac{t_1}{2} \right) \right\} = \frac{\mu_z^s}{t_1} \cdot \text{Voltage} \quad (2)$$

따라서, 이를 사용하여 전기작동벡터(electrical actuating vector)를 구성할 수 있다.

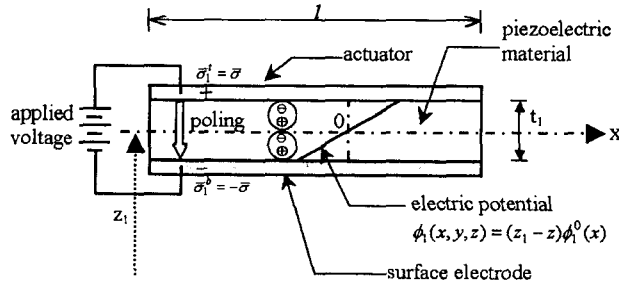


그림 2. 작용전압에 의한 전기작동모델(electric actuating model)

#### 3.3 운동방정식

변분원리를 이용하여 최종적으로 다음과 같은 운동방정식이 구성된다.

$$[\mathbf{M}^*] \{ \ddot{\mathbf{u}} \} + ([\mathbf{K}_f] + [\mathbf{K}_s]) \{ \mathbf{u} \} - [\mathbf{K}_{p11}] \{ \phi_I \} - [\mathbf{K}_{pn1}] \{ \phi_n \} = \{ \mathbf{P} \} \quad (3)$$

$$[\mathbf{K}_{p11}]^T \{ \mathbf{u} \} + [\mathbf{K}_{p12}] \{ \phi_I \} = \{ \mathbf{Q}_I \} \quad (4)$$

$$[\mathbf{K}_{pn1}]^T \{ \mathbf{u} \} + [\mathbf{K}_{pn2}] \{ \phi_n \} = \{ \mathbf{0} \} \quad (5)$$

식 (3), (4), (5)에서 정적응축(static condensation) 과정을 통하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{M}^*] \{ \ddot{\mathbf{u}} \} + [\mathbf{K}^*] \{ \mathbf{u} \} = \{ \mathbf{P}^* \} \quad (6)$$

여기서,

$$[K^*] = [K_f] + [K_s] + [K_{p11}][K_{p12}]^{-1}[K_{p11}]^T + [K_{pn1}][K_{pn2}]^{-1}[K_{pn1}]^T ; \{P^*\} = \{P\} + [K_{p11}][K_{p12}]^{-1}\{Q\} \quad (7)$$

### 3.4 전압의 해석

위의 식 (4)과 (5)을 이용하여 압전작동기와 압전감지기에서의 발생전압을 다음과 같이 해석할 수 있다. 식 (4)과 (5)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\{\phi_f\} = [K_{p12}]^{-1}(\{Q_f\} - [K_{p11}]^T \{u\}) ; \{\phi_n\} = -[K_{pn2}]^{-1}[K_{pn1}]^T \{u\} \quad (8)$$

따라서, 변위에 대한 해석결과를 이용하여 다음 식 (9)에 의해 압전작동기와 압전감지기의 두 절점에서의 발생전압을 해석할 수 있다.

$$\{V_f\} = t_f \{\phi_f\} ; \{V_n\} = t_n \{\phi_n\} \quad (9)$$

## 4. 자유진동제어 기법 : Constant-gain feedback control 기법

압전작동기와 압전감지기가 부착된 보구조물의 구조형식은 그림 3 과 같이 주구조물인 보구조물과 윗면과 아랫면에 부착되어 압전작동기와 압전감지기의 역할을 수행하는 압전기구(piezoelectric devices)로 구성된다. 보구조물이 진동함에 따라 압전감지기에서는 전압이 발생하게 되며, 이러한 전압은 증폭되어 압전작동기에 피드백(feedback)된다. 보구조물에 있어서 상향 연직변위가 발생할 경우, 압전감지기에서는 인장변형률이 발생하며, 이로 인하여 압전감지기에 피드백되는 전압은 압전작동기에서 인장변형률을 발생시키므로, 결과적으로 보구조물의 진동을 억제하는 효과를 발생하게 된다.

보구조물의 자유진동제어의 구현을 위해서는 적절한 능동제어 알고리즘의 적용이 필요하게 된다. 이러한 피드백 전압에 의한 제어력(control force)은 보구조물의 감쇠를 향상시켜 주어 진동을 억제하게 된다. 제어력은 구조물에 발생하는 변위의 속도에 비례하도록 선정될 수 있다. 이전에 Constant-gain feed back control 기법이라든지 Constant-amplitude feed back control 기법 등이 제안되며, 본 연구에서는 Constant-gain feed back control 기법을 적용한다(그림 4).

식(8)에서와 같이 스마트 보유한요소에 작용하는 하중항은 두 가지 하중항, 외부하중항과 전기하중항으로 구분된다. 여기서, 전기하중항이 스마트 보구조물을 능동제어하기 위한 피드백 전기하중항의 역할을 할 수 있다.

식(8)의 전기하중항의 개념과 유사하게 제어 전기하중항을 표현하면 다음과 같다.

$$\{P^e\} = -[K_{p11}][K_{p12}]^{-1}\{Q^e\} \quad (10)$$

여기서,  $\{P^e\}$ 는 피드백 전기하중항,  $\{Q^e\}$ 는 압전감지기로부터 측정된 전압으로부터 산정된 전기작동 벡터이다.

음속도 피드백 제어 이론(negative velocity feedback control law)을 이용하여 피드백되는 전기작동 벡터는  $\{Q^e\}$ 는 다음과 같이 산정된다.

$$\{Q^e\} = -G \cdot \left( \mu_z^s \cdot b_1 \cdot \frac{L}{2} \right) \{\dot{Q}_n\} = G \cdot t_n \cdot \left( \mu_z^s \cdot b_1 \cdot \frac{L}{2} \right) \left( \mu_z^s \cdot b_n \cdot \frac{L}{2} \right) [K_{pn2}]^{-1} [K_{pn1}]^T \{\dot{u}\} \quad (11)$$

여기서,  $G$  는 피드백 게인(feedback gain)이며 상수(constant value)이므로, Constant-gain feedback control 기법이라고 한다.

따라서, 식(10)과 (11)로부터 제어 전기하중항은 다음과 같이 산정된다.

$$\{P^e\} = -G \cdot t_n \cdot \left( \mu_z^s \cdot b_1 \cdot \frac{L}{2} \right) \left( \mu_z^s \cdot b_n \cdot \frac{L}{2} \right) [K_{p11}] [K_{p12}]^{-1} [K_{pn2}]^{-1} [K_{pn1}]^T \{\dot{u}\} \quad (12)$$

식(12)를 식(7)에 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$[M^*] \{\ddot{u}\} + [C^*] \{\dot{u}\} + [K^*] \{u\} = \{P\} \quad (13)$$

여기서,

$$[C^*] = G \cdot t_n \cdot \left( \mu_z^s \cdot b_1 \cdot \frac{L}{2} \right) \left( \mu_z^s \cdot b_n \cdot \frac{L}{2} \right) [K_{p11}] [K_{p12}]^{-1} [K_{pn2}]^{-1} [K_{pn1}]^T \quad (14)$$

따라서, 음속도 피드백 제어 이론(negative velocity feedback control law)을 적용한 스마트 보구조물의 운동방정식은 식(9)를 수정하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C + C^e] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (15)$$

여기서,  $[C^e]$  는 제어력에 의해 구조물의 향상된 감쇠효과를 나타낸다.

위의 식(15)을 해석하여 스마트구조물의 변위, 속도, 가속도에 대한 해석결과를 얻을 수 있다.

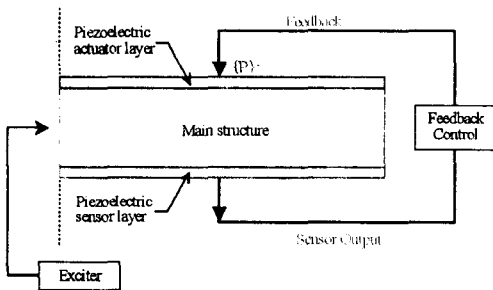


그림 3. 능동제어 보구조물의 구현

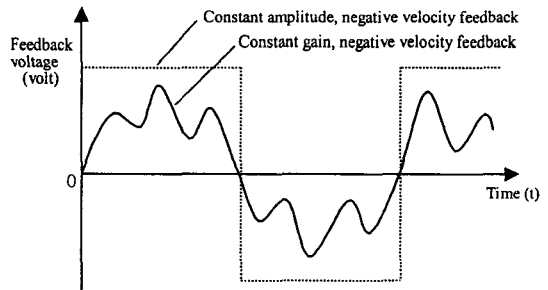


그림 4. 피드백 전압 산정을 위한 알고리즘

## 5. 예제해석

해석대상이 되는 보구조물의 단면은 그림 5 와 같다. 그리고, 보구조물은 단경간 보구조물(40m)과 3 경간 연속 보구조물이며(3@25m), 전경간에서의 교량의 단면은 일정하다고 가정하였다. 압전작동기와 압전감지기는 PZT 로 제작되었으며, 단면특성치 및 재료물성치는 표 1 와 같다. 그림 6 과 같이 단경간 보구조물은 40 개의 스마트 보유한요소로 모형화 하였으며, 3 경간 연속 보구조물은 46 개의 스마트 보유한요소로 모형화 하였다.

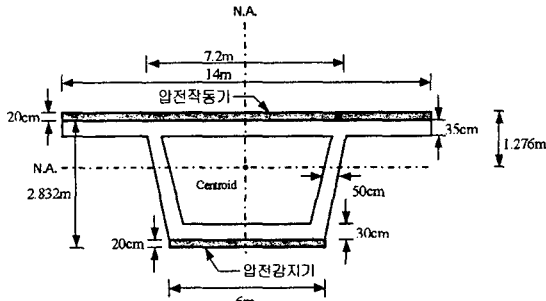


그림 5. 압전작동기와 압전감지기의 배치단면

표 1. 보구조물 단면특성치 및 재료물성치

단면적( $A, m^2$ )	5.922	
관성모멘트( $I, m^4$ )	17.157	
재료	콘크리트	PZT
$E(N/m^2)$	$3.532 \times 10^{10}$	$6.3 \times 10^{10}$
$\nu$	0.2	0.3
$\mu_z^s (F/m)$	-	$1.3 \times 10^{-8}$
$\rho (kg/m^3)$	4812	7600
$d_{31} (m/V)$	-	$1.9 \times 10^{-10}$
감쇠비(%)	5	

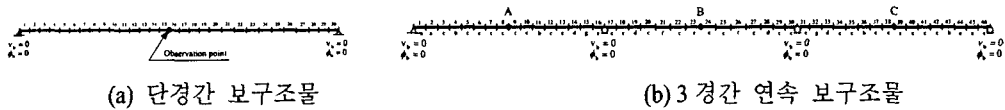


그림 6. 보구조물의 유한요소 모형화

### (1) 단경간 보구조물

경간 중앙점에서의 초기회전변위 1.0 을 주어서 교량의 자유진동을 유발시킨다. Gain 을 4000 까지 변화시키면서 자유진동에 의한 연직변위의 변화를 살펴본다. 그림 7 에서 보이는 바와 같이 Gain 이 4000 일 때, 경간 중앙점의 연직변위가 현저히 작아진 값으로 제어되고 있음을 알 수 있다. 이러한 연직변위의 제어는 압전작동기에 전압이 작용하여 전기하중이 제어력으로 작용한 결과이며, 이러한 제어력은 전기작동 휨모멘트로서 그림 8 에 보여지고 있다. 진동이 저감됨에 따라서 초기의 제어력은 점점 감소하고 있음을 알 수 있다. 그림 9 에서는 이러한 사실을 더 명확히 확인할 수 있는데, Gain 이 증가함으로 인하여 연직변위의 진동성분이 현저히 감소함을 확인할 수 있다.

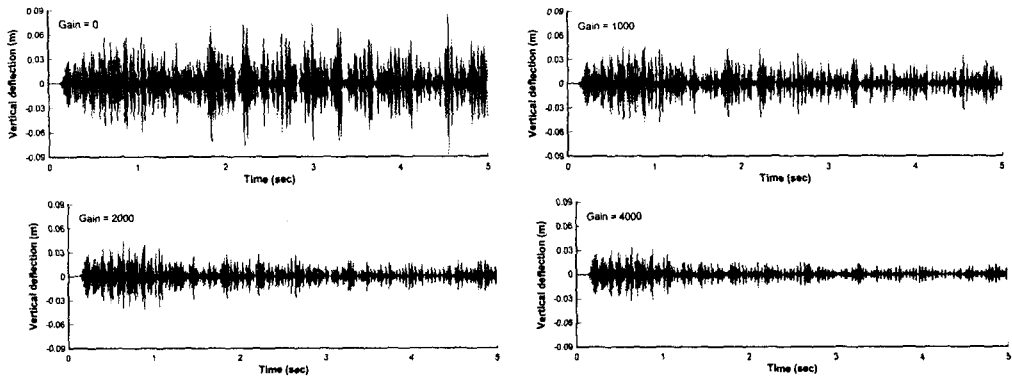


그림 7. 경간 중앙점의 연직변위의 제어

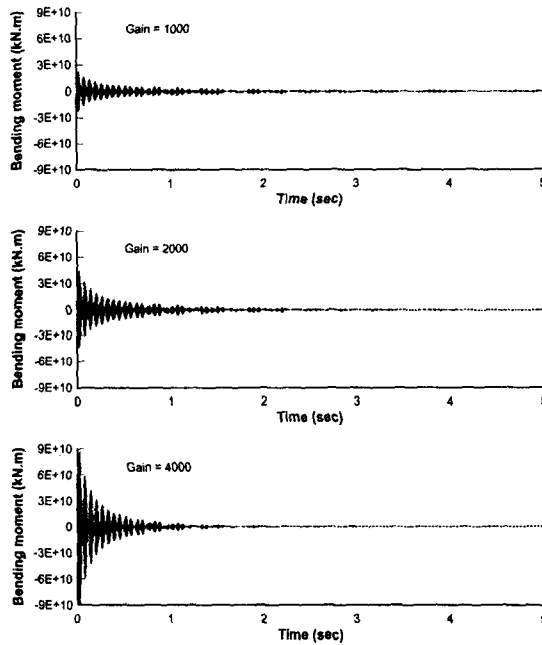


그림 8. 경간 중앙점의 전기작동 휨모멘트

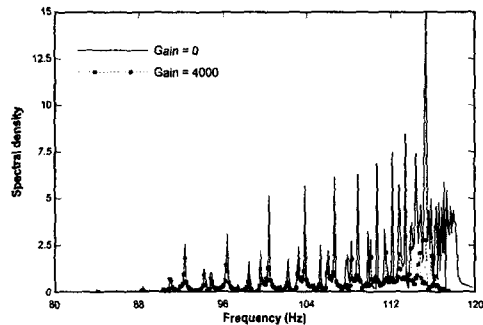


그림 9. 경간 중앙점의 연직변위의 진동성분(단경간)

### (2) 3 구간 연속 보구조물

중앙경간 중앙점에서의 초기회전변위 1.0 을 주어서 교량의 자유진동을 유발시킨다. Gain 을 2000 까지 변화시키면서 자유진동에 의한 연직변위의 변화를 살펴본다. 그림 10 과 11 에서 보이는 바와 같이 Gain 이 2000 일 때, 각 경간의 중앙점의 연직변위가 현저히 작아진 값으로 제어되고 있음을 알 수 있다. 이러한 진동의 저감은 그림 12 과 13 에서와 같은 전기작동 휨모멘트가 제어력으로 교량 구조물에 가해지기 때문이다. 그림 14 에서는 이러한 사실을 더 명확히 확인할 수 있는데, Gain 이 증가함으로 인하여 연직변위의 진동성분이 현저히 감소함을 확인할 수 있다.

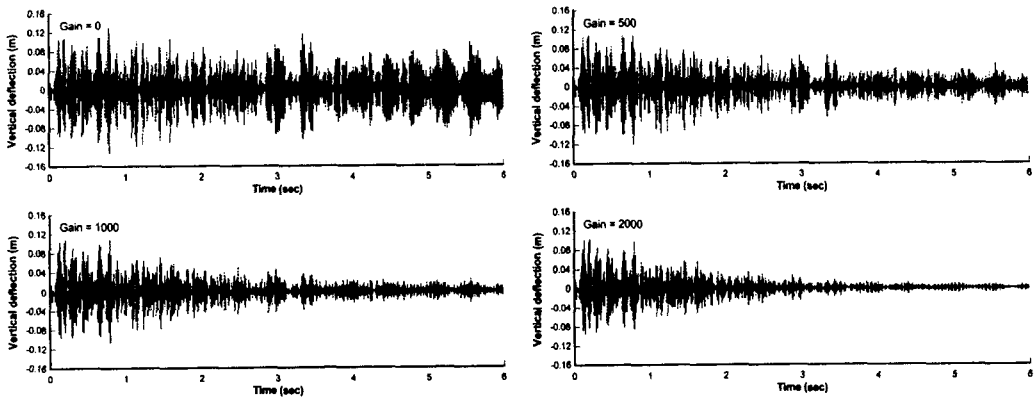


그림 10. 첫번째 경간 중앙점(A 점)의 연직변위의 제어

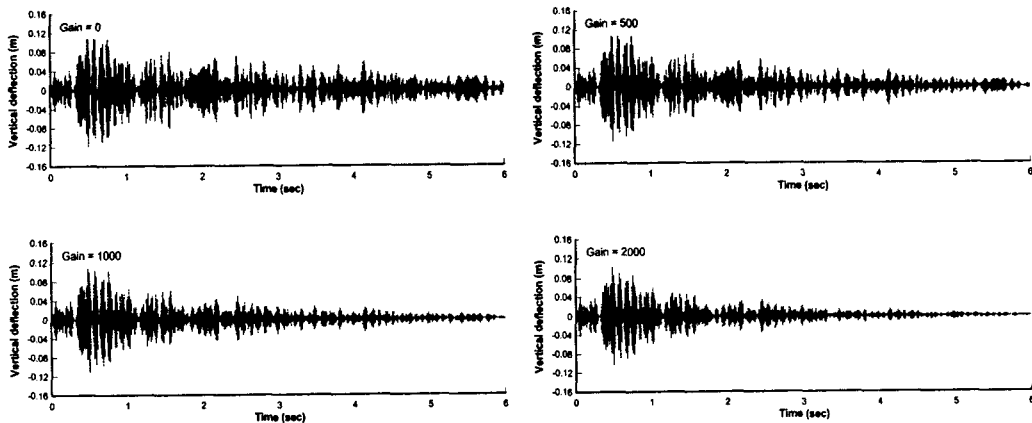


그림 11. 중앙경간 중앙점(B 점)의 연직변위의 제어



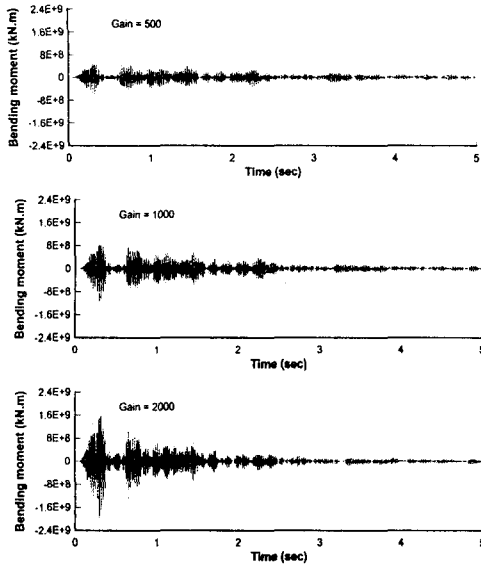


그림 12. 첫번째 경간 중앙점(A 점)의 전기작동 휨모멘트

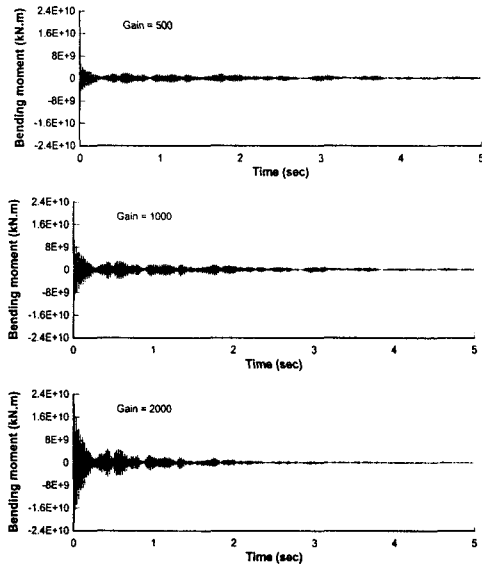
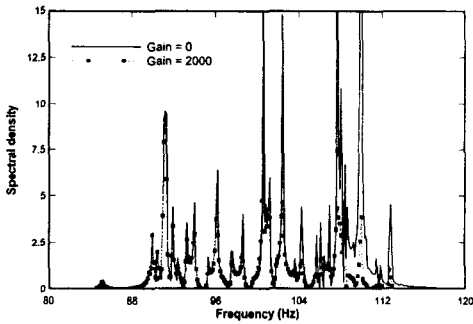
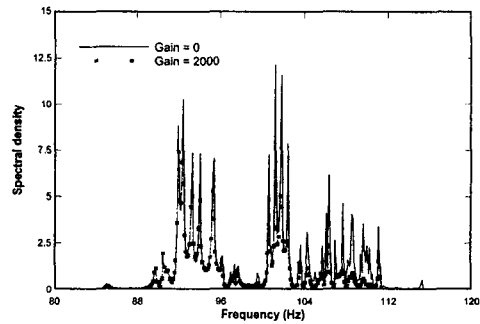


그림 13. 중앙경간 중앙점(B 점)의 전기작동 휨모멘트



(a) 첫번째 경간 중앙점(A 점)



(b) 중앙경간 중앙점(B 점)

그림 14. 경간 중앙점의 연직변위의 진동성분(3 경간연속)

## 6. 결 론

본 연구에서는 Timoshenko 보이론을 바탕으로 하여 압전감지기와 압전작동기의 유한요소 모형화가 가능한 스마트 보유한요소를 제안하였다. 따라서, 스마트 보유한요소에 의한 스마트 구조물의 해석을 통하여 압전작동기에서의 작용전압에 의한 구조물의 제어, 압전감지기에서의 발생전압의 감지에 대한 시뮬레이션이 가능하다. 향후 압전감지기에 의해 감지된 전압을 이용한 압전작동기의 작용전압 산정을 위한 알고리즘을 이용하여 스마트 보구조물의 수치실험이 가능할 것이다.

## 감사의 글

본 연구는 KAIST 의 스마트 사회기반구조 기술센터(SISTEC) 사업에 의해 수행된 연구로서 본 연구를 지원해 준 한국과학기술재단에 깊은 감사를 드립니다.

## 참고 문헌

1. Clark, R.L., Saunders, W.R. and Gibbs, G.P. (1998), *Adaptive Structures: Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, Canada
2. Owen, D.R.J. and Hinton, E. (1980), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, UK
3. Lin, C.C. and Huang, H.N. (1999), "Vibration Control of Beam-plates with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators", *Computers & Structures*, Vol.73, No.1-5, pp.239~248
4. Allik, H. and Hughes, T.J.R. (1970), "Finite Element Method for Piezoelectric Vibration", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.2, pp.151~157
5. Ha, S.K., Keilers, C. and Chang F.K. (1992), "Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators", *ALAA Journal*, Vol.30, No.3, pp.772~780
6. Ray, M.C., Bhattacharyya, R. and Samanta, B. (1994), "Static Analysis of an Intelligent Structure by the Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol.52, No.4, pp.617~631
7. Carpenter, M.J. (1997), "Using Energy Methods to Derive Beam Finite Elements Incorporating Piezoelectric Materials", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol.8, pp.26~40
8. Chen, S.H., Wang, Z.D. and Liu X.H. (1997), "Active Vibration Control and Suppression for Intelligent Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.200, No.2, pp.167~177
9. Griffiths, D.J. (1981), *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, USA
10. Hwang, W.S. and Park, H.C. (1993), "Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators", *ALAA Journal*, Vol.31, No.5, pp.930~937
11. Shen, M.H.H. (1995), "A New Modeling Technique for Piezoelectrically Actuated Beams", *Computers & Structures*, Vol.57, No.3, pp.361~366