

선택적 p -분배에 의한 적응적 유한 요소법 Adaptive Finite Element Method by Selective p -Distribution

조 준 형* 우 광 성** 박 진 환*** 안 재 석****
Jo, Jun-Hyung Woo, Kwang-Sung Park, Jin Hwan Ahn, Jea Sunk

ABSTRACT

An adaptive procedure in finite element analysis is presented by p -refinement of meshes in conjunction with *a posteriori* error estimator that is based on the recovery technique. In case of the recovery technique, the SPR(superconvergent patch recovery) approach has been modified for p -adaptive mesh refinement. The strategy of finding a nearly optimal distribution of polynomial degrees on a fixed finite element mesh is discussed such that a particular element has to be refined automatically to obtain an acceptable level of accuracy by increasing p -levels non-uniformly. To verify the proposed algorithm, the limit value approach is proposed which utilizes the exact strain energy computed from the extrapolation equation. A new pre-processor is developed for the p -version finite element program in which the vector graphic editor is used for the automatic generation of node connection and coordinate by halfedge solid data structure according to uniform or nonuniform p -distribution. The general 2-D algorithm is also developed to generate face modes and internal modes in accordance with different mesh types. The quality of the error estimator is investigated with the help of two numerical examples. The results show that the sequences of p -distributions obtained by the proposed error indicator closely follow the optimal trajectory.

1. 서 론

최근에 컴퓨터 그래픽스를 이용한 GUI 운영체계에 의한 자동요소 생성과 오차평가를 통한 적응적 유한요소법의 연구가 활발하게 진행되고 있다. 본 연구에서 관심을 갖는 적응적 p -체는 세분화에 의한 유한요소 해석도 그 중의 하나이다. 이 연구를 위해 필요한 사항은 계산된 해의 오차평가와 수렴까지의 반복과정에서 필요한 자동요소 생성과정이라 할 수 있다. 오차의 측정은 해의 수렴정도를 확인할 수 있을 뿐만 아니라, 더 나아가서 좀더 정밀한 해석을 수행하기 위한 판단기준을 결정하는 중요한 수단이 될 수 있다.

유한요소법의 오차평가기법을 위해 지금까지 제안된 방법은 크게 두 가지로 분류해 볼 수 있다. 첫 번째 방법은 잔차기법(residual technique)으로 경계치문제(boundary value problem)로부터 엄밀하게 구해진 정해와 유한요소 해석에 의한 근사해와의 오차를 사용하는 방법이다. 정해는 묵시적(implicit) 또는 명시적(explicit)으로 구할 수 있다. 그러나, 지배미분 방정식으로부터 정해를 묵시적 또는 명시적으로 구하기가 어려운 구조역학 문제에서는 사용하기가 쉽지 않은 방법이다. 이에 비해 두 번째 방법은 복구기법(recovery technique)으로 유한요소 해석으로 얻어진 응력값 등을 이용하여 비교적 정확한 초수렴해(superconvergent

* 영남대학교 토목공학과 박사 : adbrain@yumail.ac.kr

** 영남대학교 토목공학과 교수 : kswoo@yu.ac.kr

*** 영남대학교 토목공학과 박사과정

**** 영남대학교 토목공학과 석사과정

solution)를 추정하여 정해로 대체하는 방식이다. 이 방법은 알고리즘의 단순성으로 사용하기가 편리하고 연산과정이 효율적이라는 장점이 있다. 이와 같이 두 가지 방식에 기초를 둔 오차평가기법에는 element residual method, second derivative method, duality method, subdomain-residual method, interpolation method, post-processing method 등으로 분류될 수 있다.(L Demkowicz 등 1989)

한편, 적응적 p -체는 세분화를 위한 연구는 잔차기법에 기초를 둔 Babuska, Szabo(E. Bertoi 등 1998)등에 의해 제안된 바 있다. 그러나, 이들을 포함한 후속의 적응적 p -체는 세분화에 대한 연구는 초기체논의 생성에서 해석자(analyzer)인 유한요소 프로그램의 수행 후 오차평가에 따른 p -차수의 재분배 등이 한번의 과정을 통해 자동으로 수행되지 못한 한계를 갖고 있었다. 즉, 주어진 지배미분 방정식의 정해를 구하고 이를 p -version 유한요소 해와의 비교를 통한 사후오차 평가(*a posteriori* error estimation)를 목적으로 하고 있었기 때문이다. 일련의 과정중에 1980년대 후반, Oden(L Demkowicz 등 1989)에 의해서 잔차기법을 이용한 오차평가기법과 체논세분화에 대한 연구가 수행되었다. 아울러 1987년에는 Zienkiewicz와 그의 제자인 Zhu에 의해 소위 Z/Z 접근법이라 불리는 SPR(superconvergent patch recovery) 기법(Zienkiewicz 등 1992)이 제안되어 적응적 h -체는 세분화 연구에 많은 기여를 하였다.

본 연구에서는 Z/Z에 의해 제안된 응력값 복구를 이용하는 방법이 일차적으로 모색되었으며, 기존의 방식을 적응적 p -체는 세분화를 수행할 수 있도록 대폭 수정하였다. 즉, Z/Z 접근법으로 불리는 SPR 기법을 계층적 형상함수에 기초를 두는 기존의 p -version 유한요소법에 적용할 때 나타나는 결과와 그에 따른 오차를 평가하고 이를 기반으로 형상함수의 차수를 요소망에 불균등하게 또는 선택적으로 사용하는 방식의 선택적 p -분배(selective p -distribution) 방식이 사용된다. 그러나, SPR 기법은 적응적 p -체는 세분화의 경우 형상함수의 차수가 요소망에 불균등하게 사용되므로, 소위 평활화 된 복구응력 σ^* 는 p 의 차수가 높아지게 되면 응력의 보간과정에서 보간함수가 고차가 됨에 따라 진동이 발생할 수 있으며, 또한 이 것이 오차를 유발할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 실제변형에너지(exact strain energy)와 유한요소해석에 의한 근사에너지 값으로 정의되는 에너지노름(energy norm)을 사용한 사후오차평가를 별도로 실시하여 제안하고 있는 오차평가 알고리즘의 적정성을 평가하였다. 여기서, 실제변형에너지 U_{ex} 는 평활화 된 복구응력 σ^* 에 의해 산정하지 않고 Babuska가 제안한 p -version 유한요소법의 오차추정식에 기초를 둔 외삽방정식(extrapolation equation)을 적용하였다. 즉, 자유도가 무한대일 때의 실제변형에너지를 외삽법을 사용하여 추정하는 방식으로 이 값을 극한치(limit value)라 정의하였다.

한편, 적응적 p -체는 세분화를 해석자와 연계하여 자동화하기 위해 자동절점 생성(automatic node generation) 알고리즘이 더해진 전처리기(pre-processor)가 C++-언어를 사용하여 프로그램 되었다. 제안된 방법의 적정성을 보이기 위해 인장력을 받는 균열판을 대상으로 해석을 수행하여 p -체는 세분화에 따른 단계별 오차를 평가하였다.

2. p -체는 세분화를 위한 사후오차평가 기법

2.1 수정된 Z/Z방법에 의한 사후 오차평가

기존의 h -법과 p -법 사이에는 사용되는 형상함수와 형상함수의 차수에 따라 달라지는 가우스 적분점 등의 차이점이 존재하므로 Zienkiewicz와 Zhu(이하 Z/Z)(Zienkiewicz 등 1992)에 의해 h -법에 적용된 초수렴 패치 복구기법(superconvergent patch recovery technique; 이하 SPR 기법)의 수정이 불가피하게 된다. 즉, p -version 유한요소법의 수행으로부터 산정된 응력값(이하 σ^p)을 최소제곱법(least square method)으로 보간하여 얻어진 복구응력(이하 σ^*)과 σ^p 를 일반적인 n 차원의 벡터로 인정하고, 두 벡터의 차를 나타내는 $e_v (= \sigma^* - \sigma^p)$ 벡터의 노름(norm)을 구하는 식을 이용해 에너지노름을 식(1)과 같이 정의할 수 있다.

$$\|e_i\|^2 = \int_{\Omega_i} (\sigma^* - \sigma^r)^T [D]^{-1} (\sigma^* - \sigma^r) d\Omega \quad (1)$$

식(1)에서 $\|e_i\|^2$ 는 i -번째 요소에서의 에너지노름, Ω_i 는 i -번째 요소의 체적, $[D]$ 는 재료상수행렬 (constitutive matrix)를 나타낸다. 만약에 재료상수행렬 $[D]$ 를 식(1)에서 제거하게 되면 L^2 -노름 또는 응력노름(stress norm)이 되며 $\|e_i^*\|$ 로 나타낸다. 한편, σ^* 는 평활화된 복구응력(smooth stress)을 나타내며 그림 4와 같이 통상 4개의 p -version 유한요소로 구성되는 한 패취(patch)에서의 복구응력 함수는 식(2)와 같이 가정하였다.

$$\sigma^*(x, y) = \sum_{j=1}^k a_j \phi_j \quad (2)$$

$$\int_{\partial\Omega_i} \|e(x, y, a_j)\|^2 d\Omega = 0 \quad (3)$$

식(2)에서 k 는 파스칼의 삼각수로부터 얻어지는 다항식의 개수이며 다항식의 차수가 p 이면 $(p+1)$ 개가 된다. 한편, a_j, ϕ_j 는 보간을 위한 상수와 Pascal의 삼각수에 의한 기저함수(basis function)를 나타낸다. 다항식의 차수 p 는 유한요소 해석 시 사용되는 형상함수의 차수와 동등한 수준으로 보간하였다. 미지상수 a_j 는 가우스적분점에서의 응력값 σ_p 의 갯수가 a_j 를 정의하는데 필요한 미지수의 갯수인 N_p 보다 많기 때문에 식(3)에 의해 최소제곱법(least square method)으로 결정되었다.

그림 1과 그림 2는 h -법을 사용할 경우와 본 연구에서 사용하는 p -version의 사용시 입력데이터로 사용하는 σ^h, σ^p 의 가우스적분점의 위치와 Z/Z에 의해 제안된 패취의 구성을 비교하고 있다. h -version의 경우는 요소 간에 사용되는 형상함수의 차수 p 가 고정되므로 $p=1$ 차의 경우 1개의 가우스적분점이, $p=2$ 차인 경우는 4(2×2)개 또는 9(3×3)개의 가우스 적분점이 사용될 수 있다. 따라서, 복구응력함수 σ^* 는 하나의 고정된 보간함수를 사용하여 결정될 수 있다. 반면에, p -version의 경우는 요소간의 형상함수의 차수를 불균등하게 사용할 수 있으므로 그림 4와 같이 비대칭의 가우스적분점을 가질 수 있고, p 의 차수가 증가함에 따라 가우스적분점의 갯수는 $N_G \times N_G$ 가 되며, 식(4)에 의해 N_G 를 결정하도록 하였다. 요컨대, p -version 유한요소법에 사용된 형상함수에 맞추어 가우스적분점을 변화시키고 이에 대응하는 응력을 이용함과 동시에 최소제곱법의 기저함수의 차수를 변화시켜서 오차량을 평가하였다.

$$N_G \geq \frac{2p+1}{2} \quad (4)$$

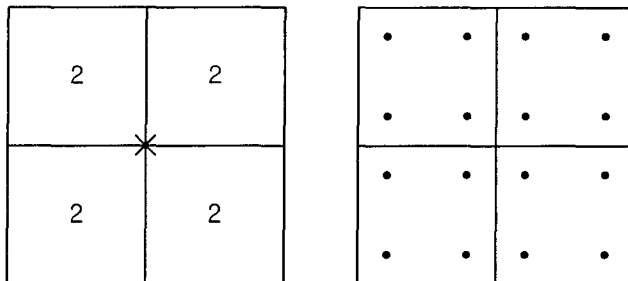


그림 1. h -법에 의한 형상함수 및 차수 p 의 균등분포에 따른 가우스적분점의 배치

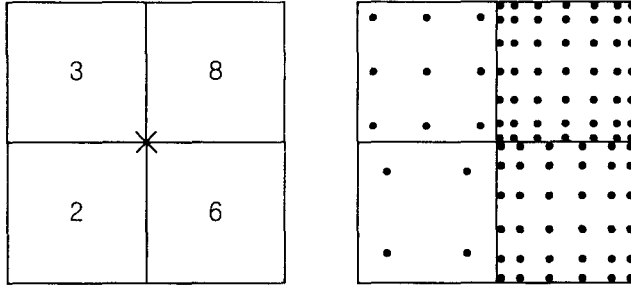


그림 2. p -법에 의한 형상함수 및 차수 p 의 불균등분포에 따른 가우스적분점의 배치

한편, 요소별로 수렴정도를 판단하기 위해 σ -공간상의 상대적 거리를 측정할 수 있는 η 를 식(5)로 정의한다. η 는 각 해석단계에서 수렴정도를 판단할 수 있는 오차지표(error indicator)로 사용된다. 식(5)와 식(6)의 의미는 전체 σ^* 함수가 공간에서 나타내는 거리와 e_e^* 함수가 공간에서 나타내는 거리의 비를 나타내고 있다. 따라서, 식(5)는 해석 영역 전체에 대한 정규화된 오차를 나타낸다. 그러므로, 식(7)은 전체 영역에 관한 오차를 나타내며 식(9)은 요소별 발생되는 오차를 나타낸다. 아래 식에서 η_Ω : 해석영역 전체의 오차, n : 해석단계, m : 특정 요소가 각 패취에 속한 회수를 나타낸다.

$$\eta_\Omega^n = \frac{\|e_\sigma^*\|_\Omega^n}{(\|\sigma^*\|_\Omega^{n^2} + \|e_e^*\|_\Omega^{n^2})^{\frac{1}{2}}} \times 100(\%) \quad (5)$$

$$\|\sigma^*\|_\Omega^n = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \|\sigma^*\|_e^{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\|e_e^*\|_\Omega^n = \left\{ \sum_{e=1}^{\Omega} \|e_e^*\|_e^{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\|\sigma^*\|_e^n = \left\{ \sum_{i=1}^m \|\sigma^*\|_e^i \right\} \frac{1}{m} \quad (8)$$

$$\|e_e^*\|_e^n = \left\{ \sum_{i=1}^m \|e_e^*\|_e^i \right\} \frac{1}{m} \quad (9)$$

$$\eta_e^m = \frac{\|e_e^*\|}{(\|\sigma^*\|_e^{n^2} + \|e_e^*\|_e^{n^2})} \% \quad (10)$$

$$\xi_e = \frac{\eta_e^m}{\eta_\Omega} \quad (11)$$

일반적인 경우 패취는 4개의 요소로 구성된다. 그러나 요소의 조합형태가 기하형상에 따라 항상 4개로 고정되지 않으므로 패취를 구성할 때는 3개 이상의 요소를 하나의 패취로 인정하였다. 임의의 패취구성을 위해 3개 요소, 4개 요소, 그리고 5개 요소로 조립되는 경우를 고려하였고, 이에 근거하여 패취의 복구능력함수를 결정할 수 있도록 하였다.

한편, 전체 해석영역에 대해 p -version 유한요소법을 사용한 SPR 기법의 적용과정을 간략히 설명하면, 먼저 특정요소를 포함하는 패취조립점(patch assembly point)을 중심으로 패취를 구성한 후 최소제곱법을 이용해 보간을 수행한다. 이 때 보간을 위해 사용되는 기저함수(basis function)는 가우스적분점의 갯수를 고려한 파스칼의 삼각수로부터 결정된다. 다음 단계는 인접 패취조립점으로 이동하여 새로운 패취를 구성하게 되는데, 이 과정에서 패취가 서로 중복(overlap) 될 수 있다. 따라서, 한 개의 요소에 겹쳐진 횡수만큼의 에너지 노름값이 계산될 수 있다. 본 연구에서는 이 경우 각 노름(norm)값의 국부적 평균을 고려중인 요소의 노름으로 인정했다. 그리고 이 값은 각 요소에서 요소의 차수를 상승시키는 지표로 이용한다. 식(10)에서 m 은 특정 요소가 각 패취에 속한 회수, η_e^m 는 노름값의 국부적 평균값을 이용해 계산된 요소의 상대오차를 나타낸

다. 따라서, 새로운 오차지표(error indicator) ξ_e 는 식(11)로 정의 된다. 만약, $\xi_e > 1$ 일 경우 p -의 차수는 증가시키게 된다. 다시말하면, 요소의 오차량 η_e^m 이 전체 영역에서 측정된 오차량 η_Ω 보다 클 경우, 즉 $\xi_e > 1$ 인 경우 요소의 형상함수 차수를 증가시키면서 p -세분화를 수행한다.

2.2 극한치 접근법에 의한 사후 오차평가

기존의 Z/Z 에 의한 SPR법에 의한 사후 오차평가는 식(1)에서 보는 바와 같이 유한요소해석의 정해(exact solution)를 이 식에 사용된 최소제곱법(least square method)으로 보간하여 얻어진 복구응력(이하 σ^*)을 준정해로 대치하여 에너지노름(energy norm) 또는, 응력노름(stress norm)을 산정하며, 이를 이용하여 각 요소의 상대오차를 평가하는 오차지표로 사용하게 된다. 따라서, 유한요소해석에 의한 정해를 추정할 수 있게 되면 준정해를 사용하지 않고 직접적으로 오차를 정확하게 평가할 수 있게 된다.

일반적으로 유한요소해석은 자유도가 증가되면서 정해에 수렴되는데 자유도가 증가되는 것을 확장(extension)이라 한다. 본 연구에서는 p -확장법을 사용하므로 이에 대한 해의 수렴성에 대한 수렴구간(asymptotic range)는 Babuska가 제안한 아래 식이 유효하다.

$$|U_{ex} - U_p| \leq \frac{k}{N_p^{2\alpha}} \quad (12)$$

여기서, U_{ex} 는 실제변형에너지(exact strain energy), U_p 는 p -version 유한요소법에 의한 근사변형에너지, 2α 는 응력특이 정도를 나타내며 통상 수렴율(convergence rate)을 의미한다. 그리고, k 는 임의의 양수, N_p 는 형상함수의 차수가 p 일 때의 자유도를 나타낸다. 한편, 유한요소의 해가 수렴구간내에 있을 정도의 충분한 자유도를 갖고 있다고 가정할 때 식(12)는 부등호 대신 등호로 대치할 수 있게 된다. 예를 들면, 연속된 $p-2, p-1, p$ 차의 형상함수가 사용될 때 근사변형에너지도 수렴구간내에 있기 때문에 수렴성에 대한 3개의 방정식을 세울 수 있게 된다. 그리고, 미지수 $2\alpha, k$ 를 제거하여 정리하면 식(13)을 유도할 수 있다. 이를 사용하면 변형에너지의 정확한 값을 예측할 수 있게 되며 이러한 방법에 의해 계산된 실제변형에너지를 극한치(limit value)라고 하며 U_{ex}^L 로 정의한다. 이 값은 자유도가 무한대일 때 유한요소법을 통해 추정할 수 있는 정해로 외삽법(extrapolation)에 의해 구할 수 있다. 실제변형에너지를 구하는 외삽방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\text{Log} \frac{U_{ex}^L - U_p}{U_{ex}^L - U_{p-1}}}{\text{Log} \frac{U_{ex}^L - U_{p-1}}{U_{ex}^L - U_{p-2}}} = \frac{\text{Log} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{Log} \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \quad (13)$$

$$\|e\|_E = \left[\frac{U_{ex}^i - U_p^i}{U_{ex}^L} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

식(13)에서 U_{p-2}, U_{p-1}, U_p 와 N_{p-2}, N_{p-1}, N_p 는 형상함수 차수를 전 영역에 걸쳐 균등하게 $p-2, p-1, p$ 로 증가시킬 때의 유한요소법에 의해 산정된 근사변형에너지와 자유도수를 각각 나타낸다. 따라서, 실제변형에너지인 극한치 U_{ex}^L 를 구하게 되면 식(1)에서의 에너지노름(energy norm)은 수정될 수 있

다. 즉, 이 식에 사용된 최소제곱법(least square method)으로 보간하여 얻어진 복구응력(이하 σ^*)을 준정해 대신에 극한치 U_{ex}^L 를 사용하여 다음과 같이 에너지노름을 정의할 수 있다. 식(14)에서 U_p^i 는 적응적 p -체분 단계 i -번째에서 계산되는 전영역의 근사변형에너지를 의미한다.

3. 선택적 p -체는 세분화

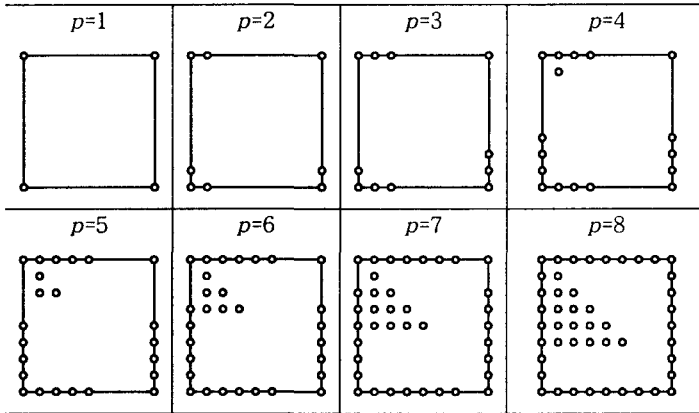


그림 3. 적응적 p -체분화에 사용되는 계층적 형상함수

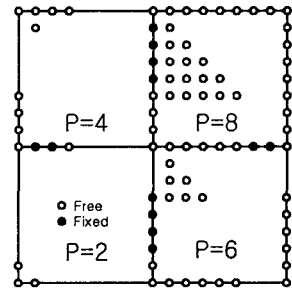


그림 4. 연속성확보를 위한 구속조건

오차해석 후 자동화된 선택적 p -체는 세분화를 위해 전처리 프로그램이 개발되었다. 전처리기(pre-processor)에서 발생하는 데이터는 수정없이 오차처리기능이 확장된 p -version 유한요소 프로그램에 사용할 수 있도록 하였다. 그림 3은 p -법에서 채택하고 있는 계층적 형상함수(hierarchical shape function)의 분류를 $p=1$ 에서 $p=8$ 로 증가할 때의 절점구성을 나타내고 있다. 즉, 좌표값을 갖는 4개 절점으로 구성된 모서리절점(corner node)과 좌표값을 갖지 않는 절점(nodeless node)인 주변절점(side node)과 내부절점(internal node, bobble node)으로 이루어진다. 그림 4에서는 요소별로 다르게 분포된 형상함수에 대해 절점들의 구속 조건을 어떻게 설정하는가를 나타내고 있다. 즉, 저차의 요소와 고차의 요소가 만날 경우 요소의 경계부분에서 고차의 해당하는 절점의 해가 추가로 생기므로 해의 연속성을 확보하기 위해 고차추가분에 해당되는 절점의 자유도를 구속조건으로 제어시키는 방법을 택하였다.

4. 수치해석 예제

4.1 중앙균열을 갖는 평판

해석 방법을 검증하기 위해 인장력을 받는 중앙균열판 예제를 선택하였다. 대칭성을 이용해 평판의 1/4만이 모델링했고 체분설계는 8요소로 초기 요소망을 구축하였다. 각 해석단계에서 형상함수는 불균등하게 분포되었으며 응력 L^2 -노름을 이용해 상대오차를 계산하여 수렴정도를 판단하였다. 재료상수는 각 $E = 2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$ 으로 설정했다. 인장응력 $\sigma = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$ 의 외력을 작용시켰으며 길이 단위는 모두 cm를 나타낸다. 초기체분은 모두 $p=1$ 차로 고정하였다. 그림 5는 요소의 번호와 균열판의 크기를 나타내고 있다.

그림6에서는 2.2절에서 언급한 Babuska가 제안한 외삽방정식(extrapolation equation)을 적용하여 정해를 추정하여 극한치로 나타내었다. 이를 기준으로 자유도 증가에 따른 정규화된 변형에너지의 수렴성을 평가하

었다. 또한 그림 6에서는 p -체는 세분화를 수행하였을 때 초기에 급진적 수렴 후 NDF=200의 지점에서 거의 극한치에 수렴한 것을 볼 수 있다. 이 때의 형상함수 차수의 분배는 그림 7~9에 나타내었다. 그림 9에서 1번 요소의 형상함수의 차수가 가장 높게 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 균열선단의 후방에도 일반적으로 나타나는 응력특이기가 형상함수의 고차화에 영향을 미친 것으로 생각된다. 또한 균열의 주위에서 응력의 분포가 타원 모양으로 나타나는 것을 고려한다면 2번과 5번 요소의 형상함수 고차화현상도 그림 7~9에 명확히 나타난다. 표2에서 보는 바와 같이 8-요소 모델에 p -체는 세분화가 4번 이상 진행되면 정해로 추정되는 극한치에 비해 5%이내의 상대오차를 보여주고 있다.

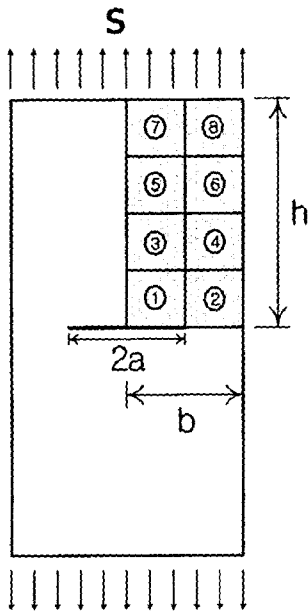


그림 5. 인장력을 받는 중앙균열판

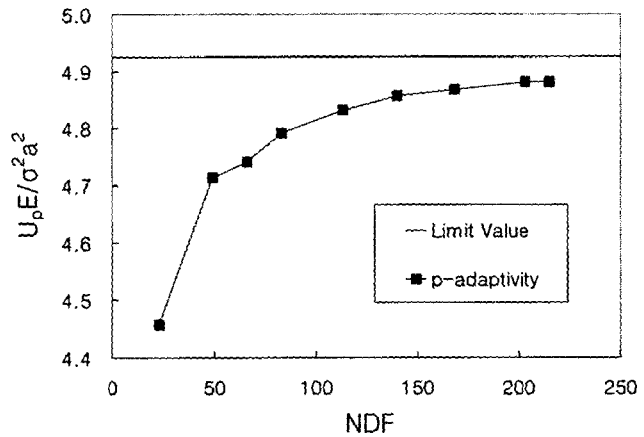


그림 6. $a/b = 0.5, h/b=0.5$ 인 경우 정규화된 변형 에너지의 수렴곡선

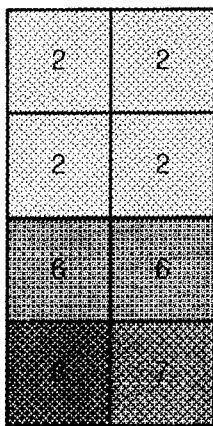


그림 7. 4번째 수행
($\eta_\Omega = 11.3\%$, NDF = 83)

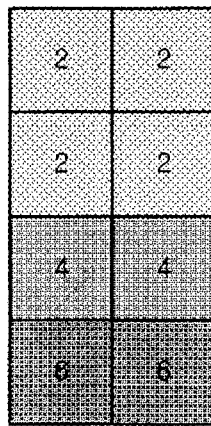


그림 8. 6번째 수행
($\eta_\Omega = 10.9\%$, NDF = 140)

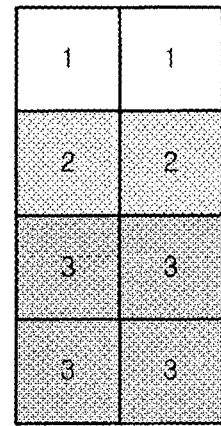


그림 9. 9번째 수행
($\eta_\Omega = 9.90\%$, NDF = 215)

표 2. 8-요소 모델의 오차 수렴성

| No. of Iteration | NDF | $\eta_{\Omega}(\%)$ | $\ e\ _E$ |
|------------------|-----|---------------------|-------------|
| 1 | 23 | 1.07680E+01 | 3.08352E-01 |
| 2 | 49 | 1.33307E+01 | 2.07933E-01 |
| 3 | 66 | 1.13439E+01 | 1.93649E-01 |
| 4 | 83 | 1.08973E+01 | 1.65165E-01 |
| 5 | 113 | 1.07338E+01 | 1.38166E-01 |
| 6 | 140 | 1.09091E+01 | 1.18170E-01 |
| 7 | 168 | 1.03848E+01 | 1.08033E-01 |
| 8 | 203 | 1.00932E+01 | 9.47309E-02 |
| 9 | 215 | 9.90584E+00 | 9.46993E-02 |

6. 결론 및 고찰

제안된 오차평가기(error estimator)의 수식적 의미와 외삽법에 의한 오차와 비교를 통해 수렴의 근거를 추정할 수 있었다. 요소의 세분화를 통해 정확도를 보장받는 h -법의 경우 사용되는 형상함수가 1차이므로 지속적이며 점진적인 수렴성을 보장받을 수 있다. 그러나 p -법의 경우 h -법에 비해 일반적으로 보다 단위자유도당 수렴성이 높은 것으로 평가되나, 몇몇 경우 수치적 오차 및 해의 진동현상으로 인해 고차형상함수에서 오차량이 증가하는 것을 볼 수 있었다. 이를 해결하기 위해서는 고차와 저차 그리고 요소의 분할을 최적 조합할 수 있는 적응적 hp -체는 세분화 방식이 최선이라 판단된다.

참고문헌

1. O.C Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate Part I : The Recovery Technique," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.33, pp.1331-1364 (1992)
2. O.C Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate Part II : Error Estimaties and Adaptivity," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.33, pp.1365-1382 (1992)
3. O.C Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.24, pp.337-357 (1987)
4. L. Demkowicz, J.T Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, "Toward a universal h - p adaptive finite element strategy Part.1 : Constrained Approximation and Data Structure," *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.77, pp.79~112 (1989)
5. E. Bertoti and B.A. Szabo, "Adaptive Selection of Polynomial Degrees on a Finite Element Mesh," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.42, pp.461-478 (1998)
6. P.K. Basu and B.A. Szabo, "Adaptive control in p -convergent approximations," *Proc. 15th Annual Meeting, Society of Engineering Science*, Gainesville, Florida (1978)
7. D.A. Dunavant and B.A. Szabo, "A Posteriori Error Indicators for the p -Version of The Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.19, pp.1851-1870 (1983)