

K&C 모델을 이용한 콘크리트 비선형 해석

Nonlinear Analysis of Concrete Using K&C Model

김영진* 김장호** 조병완***
Kim, Young Jin Kim, Jang Ho Jo, Byung Wan

ABSTRACT

This paper develops a relatively comprehensive and sophisticated constitutive model of concrete for finite element analysis of concrete structures. The present model accounts for the hydrostatic pressure sensitivity and Lode angle dependence behavior of concrete, not only in its strength criterion, but also in its hardening characteristics. The implementation is carried out through incorporating the developed concrete model in User Subroutine Material(UMAT) of the general-purpose FE program ABAQUS(v.5.8). It is found that the model can sufficiently predict the hardening as well as the softening behaviour of concrete under high confining pressure.

1. Introduction

미철근, 나선철근 등에 의해 구속된 철근콘크리트 기둥은 구속응력의 정도에 따라 구조적 거동이 크게 달라진다. 구속응력상태에서 3축 응력을 받는 콘크리트는 구속응력이 증가할수록 강도와 연성은 증가한다. ⁽¹⁾

최근, 널리 사용되고 있는 콘크리트 합성부재인 콘크리트 충전강관 (Concrete Filled Steel Tube, CFT), 강판과 복합재료 등으로 보강된 콘크리트 기둥 등은 콘크리트의 구속응력을 증가시켜 구조물의 강도와 연성을 증가시키는 좋은 예라 할 수 있다.

외부 부재에 의해 구속된 콘크리트 합성구조물의 구조적 거동을 예측하기 위해서는 부재간의 상호 작용에 의해서 발생하는 구속응력을 고려하여야 한다. 따라서, 이러한 콘크리트 합성구조물에 대한 해석의 정확성은 구속응력에 따른 콘크리트의 응력-부피변형률(volume strain)을 표현할 수 있는 콘크리트 비선형 모델의 신뢰성에 의해 좌우된다. 또한, 합성구조물의 재료간 상호작용력을 고려하기 위하여 작용하는 하중에 따라 변화하는 구속응력 (수동구속) 을 받는 콘크리트 3차원 비선형 해석이 필수적이다. ^{(2), (3)} 그러나, 지금까지 구속된 콘크리트의 거동에 대한 수많은 연구가 진행되어 왔으나 콘크리트 재료의 불균일성 등으로 인해 아직까지 많은 연구를 필요로 하고 있다.

2. Concrete Material Model

2.1. Deviatoric Response

Maximum Failure Surface

* 정회원, 한양대학교 토목공학과 박사과정
** 정회원, 세종대학교 토목공학과 교수
*** 정회원, 한양대학교 토목공학과 교수

수많은 연구자들이 콘크리트에 적합한 failure surface를 찾기 위해 노력하였으며, failure surface를 표현하는 제안식을 발표하였다. ⁽⁴⁾ 이러한 식들은 일반적으로 종속변수의 개수에 따라 구분된다. 상대적으로 적은 변수로 인해 콘크리트의 비선형해석의 모델로서 Drucker-Prager model과 Drucker-Prager Cap model 등이 많이 사용되어져 왔다. 그러나 이러한 모델은 압력, p 에 따라 failure surface의 기울기가 변하는 현상을 설명하지 못한다. 따라서, 이러한 모델은 압력의 변화에 따른 거동을 적절히 반영하지 못하는 단점이 있다. ⁽⁵⁾

이에 본 연구에서는 기존 연구자들의 실험결과와 매우 일치하는 결과를 나타내는 Willan-Warnke(five-parameter) model을 failure surface로 사용하였다. Willan-Warnke model에서 hydrostatic stress axis로 부터의 반경, r ($r=\sqrt{2J_2}$)은 mean stress, σ_m ($\sigma_m=(1/3)I_1=-p$)과 lode angle, θ 의 함수로서 Eq. (1)와 같다.

$$r(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_i^2)\cos\theta + r_c(2r_i - r_c)\sqrt{4(r_c^2 - r_i^2)\cos^2\theta + 5r_i^2 - 4r_i r_c}}{4(r_c^2 - r_i^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_i)^2} \quad (1)$$

여기서, I_1 =the first invariant of stress

Eq. (1)에서 r_c, r_i 는 각각 hydrostatic stress axis로 부터의 최대반경과 최소반경을 나타낸다.

본 연구에서 사용되는 $\Delta\sigma_m$ 과 Willan-Warnke model에서 사용된 반경, r 은 식 (2)의 관계를 나타낸다.

$$\Delta\sigma_m = \sqrt{3J_2} = \sqrt{3/2}r \quad (2)$$

Initial Yield Surface

본 연구에서는 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 W.F. Chen 등에 의해 제안된 initial yield surface를 사용하였다. 사용된 initial yield surface는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 4영역(tension-tension, tension-compression, compression-tension, compression-compression)으로 구분되며, Eq. (3)과 같이 나타낸다. ⁽⁵⁾

$$\Delta\sigma_y = k(\sigma_m, k_0)\Delta\sigma_m \quad (3)$$

여기서 k, k_0 는 재료상수를 나타낸다.

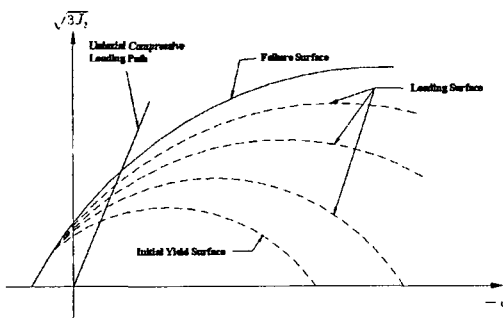


Fig. 1 Nonuniform Hardening Plasticity Model

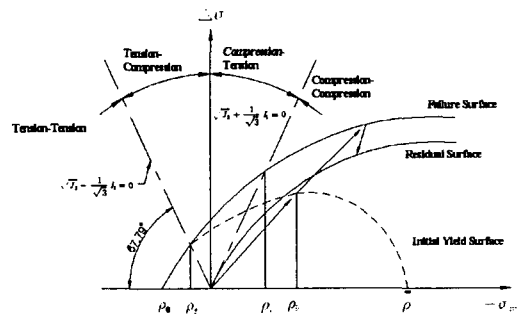


Fig. 2 Construction of Yield Surface

Residual Surface

3축 응력 상태에서의 residual surface에 대한 연구는 상대적으로 거의 이루어지지 않았다. Failure surface를 지나 softening이 발생한 콘크리트는 더 이상 인장력에 저항하지 못한다. Malvar는 콘크리트의 residual surface, $\Delta\sigma_r$ 을 Eq. (4)와 같이 압력, p 의 함수로 표현하였다.⁽⁶⁾

$$\Delta\sigma_r = \frac{p}{a_{1f} + a_{2f}p} \quad (4)$$

Stress limits ⁽⁶⁾

콘크리트와 같은 brittle material의 응력-변형률 곡선은 선형영역과 hardening 영역 그리고 softening 영역 등 3영역으로 나눌 수 있다. 유사한 방법으로 압력, p ($p = -1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}$, δ_{ij} = kronecker delt a) 와 deviatoric stress (S_{ij})의 함수인 loading surface, $\Delta\sigma$ ($\Delta\sigma = \sqrt{3J_2}$, J_2 = second invariant of deviatoric stress)의 곡선은 Fig. 2에서 보듯이 선형영역을 나타내는 initial surface ($\Delta\sigma_y$) 와 hardening 영역을 나타내는 failure surface ($\Delta\sigma_m$) 그리고 softening 영역을 나타내는 residual surface ($\Delta\sigma_r$) 등 3종류의 surface로 표현된다. 하중을 받는 재료는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 원점에서 시작하여 $\Delta\sigma_y$ 에 도달할 때까지 선형상태에 놓이게 되며, $\Delta\sigma_y$ 를 벗어나 $\Delta\sigma_m$ 에 도달할 때까지 hardening 거동을 나타낸다. 이와 유사하게 $\Delta\sigma_m$ 에 도달한 후에는 $\Delta\sigma_r$ 로 떨어지게 되어 softening 거동을 나타낸다.

선형영역을 초과한 콘크리트의 $\Delta\sigma$ 는 effective plastic strain ($d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{2/3}d\epsilon_{ij}^p$)의 함수인 λ 의 값에 따라 Eq. (5)와 Eq. (6)으로 나타낸다.

$$\Delta\sigma = \eta(\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_y) + \Delta\sigma_y \quad \text{for hardening} (\lambda \leq \lambda_m) \quad (5)$$

$$\Delta\sigma = \eta(\Delta\sigma_m - \Delta\sigma_y) + \Delta\sigma_r \quad \text{for softening} (\lambda > \lambda_m) \quad (6)$$

여기서 η 는 선형영역에서 $\eta=0$, 최대응력에서 $\eta=1$ 그리고 잔류응력에서 $\eta=0$ 을 나타내는 λ 의 함수로 표현된다. λ 는 $d\bar{\epsilon}^p$ 의 함수로서 Eq. (7)과 같다. 그리고 λ_m 는 failure surface에 도달시의 λ 값을 의미한다.

$$\lambda = \int_0^{\bar{\epsilon}^p} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{(1 + p/f_i)^{b_i}} \quad (7)$$

여기서 f_i = tensile strength, b_2 = material constant를 나타낸다.

2.2. Jacobian Matrix

각 iteration에서 변화하는 변형률 ($d\epsilon_{ij}$)은 Eq. (8)과 같이 탄성형률 ($d\epsilon_{ij}^e$)과 소성변형률 ($d\epsilon_{ij}^p$)의 합으로 나타낼 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (8)$$

Failure function, f 를 Eq. (9)과 같이 정의할 때, 변화하는 $d\epsilon_{ij}^p$ 은 flow rule로부터 Eq. (10)과 같다.

$$f = \sqrt{3J_2} - Y(\sigma, \eta(\lambda)) \quad (9)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = \nabla_{\sigma} f d\tilde{\mu} = \left\{ \frac{3S_{ij}}{2\sqrt{3J_2}} + \omega \frac{\hat{Y}_{,p}\delta_{ij}}{3} \right\} d\tilde{\mu} = (S_{ij} + m\delta_{ij})d\mu \quad (10)$$

여기서 ω = the fraction of associativity, $d\tilde{\mu}$ = a proportionality constant, $d\mu$ = a re-scaled version of $d\tilde{\mu}$, $m = 2\omega\sqrt{3J_2} \hat{Y}_{,p}/9$ 를 나타낸다.

Eq. (10)를 Eq. (8)에 대입한 후, elastic stiffness tensor, D_{ijkl}^e 과 σ_{ij} 에 대한 failure function, f 의 기울기, $\nabla_{\sigma} f$ 를 곱하여 정리하면 다음 Eq. (11)과 같다.

$$(\nabla_{\sigma} f)D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} = (\nabla_{\sigma} f)d\sigma_{ij} + \{ (\nabla_{\sigma} f)D_{ijk}^e S_{kl} + (\nabla_{\sigma} f)D_{ijk}^e mI_{kl} \} d\mu \quad (11)$$

Consistency condition으로 부터 Eq. (11)의 $(\nabla_{\sigma} f)d\sigma_{ij}$ 는 Eq. (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$(\nabla_{\sigma} f)d\sigma_{ij} = -f_{,\lambda}d\lambda = Y_{,\lambda}d\lambda \quad (12)$$

K&C Model(L. Javier Malvar 1998)에서 incremental damage parameter, $d\lambda$ 는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$d\lambda = h(\sigma_{ij})d\bar{\epsilon}^p = h(\sigma_{ij})\sqrt{(2/3)d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = h(\sigma_{ij})\sqrt{(2/3)S_{ij}S_{ij}}d\mu = g(\sigma_{ij})d\mu \quad (13)$$

여기서 $g(\sigma_{ij}) = h(\sigma_{ij})\sqrt{(2/3)S_{ij}S_{ij}}$ 를 나타낸다.

Eqs. (11), (12), (13)으로 부터 $d\mu$ 를 구할 수 있으며, 이를 단순화시켜 나타내면 Eq. (14)와 같다.

$$d\mu = \frac{(\nabla_{\sigma} f)D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}}{2G\sqrt{3J_2}\left(1 + \frac{\omega K \hat{Y}_{,p}^2}{3G}\right) + \hat{Y}_{,\lambda}g(\sigma)} \quad (14)$$

Eq. (10)와 Eq. (14)로 부터 증가하는 응력, $d\sigma_{ij}$ 과 equivalent stiffness tensor, D_{ijkl}^{eq} 는 각각 Eq. (15)와 Eq. (16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) = D_{ijkl}^{eq} d\epsilon_{kl} \quad (15)$$

$$D_{ijkl}^{eq} = D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijmn}^e (S_{mn} + mI_{mn}) f_{,\sigma_n} D_{pqkl}^e}{2G\sqrt{3J_2}\left(1 + \frac{\omega K \hat{Y}_{,p}^2}{3G}\right) + \hat{Y}_{,\lambda}g(\sigma)} \quad (16)$$

3. Modeling

해석에 사용된 모델링은 만능시험기 (Universal Test Machine, UTM)를 이용한 전형적인 콘크리트 원주형 공시체의 실험방법과 triaxial cell을 이용한 standard triaxial test의 실험방법을 고려하였다. Fig. 3에 나타낸 바와 같이 대칭성을 이용하여 C3D8 요소로 원주형 공시체의 1/2을 모델링하고 공시

체의 상하단에 rigid body sell 요소를 이용하여 가력판을 묘사하였다. 가력판을 이용한 하중전달 방법은 실제 공시체의 상하단에 동일한 응력이 아닌 동일한 변위가 발생하여 공시체의 상하단에서 응력이 다르게 작용한다는 점을 고려한 것이다. ⁽⁷⁾ 가력판과 콘크리트 공시체는 ABAQUS에서 지원하는 contact을 이용하여 마찰에 의해 미끄럼에 저항하고 변위에 의해 하중이 전달하도록 하였다. 또한, softening의 발생으로 인해 하중이 감소할 때 해의 수렴성을 향상시키기 위하여 상단의 가력판의 reference point에 변위를 가하는 변위제어 방법으로 해석하였다. 해석결과는 하단의 reference point의 반력과 공시체 단면적을 이용하여 응력을 구하고 공시체의 중앙부에서의 변형률을 이용하여 응력-변형률 선도를 나타내었다.

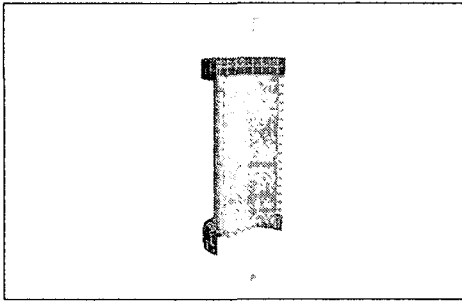


Fig. 3 Modeling of Concrete Specimen

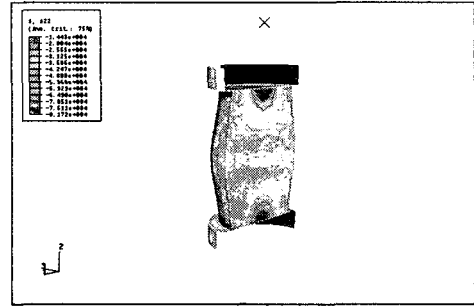
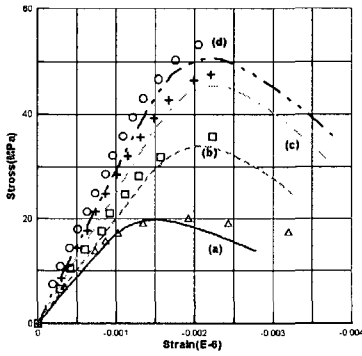
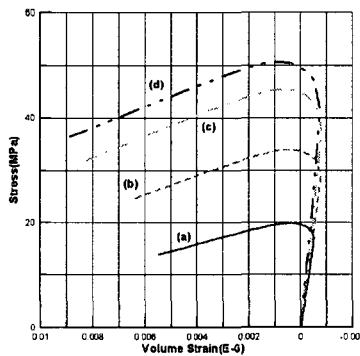


Fig. 4 S22 Contour



(a) stress-strain curve, ϵ_1



(b) stress-volume curve

Fig. 5 Comparison with uniaxial test data from the literature

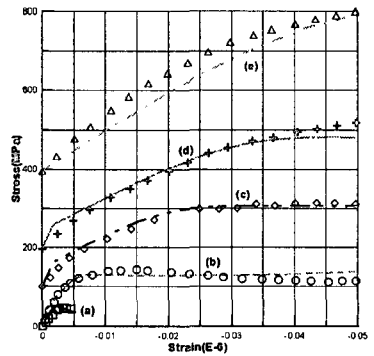


Fig. 6 Comparison with standard Triaxial Data (under high confinement)

4. 해석 결과

제안된 콘크리트 비선형 모델을 UMAT으로 작성하여 ABAQUS를 이용한 해석결과의 정확성을 확인하기 위하여 콘크리트의 강도에 대한 영향과 구속응력의 영향에 대하여 검토하였다. 지금까지 제안된 대부분의 콘크리트 모델들이 낮은 구속응력하에서의 거동을 평가한 반면에 본 연구에서는 400 MPa의 높은 압력에서 모델의 정확성을 확인하였다.

Fig. 5는 Hognestad 등의 실험결과와 제안된 모델의 비교를 나타낸다. 사용된 공시체 (a), (b), (c), (d)의 탄성계수, E 는 각각 18.7, 32.0, 26.9, 31.6 GPa이며, 압축강도, f_c 는 21.1, 31.2, 46.0, 51.0 MPa이다. ⁽⁸⁾ Fig. 5 (a)에서 알 수 있듯이 제안된 모델이 콘크리트의 강도의 변화에 따른 응

력-수직변형률 관계를 적절히 묘사하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5 (b)는 동일한 공시체에 대하여 응력-부피변형률을 나타낸다. 횡방향 변형률이 다소 크게 나타나는 단점이 있으나 전체적인 거동은 일반적인 공시체의 실험결과와 유사함을 알 수 있다.

Fig. 6은 U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station(WES)에서 실시한 일정한 3축 응력 상태에서 추가로 1축 응력을 증가시켜 실시한 실험결과와 해석결과의 비교를 나타낸다. ⁽⁴⁾ 사용된 콘크리트의 $E=35.0GPa$, $\nu=0.18$, $f_c=45.5MPa$, $f_t=4.55MPa$ 이며, 초기 압력, p 는 각각 0.0, 20.0, 100.0, 200.0, 400.0 MPa이다. 해석결과에서도 알 수 있듯이 $p=200.0MPa$ 까지 실험값과 거의 일치하는 결과를 나타내었다. 그러나, $p=400.0MPa$ 인 경우, 실험값과 비교하여 다소 낮은 응력을 나타내었다. 이는 Willam-Warnke model에서 maximum failure surface를 정의하기 위해 사용된 변수가 상대적으로 낮은 압력하에서의 실험결과를 이용하여 나타낸 결과인 것으로 추정된다. 따라서, 높은 압력하에서의 실험결과와의 비교를 통해 변수의 정확성을 확보한다면 보다 실험값에 근접하는 해석이 될 것으로 예상된다.

5. Conclusion

본 논문에서는 콘크리트의 hardening과 softening 거동을 적절히 묘사하는 콘크리트 비선형 모델을 제시하였다. 제안된 콘크리트 모델의 강성행렬을 유도하고 상용 FE 프로그램인 ABAQUS의 UMAT에 적용함으로써 모델의 신뢰도와 사용성을 향상시켰다. 제안된 모델은 콘크리트의 강도의 변화를 적절히 묘사하였으며, 200MPa의 높은 압력하에서의 콘크리트 실험결과와도 거의 동일한 결과를 나타내었다.

제안된 모델은 3축 응력 상태에서의 압축응력에 대한 검증을 실시하였으며, 꾸준한 연구를 통해 인장응력과 반복하중에 대한 콘크리트 모델의 정확성을 확보하는 경우, 실제 콘크리트 구조물의 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. Chen, W.F., Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, 1982, p.20.
2. Lan, Y.M., "Finite Element Study of Concrete Columns with Fiber Composite Jackets", PhD dissertation, Purdue University, 1998, pp.44~55.
3. Chen, W.F., Constitutive Equations for Engineering Materials, Elsevier, 1994, p.836.
4. Baxant, Z.P., Xiang, Y., Adley, M.D., Prat, P.C., Akers, S.A., "Microplane Model for Concrete: II: Data Delocalization and Verification", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 122. No. 3, March, 1996, pp.255~262.
5. Han, D.J., Chen, W.F., "Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, No. 4, April, 1987, pp.577~593.
6. Malvar, L.J., Crawford, J.E., Wesevich, J.W., Simons, D., "A Plasticity Concrete Material Model for DYNA3D", Int. J. Impact, Vol. 19, Nos. 9-10, 1997, pp.847-873.
7. ABAQUS User's Manual, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2001, p.24.2.30.
8. Hogestad, E., Hanson, N.W., McHenry, D., "Concrete stress distribution in ultimate strength design", J. ACI, 1955, Vol. 52, pp.455~477.