

불규칙파의 Bragg 반사 Bragg Reflection of Random Waves

정재상¹ · 조용식¹

Jaе-Sang Jung¹ and Yong-Sik Cho¹

1. 서 론

Bragg 반사는 입사된 주기파의 파장이 해저지형의 파장의 두 배가 될 때 공명현상(resonance)에 의해 반사율이 매우 커지는 물리현상을 말한다. 즉, 외해에서 주기성을 띄는 파랑이 입사해 올 때, 특정형태의 해저지형을 이용하면 상당량의 에너지를 외해로 반사시킬 수 있다. 이와 같은 Bragg 반사개념을 수중방파제(submerged breakwater)에 응용하면 항만이나 방파제 등의 해안구조물을 경제적으로 설계 및 보호 할 수 있고, 해안선 보호 및 불필요한 퇴적 등을 고려한 연안개발계획의 효율적 수립이 가능하다.

Bragg 반사는 Heathershaw(1982)에 의해 실험적인 연구가 수행된 이후, 많은 학자들에 의해 연구되어 왔다(Kirby, 1986; Yoon and Liu, 1987; Guazzelli *et al.*, 1992; Shu *et al.*, 1997, Cho and Lee, 2000). 국내에서는 조 등(1995)에 의해 최초로 연구가 시작되었다. 조 등은 Boussinesq 방정식으로부터 지배방정식을 유도하여, 이를 수치적으로 적분하였다. 입사파는 크노이드파(cnoidal waves)와 정현파(sinusoidal wave)를 사용하였으며, 주로 천해역을 대상으로 하였다.

본 연구에서는 일정한 주기를 갖는 해저지형을 통과하는 불규칙파(Random waves)의 Bragg 반사를 수치적으로 계산하였다. Peregrine(1967)에 의해 유도된 Boussinesq 방정식을 사용하여 통과파와 반사파를 지배하는 한 쌍의 상미분방정식을 유도하였으며, 이를 수치적으로 적분하여 불규칙파의 Bragg 반사를 해석하였다. Boussinesq 방정식은 약비선형(weakly nonlinear)과 약분산(weakly dispersive)을 동시에 포함하며, 비선형 천수방정식에 일부 동수압항을 포함시킨 것

이다.

불규칙파(Random waves)의 Bragg 반사는 Shu *et al.*(1997)이 확장형 완경사방정식(Extended mild-slope equation)을 지배방정식으로 하고, TMA shallow-water 스펙트럼을 적용하여 해석한 바 있다. TMA 스펙트럼은 Bouws *et al.*(1985)에 의해 개발되었으며, 천해역에서의 불규칙파를 잘 재현한다. 본 연구에서는 천해역과 일부 중간수심영역의 파랑변형을 잘 재현할 수 있는 Boussinesq 방정식을 지배방정식으로 하고, TMA 스펙트럼을 이용하여 불규칙파의 Bragg 반사를 계산하였다.

다음 장에서는 Boussinesq 방정식으로부터 지배방정식을 유도하는 과정을 기술하였고, 제 3장에서는 수치해석 방법과 결과에 대하여 고찰하였다. 마지막으로 제 4장에서는 결론을 기술한다.

2. 지배방정식의 유도

Peregrine(1967)에 의해 유도된 x 방향 무차원 Boussinesq 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \zeta)u] = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ & = \mu^2 \left[\frac{1}{2} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

여기서, ζ 는 수면변위, h 는 수심, u 는 x 방향 유속을 나타낸다. 식 (1)과 식 (2)를 유도하는 과정에서

¹ 한양대학교 토목공학과 (Corresponding Author : Yong-Sik Cho, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea, ysc59@hanyang.ac.kr)

$O(\epsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ 이 가정되었다. 식 (1)은 오차가 없는 연속방정식인 반면에 식 (2)는 절삭오차의 크기가 $O(\epsilon^2, \epsilon\mu^2, \mu^4)$ 인 운동량방정식이다.

매개변수 ϵ 과 μ^2 은 각각 비선형과 분산의 크기를 나타내며, 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon = \frac{a_0'}{h_0'}, \quad \mu^2 = (k' h_0')^2 \quad (3)$$

식 (3)에서 a 는 진폭이고, k 는 파수이다.

x 방향 수심 변화율은 식 (4)와 같은 크기를 가정한다.

$$O\left(\frac{dh}{dx}\right) \approx O(\mu^2) \quad (4)$$

자유수면변위와 유속은 시간에 대하여 주기를 갖는 것으로 가정하며, 식 (5)와 같이 Fourier 급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_n \zeta_n(x) e^{-i\Omega n t} \\ u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_n u_n(x) e^{-i\Omega n t} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 이며, 음수의 n 은 양수의 켈레복소수를 의미한다.

식 (1)과 (2)에서 u 를 소거하고, 식 (3)~(5)를 이용하여 정리하면 파랑의 진행과정을 지배하는 다음과 같은 한 쌍의 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dx} &= \left(-\frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 \Omega^3 n^3 \sqrt{h}}{6} \right) A_n \\ &+ \left(\frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} + \frac{i\mu^2 \Omega^3 n^3 \sqrt{h}}{6} \right) B_n e^{-2in\Omega\theta} \quad (6) \\ &+ NLT1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NLT1 &= -\frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) \\ &(A_s A_{n-s} + B_s B_{n-s} e^{-2in\Omega\theta}) \\ &- \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) \\ &(A_s B_{n-s} e^{-2i(n-s)\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{-2is\Omega\theta}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_n}{dx} &= \left(-\frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} - \frac{i\mu^2 \Omega^3 n^3 \sqrt{h}}{6} \right) B_n \\ &+ \left(\frac{1}{4h} \frac{dh}{dx} - \frac{i\mu^2 \Omega^3 n^3 \sqrt{h}}{6} \right) A_n e^{2in\Omega\theta} \quad (8) \\ &+ NLT2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NLT2 &= \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} (n + \Omega^2 s) \\ &(A_s A_{n-s} e^{2in\Omega\theta} + B_s B_{n-s}) \\ &+ \frac{i\epsilon\Omega}{4h\sqrt{h}} \sum_{s \neq 0, n} \frac{n-2s}{n} (n + \Omega^2 s) \\ &(A_s B_{n-s} e^{2is\Omega\theta} + B_s A_{n-s} e^{2i(n-s)\Omega\theta}) \end{aligned} \quad (9)$$

식 (6)과 식 (8)의 $NLT1$ 과 $NLT2$ 는 각각 비선형항을 의미한다. 식 (6)~(9)로부터 진폭함수 A_n 과 B_n 을 구한 후, 식 (10)에 대입하면 자유수면변위를 구할 수 있다.

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_n (A_n e^{in\Omega\theta} + B_n e^{-in\Omega\theta}) e^{-in\Omega t} \quad (10)$$

식 (10)에는 다음 관계식이 사용되었다.

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{h}} dx \quad (11)$$

3. 수치해석 및 결과분석

본 연구에서 유도된 지배방정식을 사용하여 정현파형 지형을 통과하는 불규칙파의 Bragg 반사를 해석하였다. 적용된 바닥지형의 형태는 Fig. 1과 같으며, 수심 h 는 식 (12)와 같이 정의된다.

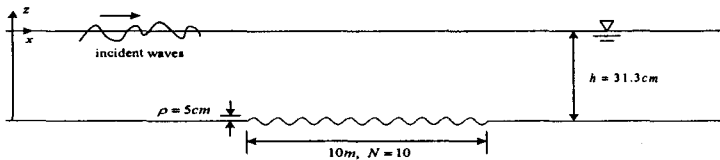


Fig. 1. Definition sketch of bottom topography and test conditions.

$$\begin{aligned}
h &= 1 - Sx, & 0 \leq x \leq L_1 \\
h &= 1 - Sx - \rho(\sin \delta x), & L_1 \leq x \leq L_2 \\
h &= 1 - Sx, & L_2 \leq x \leq L_3
\end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서, S 는 바닥경사, ρ 와 δ 는 각각 바닥지형의 진폭과 파수를 의미한다. 식 (6)과 식 (8)은 1차상미분방정식으로 4th-order Runge-Kutta 방법을 사용하여 적분할 수 있다.

본 모형의 타당성을 검토하기 위해 먼저 규칙파의 Bragg 반사를 해석하였다. Fig. 2는 사런(rippled bed)의 수가 4이고 $\rho/h = 0.32$ 인 경우이며, Fig. 3은 사런의 수가 10, $\rho/h = 0.16$ 이다. Fig. 2와 Fig. 3에서 Davies and Heathershaw (1984)의 수리모형실험 결과 및 고유함수전개법(Eigen function expansion method)에 의한 해석결과와 본 모형에 의한 결과를 비교 분석하였다. 비교 결과, 전체적으로 실험결과 및 고유함수전개법에 의한 결과와 잘 일치하였다. Fig. 2와 Fig. 3에서 k 는 입사파의 파수이며, δ 는 해저지형의 파수이다. Bragg 반사 조건인 $2k/\delta = 1$ 에서 반사율이 크게 증폭됨을 볼 수 있다.

불규칙파의 Bragg 반사 해석에서 초기 입력 스펙트럼은 TMA shallow-water 스펙트럼(Bouws *et al.*, 1985)이 사용되었으며, 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
S(f) &= \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp[-1.25(f/f_p)^{-4}] \\
&\times \gamma \exp[-(f/f_s - 1)^2 / 2\sigma^2] \phi_k(f, h)
\end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서 각 매개변수는 다음과 같이 정의되었다.

$$\alpha = 7.57 \times 10^{-4} \quad (14)$$

$$\sigma = \sigma_a, \quad f \leq f_p, \quad \sigma_a = 0.07 \quad (15)$$

$$\sigma = \sigma_b, \quad f \geq f_p, \quad \sigma_b = 0.09 \quad (16)$$

$$\phi_k(f, h) = \begin{cases} 0.5\omega_h^2 & \omega_h < 1 \\ 1 - 0.5(2 - \omega_h)^2 & 1 \leq \omega_h \leq 2 \\ 1 & \omega_h > 2 \end{cases} \quad (17)$$

여기서,

$$\omega_h = 2\pi f(h/g)^{1/2} \quad (18)$$

Fig. 1과 같은 해저지형에서의 Bragg 반사조건을

만족시키기 위해서 f_p (peak frequency)는 0.76Hz를 사용하였다. Fig. 1에서 N 은 바닥지형을 구성하는 사런의 수를 의미한다.

Fig. 4는 스펙트럼의 폭이 좁은 경우 불규칙파의 Bragg 반사를 해석한 것으로, $\gamma = 20$ 이 사용되었으며, Fig. 5는 스펙트럼의 폭이 넓은 경우로써 $\gamma = 2$ 가 사용되었다. Fig. 4의 경우 f_p 인 파랑을 기준으로 했을 때, $\epsilon = 0.018$, $\mu^2 = 0.024$ 이며, Fig. 5의 경우 $\epsilon = 0.006$, $\mu^2 = 0.024$ 이다. Fig. 4와 Fig. 5에서 입사파 및 반사파의 스펙트럼을 도시하였다. 수치해석 결과, 파랑의 에너지가 가장 큰 진동수에서 Bragg 반사에 의하여 반사파가 증폭되었다. 특히, 스펙트럼의 폭이 좁은 경우 Bragg 반사 조건에 가까운 파랑들이 밀집되어 존재하므로, 보다 큰 반사가 발생함을 알 수 있다.

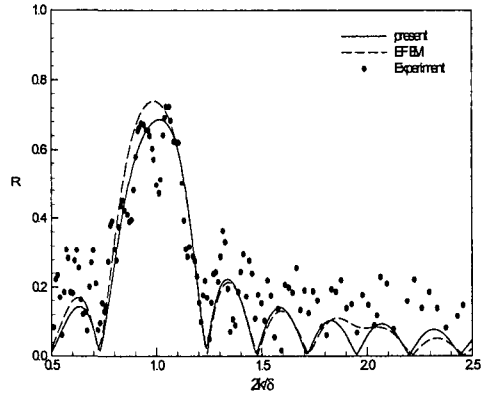


Fig. 2. Comparison of the present equation and the Eigen function expansion method with the experimental data.

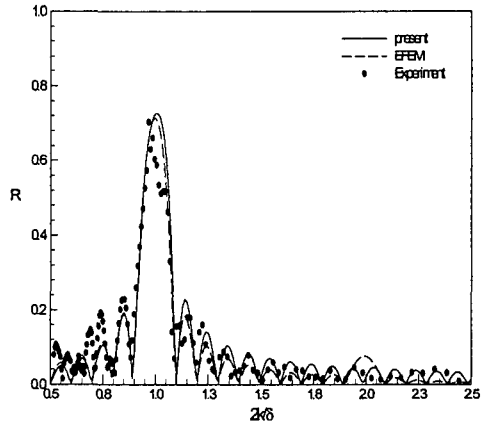


Fig. 3. Comparison of the present equation and the Eigen function expansion method with the experimental data.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

- 조용식, 이종인, 이정규, 윤태훈, 1995. 천해파의 Bragg 반사. 대한토목학회논문집, 15(6), 1823-1832.
- Bouws, E., Gunther, H., Rosenthal, W. and Vincent, C.L., 1985. Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form. *J. Geophys. Res.*, 90(C1), 976-986.
- Cho, Y.-S. and Lee, C.H., 2000. Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topographies. *J. Coastal Res.*, 16(3), 870-876.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443.
- Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M., 1992. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.*, 245, 301-317.
- Heathershaw, A.D., 1982. Seabed-wave resonance and sand bar growth. *Nature.*, 296, 343-345.
- Kirby, J.T., 1986. A general wave equations for waves over rippled bed. *J. Fluid Mech.*, 162, 171-186.
- Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, 27, 815-827.
- Shu, K.D., Lee, C. and Park, W.S., 1997. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 32, 91-117.
- Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F., 1987. Resonant reflection of shallow-water waves due to corrugated boundaries. *J. Fluid Mech.*, 180, 451-469.

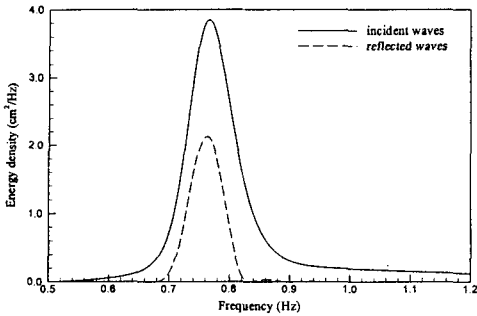


Fig. 4. Incident and reflected wave spectra of narrow-banded TMA spectrum.

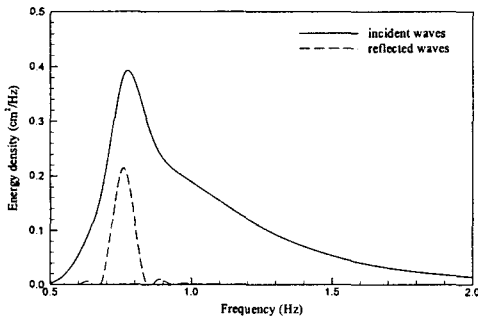


Fig. 5. Incident and reflected wave spectra of broad-banded TMA spectrum.

4. 결 론

Boussinesq 방정식으로부터 유도된 한 쌍의 상미분 방정식을 사용하여, 불규칙파의 Bragg 반사를 해석하였다. 바닥지형은 정현파형 지형이며, 불규칙파의 스펙트럼은 TMA shallow-water 스펙트럼을 사용하였다. 모형의 검증을 위해 규칙파의 Bragg 반사에 대한 수리실험 결과와 비교하였으며, 비교적 잘 일치하였다. 불규칙파의 Bragg 반사 해석 결과, 스펙트럼의 폭이 좁은 경우가 스펙트럼의 폭이 넓은 경우에 비해서 보다 많은 양의 파랑 에너지를 의해로 반사함을 알 수 있었다.

본 연구에서 수치해석 영역의 비선형성이 매우 작아서 비선형의 크기가 파랑변형에 그다지 큰 영향을 주지 않았다. 그러나 비선형성이 보다 큰 천해역의 경우 비선형의 크기가 파랑의 반사에 미치는 영향은 매우 클 것이다. 그러므로 이에 대한 추가 연구가 필요할 것으로 판단된다.