韓國海岸海洋工學發表論文集 (2003)
第14券, pp. 53-57

임의의 수심변화에 적용되는 확장형 Boussinesq 방정식 개발
Development of Extended Boussinesq Equations over an Arbitrary Bottom Topography

이창훈[1]
Chang-hoon Lee[1]

1. 머리말

불규칙파를 사용하여 설계 자료로 이용하기 위해서는 설계해역에서 불규칙파의 파랑변형을 예측할 수 있는 수치모형의 개발이 선행되어야 한다. 비선형 불규칙파의 거동을 해석할 수 있는 Boussinesq 방정식은 상대파고인 a/h(a 는 수면의 진폭, h 는 수심임)를 비선형의 매개변수로 하고 상대수심인 kh (k 는 파수임)를 분산성의 매개변수로 하여 섭동법을 사용하여 유도된다. Boussinesq 식은 수심이 일정한 경우에 Boussinesq(1872)가 비선형 항을 $O(a/h,(kh)^2)$ 까지 포함하여 처음으로 개발하였고 수심의 변화가 완만한 경우에 Peregrine(1967)이 개발하였다. 이 식은 현재까지 개발된 식 가운데 가장 정확하고 널리 사용되고 있다. 반면, 이 식은 수심이 깊을수록 그 정확도가 떨어지는 단점이 있다.

비선형 불규칙파의 거동을 해석할 수 있는 Boussinesq 방정식은 Boussinesq가 처음 개발한 이후로 약 100년 동안 실제 해안 항만사업에 쓰이지 않았다. 왜냐하면 수심이 파장에 비해 상대적으로 작은 경우에만 이 모형이 적용될 수 있어서 심해로부터 전파해오는 파랑의 거동을 제대로 예측하지 못하였기 때문이다. 이를 극복하려 노력이 1990년대부터 활발히 진행되었다. 이렇게 개발된 소위 확장형 Boussinesq 방정식에는 Madsen과 Sorensen(1992), Nwogu(1993), Chen과 Liu(1995)의 세 가지 유형의 식이 있다. Madsen과 Sorensen은 수면변위와 체적속을 변수로 하는 Boussinesq 방정식의 분산항에 조율계수 $B(=1/15)$를 사용하여 선형의 분산관계의 정확성을 향상시켰다. 한편 Nwogu는 수면변위와 임의의 위치 $z=z_\alpha$에서의 수평방향의 유속을 변수로 하는 Boussinesq 방정식을 유도하였다. 그리고 그 식에서 유도되는 선형의 분산관계의 정확성을 향상시킬 수 있는 위치를 제시하였다. 이때 Nwogu 식에서도 조율계수 α 가 나오는데 B와 α 사이에는 $B=-(\alpha+1/3)$의 관계가 있다. Chen과 Liu는 Nwogu의 방법을 사용하여 Boussinesq 방정식을 개발하였는데 그들은 변수로 수평방향의 유속 대신에 속도포텐셜을 사용하였다. 이 세 유형의 식에는 Peregrine의 식과 마찬가지로 $O(a/h,(kh)^2)$ 항까지 포함되어 있다. 즉, 여전히 약 비선형 식이다. 이후 Wei 등(1995)은 Nwogu 식과 Chen과 Liu 식 각각에 비선형 항을 모두 포함한 소위 강 비선형 Boussinesq 방정식을 개발하였다.

파랑변형식 가운데 실제 해안 항만 기술자들이 가장 많이 사용하고 있는 수치모형은 완경사방정식이다. Berkhoff(1972)가 이 식을 유도하는 과정에서 수심의 변화가 완만하다고 가정하여 고차의 수심변화 항인 바닥의 곡률 항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱 항($(\nabla h)^2$)을 무시하였다. 완경사방정식은 심해에서부터 천해까지 전 영역에서 파랑의 선형의 분산성을 정확히 예측할 수 있고, 다른 비선형 식에 비하여 수치적으로 적용하기 쉽다. 그러나 완경사방정식은 선형의 식이기 때문에 얕은 수심에서 파고가 파장이나 수심에 비하여 상당히 큰 경우 파랑의 변형을 예측하는데 그 정확도가 떨어지는 한계가 있다. 1990년대 이후 완경사방정식을 유도할 때 고차의 수심변화 항, 즉, 수심의 곡률항과 수심경사의 제곱 항을 포함하여 유도되는 소

1 세종대학교 토목환경공학과 (Changhoon Lee, Department of Civil & Environmental Engineering, Sejong University, Seoul 143-747, Korea, clee@sejong.ac.kr)

위 확장형 완경사 방정식은 수심의 변화가 심한 해역에서도 파랑의 변형을 잘 예측할 수 있음이 확인되었다(Massel, 1993; Chamberlain과 Porter, 1995). 이 모형을 사용하면 수심이 규칙적으로 변하는 사련에서의 Bragg 반사 현상을 정확히 예측하고, 바닥의 경사가 급한 해역에서의 파랑의 반사도 정확히 모의할 수 있었다.

1990년대 이후 완경사방정식에서 한창 거론되었던 수심변화에 따른 파랑식의 거동을 Boussinesq 방정식에는 어떠할 지에 대한 논의는 지금까지 없었던 것으로 사료된다. 본 연구에서는 Boussiesq 방정식의 유도과정에서 수심변화를 어떻게 고려하는지 살펴보고 임의의 수심변화에도 적용될 수 있는 모형을 개발한다. 그리고, 기존의 Boussinesq 방정식과 본 연구에서 개발된 모형을 사용하여 수심변화에 따른 모형의 거동을 수치실험을 통하여 개선의 정도를 검증한다.

2. 지배방정식 개발

Boussinesq 방정식을 유도할 때 비선형을 결정하는 매개 변수인 $\delta = a/h$와 상대수심을 결정하는 매개 변수인 $\mu = kh$를 사용하여 모든 변수를 무차원 값으로 표현한다. 기존의 Boussinesq 방정식은 수심의 경사 항을 $\nabla h = O(\mu)$로 두었다. 본 연구에서는 수심 경사뿐만 아니라 모든 수심의 변화율을 $\nabla h \simeq \nabla^2 h \simeq |\nabla h|^2 \simeq \nabla^3 h \cdots = O(1)$으로 두었다. 그 결과 바닥에서의 무차원화 된 운동학적 경계조건은 다음과 같다

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \nabla h \cdot \nabla \phi = 0; \quad z = -h \tag{1}$$

지배방정식과 수면에서의 경계조건은 기존의 접근법에 의한 것과 똑같다. 무차원화 된 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mu^2 \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad -h \le z \le \delta\eta \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2}\left\{\delta(\nabla \phi)^2 + \frac{\delta}{\mu^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right\} = 0, \quad z = \delta\eta \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \delta\mu^2 \nabla \phi \cdot \nabla \eta = 0, \quad z = \delta\eta \tag{4}$$

속도포텐셜의 수직방향의 함수를 바닥을 기준으로 한 멱급수로 다음과 같이 표현하였다.

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (z+h)^n \phi_n \tag{5}$$

식 (5)의 공간 미분 항을 바닥에서의 경계조건식 (1)에 대입하여 ϕ_1을 얻고, 또한 식 (5)의 공간 미분 항을 Laplace 방정식 (2)에 대입하고 ϕ_1을 이용하면 ϕ_2를 얻을 수 있다. 따라서, 식 (5)로 표현되는 속도포텐셜을 임의의 위치 $z = z_\alpha$에서의 속도포텐셜 ϕ_α로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi = {} & \phi_\alpha + \mu(z_\alpha - z)\frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2} \\
& + \mu(z_\alpha - z)\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha \\
& - \mu^2(z_\alpha - z)(h+z)\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2} \cdot \nabla\left(\frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right) \\
& + \frac{\mu^2}{2}\{(h+z_\alpha)^2 - (h+z)^2\}\frac{1}{1+|\nabla h|^2} \\
& \times\left(\nabla^2 \phi_\alpha - \nabla^2 h \frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right) + O(\mu^3)
\end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)의 시간 및 공간 미분식을 Laplace 방정식 (2)에 대입한 뒤 바닥($z = -h$)에서부터 수면 ($z = \delta\eta$)까지 공간 적분을 취하면 다음과 같은 연속방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot M = 0 \tag{7}$$

위 식에서

$$\begin{aligned}
M = {} & \int_{-h}^{\delta\eta} \nabla \phi \, dz \\
= {} & (h+\delta\eta)\left\langle \nabla \phi_\alpha + \frac{\mu}{2}(h + 2z_\alpha - \delta\eta)\nabla\left(\frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right)\right. \\
& + \mu^2\left[z_\alpha \nabla\left(\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha\right)\right. \\
& - z_\alpha \frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\left\{\nabla h \cdot \nabla\left(\frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right)\right\} \\
& - hz_\alpha \nabla\left\{\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2} \cdot \nabla\left(\frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{2}\nabla\left\{\frac{(2h+z_\alpha)z_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right\}\left(\nabla^2 \phi_\alpha - \nabla^2 h \frac{\nabla h \cdot \nabla \phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\frac{(2h+z_\alpha)z_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big\{\nabla^3\phi_\alpha-\nabla\Big(\nabla^2 h\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{2}(h-\delta\eta)\Big\{\nabla\Big(\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\\
&-\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\Big(\nabla h\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big)\\
&-(h-z_\alpha)\nabla\Big(\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big)\\
&+\nabla\Big(\frac{h}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big(\nabla^2\phi_\alpha-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\\
&+\frac{h}{1+|\nabla h|^2}\Big(\nabla^3\phi_\alpha-\nabla\Big(\nabla^2 h\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{3}\{h^2-\delta\eta h+(\delta\eta)^2\}\Big\{\nabla\Big(\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big)\\
&-\frac{1}{2}\nabla\Big(\frac{1}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big(\nabla^2\phi_\alpha-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{1+|\nabla h|^2}\Big(\nabla^3\phi_\alpha-\nabla\Big(\nabla^2 h\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\Big)\Big\}\Big]\Big\rangle
\end{aligned}
\tag{8}
$$

식 (6)의 시간 및 공간 미분식을 Bernoulli 방정식 (3)에 대입하면 다음 식을 얻게 된다.

$$
\begin{aligned}
&\eta+\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}+\mu(z_\alpha-\delta\eta)\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}\\
&+\mu^2(z_\alpha-\delta\eta)\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h\cdot\nabla\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}\\
&-\mu^2(h+\delta\eta)(z_\alpha-\delta\eta)\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\left(\frac{\nabla h\cdot\nabla\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}}{1+|\nabla h|^2}\right)\\
&+\frac{\mu^2}{2}\{(h+z_\alpha)^2-(h+z_\alpha)^2\}\frac{1}{1+|\nabla h|^2}\\
&\times\left(\nabla^2\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t}}{1+|\nabla h|^2}\right)\\
&+\frac{\delta}{2}\Big\langle|\nabla\phi_\alpha|^2+2\mu(z_\alpha-\delta\eta)\nabla\phi_\alpha\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\\
&+\mu^2(z_\alpha-\delta\eta)^2\Big|\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big|^2\\
&+2\mu^2\nabla\phi_\alpha\cdot\Big[(z_\alpha-\delta\eta)\Big\{\nabla\Big(\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\\
&-\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\Big(\nabla h\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big)\Big\}\\
&-(h+\delta\eta)(z_\alpha-\delta\eta)\nabla\Big\{\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big\}\\
&+\frac{1}{2}\nabla\Big\{((h+z_\alpha)^2-(h+\delta\eta)^2)\frac{1}{1+|\nabla h|^2}\Big\}\\
&\qquad\times\Big\{\nabla^2\phi_\alpha-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big\}\\
&+\frac{1}{2}\{(h+z_\alpha)^2-(h+\delta\eta)^2\}\frac{1}{1+|\nabla h|^2}\\
&\times\Big\{\nabla^3\phi_\alpha-\nabla\Big(\nabla^2 h\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\phi_\alpha\Big)\Big\}\Big]+\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\\
&+2\mu\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big[\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha\\
&+(h+z_\alpha)\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\\
&+\frac{h+\delta\eta}{1+|\nabla h|^2}\Big\{\nabla^2\phi_\alpha-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\\
&-2\nabla h\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big\}\Big]\\
&+\mu^2\Big[\Big\{\frac{|\nabla h|^2}{(1+|\nabla h|^2)^2}\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha\Big\}^2\\
&+\Big\{(h+z_\alpha)\frac{\nabla h}{1+|\nabla h|^2}\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big\}^2\\
&+\Big\{\frac{h+\delta\eta}{1+|\nabla h|^2}\Big(\nabla^2\phi_\alpha-\nabla^2 h\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\\
&-2\nabla h\cdot\nabla\Big(\frac{\nabla h\cdot\nabla\phi_\alpha}{1+|\nabla h|^2}\Big)\Big)\Big\}^2\Big]\Big\rangle=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

즉, 식 (8), (9)가 임의의 수심 변화에도 적용될 수 있는 확장형 Boussinesq 방정식이다. 이 식은 조석류와 같은 흐름의 영향을 정확히 모의할 수 있고, 또한 이 식에 고차의 수심변화 효과가 포함되어 있어서 수심변화가 급한 해역에서 파랑의 거동을 정확히 모의할 수 있다.

3. 기존의 Boussinesq 방정식과 비교

Table 1에 기존의 Boussinesq 방정식과 본 연구에서 개발된 방정식을 심해의 적용성, 비선형파의 적용성, 수심변화의 적용성에서 비교하였다. 본 연구에서 개발된 Boussinesq 방정식은 심해의 적용면에서 Madsen과 Sorensen(1992), Nwogu(1992), Wei 등(1995)의 확장형 식과 대등한 정확성이 있고, 비선형파의 적용 면에서 Wei 등의 강 비선형식과 대등한 정확성이 있고, 수심변화의 적용 면에서 기존의 완경사 식보다 더 정확한 모형이다. 즉, 본 연구에서 개발된 모형의 기존의 연구 결과의 한계를 극복하는 획기적인 것이다.

4. 개발된 모형의 검증

식 (8), (9)는 수면변위와 속도포텐셜로 표현된 식이다. 비선형식을 수치해석을 수행할 때 엇갈림 격자(staggered grid)상에 변수를 배치하면 수치적인

Table 1. 본 연구에서 개발된 모형과 기존의 Boussinesq 방정식의 적용성 비교

Boussienesq 방정식	심해에의 적용성 (위상속도 90% 정확성 유지되는 상대수심)		비선형 적용성 ($O(a/h,(a/h)^2,\cdots)$ 포함)		수심변화 적용성 $O(\nabla h, \nabla^2 h, \cdots, (\nabla h)^2, (\nabla h)^3, \cdots)$ 포함)	
Boussinesq (1872)	$kh \le 0.58\pi$		$O(a/h)$	약 비선형	적용 불가	일정 수심
Peregrine(1967)	$kh \le 0.58\pi$		$O(a/h)$	약 비선형	$O(\nabla^3 h)$ 일부 포함	완경사 수심
Madsen과 Sorensen(1992)	$kh \le 1.32\pi$	확장형	$O(a/h)$	약 비선형	$O(\nabla^3 h)$ 일부 포함	완경사 수심
Nwogu(1993)	$kh \le 1.32\pi$	확장형	$O(a/h)$	약 비선형	$O(\nabla^3 h)$ 일부 포함	완경사 수심
Wei 등(1995)	$kh \le 1.32\pi$	확장형	$O((a/h),(a/h)^2,\cdots)$ 모든 차수 포함	강 비선형	$O(\nabla^3 h)$ 일부 포함	완경사 수심
본 연구(2003)	$kh \le 1.32\pi$	확장형	$O((a/h),(a/h)^2,\cdots)$ 모든 차수 포함	강 비선형	$O(\nabla h, \nabla^2 h, \cdots, (\nabla h)^2, (\nabla h)^3, \cdots)$ 모든 차수 포함	모든 경사 수심

noise가 덜 생기는 경향이 있다. 따라서, 엇갈림 격자 상에 변수를 배치하기 위해 속도포텐셜 대신 유속을 사용할 필요가 있다. 식 (8), (9)를 임의의 위치 $z = z_\alpha$에서의 유속 $u_\alpha (= \nabla \phi_\alpha)$로 표현하여 수치해석을 수행한다.

수면변위 η와 유속 u를 엇갈림 격자 상에 두고 predictor-corrector 기법을 사용하여 시간 미분 항을 차분 한다. 공간 미분 항을 살펴보면 식 (9)에서 $\nabla \cdot \{\nabla(\nabla \cdot u_\alpha)\}$항이 있다. 이는 최소의 격자점을 사용하여도 $O(\Delta^3 x)$의 정확도를 유지할 수밖에 없다. 즉 이 분산항의 정확성을 얻기 위해서 식 (8), (9)의 모든 공간 미분 항을 $O(\Delta^3 x)$의 정확도로 차분 한다.

첫 번째로 Booij(1983)의 경사면 실험을 수행한다. 즉, 수심이 0.6m와 0.2인 두 수평면 사이에 경사면을 두고 주기 2초의 선형파가 0.6m 수심에서 출발하여 경사면 위로 전파하면서 반사되는 정도를 예측한다. 이때 경사면의 폭 b를 달리하면서 반사율을 측정하여 유한요소법에 의한 수치 해와 비교한다. 두 번째로 Davies 와 Heathershaw (1983)의 Bragg 반사 실험을 수행한다. 즉, 파랑의 주기를 달리하면서 수심이 주기적으로 변하는 사면 위로 파랑이 전파하면서 반사되는 반사율을 측정하여 수리모형실험 결과와 비교하였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구과제(과제번호: R01-2000-000-00365-0)의 지원을 받아 수행되었다. 본 연구를 가능케 한 한국과학재단에 감사드립니다.

참고문헌

Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng.*, Vancouver, pp. 471-490.

Booij, N., 1983. A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Eng.*, 7, pp.191-203.

Chamberlain, P.G. and Porter, D., 1995. The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, 291, pp. 393-407.

Boussinesq, J., 1872. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J.*

Math. Pures et Appl. 2nd Series, 17,pp. 55-108.

Chen, Y. and Liu, P.L.-F., 1995. Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation. *J. Fluid Mech.*, 288, pp. 351-381.

Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, 144, pp.419-443.

Madsen, P.A. and Sorensen, O.R., 1992. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly varying bathymetry. *Coastal Eng.*, 18, pp.183-204.

Massel, S.R., 1993. Extended refraction- diffraction equation for surface waves. *Coastal Eng.*, 19, pp.97-126.

Nwogu, O., 1993. Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 119, pp.618-638.

Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, 27, pp.815-827.

Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., and Subramanya, R., 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.*, 294, pp.71-92.

Wei, G., Kirby, J.T., Sinha, A., 1999. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. *Coastal. Eng.*, 36, pp.271-299.