

휠베이스에 불확실성을 갖는 이동로봇의 자세 추정을 위한 크라인 스페이스 강인 확장 칼만 필터의 설계

Krein Space Robust Extended Kalman filter Design for Pose Estimation of Mobile Robots with Wheelbase Uncertainties

진 승 회*, 윤 태 성**, 박 진 배*

(Seung Hee Jin, Tae Sung Yoon and Jin Bae Park)

* 연세대학교 전기 전자 공학과(전화:(02)2123-2773, 팩스:(02)362-4539, E-mail : shjin6034@hotmail.com, jbpark@control.yonsei.ac.kr)

** 창원대학교 전기 공학과(전화:(055)279-7513, 팩스:(055)263-9956, E-mail : tsyoon@sarim.changwon.ac.kr)

Abstract : The estimation of the position and the orientation for the mobile robot constitutes an important problem in mobile robot navigation. Although the odometry can be used to describe the motions of the mobile robots, there inherently exist the gaps between the real robots and the mathematical model, which may be caused by a number of error sources contaminating the encoder outputs. Hence, applying the standard extended Kalman filter for the nominal model is not supposed to give the satisfactory performance. As a solution to this problem, a new robust extended Kalman filter is proposed based on the Krein space approach. We consider the uncertain discrete time nonlinear model of the mobile robot that contains the uncertainties represented as sum quadratic constraints. The proposed robust filter has the merit of being constructed by the same recursive structure as the standard extended Kalman filter and can, therefore, be easily designed to effectively account for the uncertainties. The simulations will be given to verify the robustness against the parameter variation as well as the reliable performance of the proposed robust filter.

Keywords : Krein space approach, robust extended Kalman filter, mobile robot, sum quadratic uncertainties,

1. 서론

이동 로봇의 주행에서 로봇의 정확한 위치(position)와 방향(orientation) 즉, 포즈(pose)의 추정은 매우 중요한 문제를 구성하고 있으며, 지금까지 이에 관련된 많은 연구가 행해져 오고 있다[1-5]. 이러한 추정치를 얻기 위해 가장 일반적인 방법으로서 확장 칼만 필터가 사용되어져 왔는데, 이는 칼만 필터 알고리즘이 최소 평균 자승의 개념으로 볼 때 의심할 여지없이 최적이라 할 수 있으며, 더욱이, 이동 로봇의 수학적 모델이 보통 일종의 비선형 방정식으로 표현된다는 사실에 기인하기 때문이다. 확장 칼만 필터가 로봇의 포즈 추정치와, 이와 관련된 불확실한 추정 정도를 묘사하는 공분산 행렬의 추정치를 얻기 위해서, 비선형 시스템 모델과 더불어 내, 외부 센서로부터 획득 가능한 측정치를 사용한다는 사실은 잘 알려진 바와 같다. 그러므로, 추정치들이 최적인 상태로 유지되기 위해서는 이동 로봇으로부터 완벽한 모델을 이끌어 내는 작업이 요구된다. 그러나, 이동 로봇 자체의 구조와 로봇의 움직임과 관련된 피할 수 없는 오차들이 있기 때문에 이동 로봇의 완벽한 모델을 구하는 것이 거의 불가능하다는 사실로부터 항상 문제가 야기되며[2-4], 이와 같이 정확한 모델을 구할 수 없는 상황에서는 칼만 필터

를 포함, 대부분의 필터들은 다소 불안정하고 원하지 않는 형태로 작동하게 된다[6-8]. Larsen 등[2,3]은 필터의 프로세스 잡음 공분산 행렬값을 증가시킴으로써 부정확한 모델의 영향을 줄이려고 노력하였는데, 이는 불확실성을 모사하기 위하여 모델 내에 가상 프로세스 잡음을 첨가한 것으로 생각할 수 있다.

본 논문에서는, 이동 로봇의 비선형 모델에 포함될 수도 있는 파라미터 불확실성을 다른 형태로 변형하지 않고 직접적으로 다루고자 한다. 여기에서 사용되는 불확실성은 일종의 유한 에너지 제한 조건(energy bounded constraints) 즉, sum quadratic constraint (SQC)[9]로서 표현되어지며, 이에 대응할 수 있는 강인 확장 칼만 필터를 부정 내적 공간(indefinite inner product space)[10]의 일종인 크라인 스페이스(Krein space) 접근법을 사용하여 새로운 방법으로 설계하고자 한다. 이동 로봇을 표현하는 불확정 비선형 모델의 선형화로부터 얻을 수 있는 근사 모델(approximated model)에 대하여, 먼저 적당한 형태의 부정 이차 가격함수(indefinite quadratic cost function)를 정하고 이에 대응하는 크라인 스페이스 상태 공간 모델을 구성한다. 마지막으로, 구성된 모델에 크라인 스페이스 칼만 필터 알고리즘[11-13]을 적용하기만 하면, 크라인 스페

이스 강인 확장 칼만 필터(Krein space robust extended Kalman filter: KREKF)를 설계할 수 있음을 보인다.

II. 이동 로봇의 모델

이동 로봇이 두 개의 능동 바퀴(driving wheel)로 구동되며 각각의 바퀴에 주행 거리계 센서(odometric sensor; encoder)가 장착되어 있을 때, 포즈 추정기를 설계하기 위한 가장 쉽고 일반적인 방법은 이들 엔코더값을 시스템 모델로 사용하는 것이다[2-4]. 추가적인 네 개의 수동 바퀴들(passive wheels; castors)을 로봇의 코너 각각에 장착한 이동 로봇의 한 예가 그림 1에 나타나 있다.

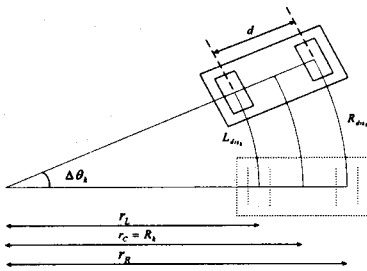


그림 1. 두개의 구동 바퀴와 엔코더 시스템을 갖는 이동 로봇

Fig. 1. A mobile robot with a dual drive and encoder system

여기서 한 샘플 구간 동안의 방향 편차(directional deviation)는 $\Delta\theta_k$ 로 나타내며, 엔코더는 오른쪽, 왼쪽 바퀴 각각이 주행한 거리 R_{dis} , L_{dis} 에 상응하는 각의 증가분(angular increments)를 측정하게 된다.

r_R , r_L , $r_c = R_k$ 는 오른쪽, 왼쪽 바퀴와 이동 로봇 중심의 회전반경을 나타내며, d 는 구동 바퀴간의 거리 즉 휠베이스(wheelbase)를 나타낸다. 그림 1에 따르면 R_{dis} 와 L_{dis} 는 또한 방향 편차와 회전 반경으로 변환하여 표현할 수 있다.

$$\Delta\theta_k = \frac{R_{dis} - L_{dis}}{d} \quad (1)$$

$$R_k = \frac{d}{2} \frac{R_{dis} + L_{dis}}{R_{dis} - L_{dis}} \quad (2)$$

전역좌표계(global coordinate frame)에서의 세 좌표 (x_k, y_k, θ_k) 는 이동 로봇에 대한 상태 벡터를 구성하며, 이는 그림 2와 같이 표현할 수 있다. 이와 같은 상태 벡터는 임의의 추가적인 측정치 z_k 를 통해 관측될 수 있으므로, 이동 로봇에 대한 공칭 모델(nominal model)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - \frac{1}{4d} AB \sin \theta_k + \frac{1}{2} A \cos \theta_k \\ y_k + \frac{1}{4d} AB \cos \theta_k + \frac{1}{2} A \sin \theta_k \\ \theta_k + \frac{B}{d} \end{bmatrix} + w_k \quad (3)$$

$$z = h_k(x_k, y_k, \theta_k) + v_k$$

여기서 w_k 와 v_k 는 각각 백색 가우시안 프로세스와 측정 잡음들을 나타내고 $h_k(\cdot)$ 는 측정에 사용된 센서의 종류에 따라 다르다. 위 식 (3)에서 $A = R_{dis} + L_{dis}$ 와 $B = R_{dis} - L_{dis}$ 는 시스템의 입력으로 사용됨을 주목한다.

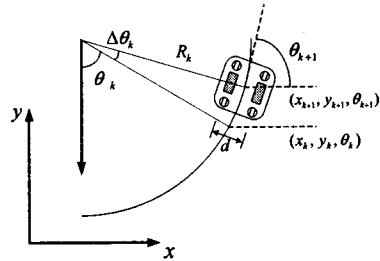


그림 2. 전역 좌표계에서의 이동 로봇의 상태 벡터 표현

Fig. 2. The representation of the state vector for the mobile robot in a global coordinate frame

III. 크라인 스페이스 강인 확장 칼만 필터 설계

1. 문제 구성

다음과 같은 시변 불확정 비선형 이산시간 시스템을 고려해 보자

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f_i(x_i) + \bar{g}_i(x_i) \bar{w}_i \\ y_i &= h_i(x_i) + \bar{v}_i \\ s_i &= k_i(x_i) \end{aligned}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (4)$$

여기서 $f_i(\cdot)$, $\bar{g}_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$ 그리고 $k_i(\cdot)$ 은 smooth한 비선형 함수들이고 \bar{w}_i , \bar{v}_i 는 백색 가우시안 잡음으로 가정한 불확정 입력들(uncertainty inputs)이다. y_i 는 측정된 출력값이고 s_i 는 불확정 출력(uncertainty output)이다. 불확정 비선형 시스템 (4)는 다음과 같은 유한 에너지 제한 조건 즉, SQC를 만족한다.

$$\bar{x}_0^* \Pi_0^{-1} \bar{x}_0 + \sum_{i=0}^N (\bar{w}_i^* Q_i^{-1} \bar{w}_i + \bar{v}_i^* R_i^{-1} \bar{v}_i) \leq \epsilon + \sum_{i=0}^N \|s_i\|^2 \quad (5)$$

여기서 ϵ 은 가상 에너지 한계(virtual energy bound)로 생각할 수 있는 임의의 작은 양의 실수이고 $\bar{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0$ 는 초기 추정 오차를 나타낸다.

확장 칼만 필터[14]에서 일반적으로 해오던 것과 같이 식 (4)의 비선형 시스템 함수들은 \hat{x}_{ki} 와 $\hat{x}_{k(i-1)}$ 근처에서 Taylor 급수로 전개되어 다음과 같

은 선형화된 모델로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + G_i \bar{w}_i + p_i \\ y_i &= H_i x_i + \bar{v}_i + q_i \\ s_i &= K_i x_i + r_i \end{aligned}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (6)$$

여기서 $F_i = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_i}$, $G_i = \bar{g}_i(\hat{x}_{ii})$,

$$H_i = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i-1}}, \quad K_i = \frac{\partial k_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i-1}} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} p_i &= f_i(\hat{x}_{ii}) - F_i \hat{x}_{ii} \\ q_i &= h_i(\hat{x}_{ii-1}) - H_i \hat{x}_{ii-1} \\ r_i &= k_i(\hat{x}_{ii-1}) - K_i \hat{x}_{ii-1} \end{aligned}$$

이며, 위와 같이 선형화된 시스템 역시 제한 조건 (5)를 만족한다.

만일 다음과 같이 부정 이차 형태를 정의한다면

$$\begin{aligned} J(x_0, \bar{w}, \bar{v}) &= \bar{x}_0^* \Pi_0^{-1} \bar{x}_0 + \sum_{i=0}^N \bar{w}_i^* Q_i^{-1} \bar{w}_i \\ &+ \sum_{i=0}^N \bar{v}_i^* R_i^{-1} \bar{v}_i - \sum_{i=0}^N \|s_i\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

SQC (5)는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J(x_0, \bar{w}, \bar{v}) &= \bar{x}_0^* \Pi_0^{-1} \bar{x}_0 + \sum_{i=0}^N \bar{w}_i^* Q_i^{-1} \bar{w}_i \\ &+ \sum_{i=0}^N (\bar{y}_i - \bar{H}_i \bar{x}_i)^* \bar{R}_i^{-1} (\bar{y}_i - \bar{H}_i \bar{x}_i) \leq \epsilon \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$\bar{y}_i = \begin{bmatrix} y_i - q_i \\ -r_i \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

이다.

이 시점에서, 가상 측정 잡음 $\bar{y}_i - \bar{H}_i x_i$ 의 공분산 행렬 \bar{R}_i 이 부정(indefinite)이기 때문에 불확정 비선형 시스템 (4)에 전형적인 확장 칼만 필터를 직접 적용하는 것이 불가능하다는 것에 주목하면, 크라인 스페이스 투영법(Krein space projection method)를 사용해 야만 하는 정당성에 대해 이해할 수 있다.

이제, 강인 상태 추정 문제는, 제한 조건 (5)를 만족하는 불확정 비선형 이산시간 시스템 (4)가 주어졌을 때, 부정 이차 형태 (8)의 고정점(stationary point)을 계산하는 상태 추정치들을 찾는 문제로 귀결된다.

2. 크라인 스페이스 강인 확장 칼만 필터

앞절에서 강인 확장 칼만 필터 문제를 위해 형성된 부정 이차 가격 함수 (8)로부터, 다음과 같은 크라인 스페이스 상태 공간 모델을 도입할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + G_i \bar{w}_i + p_i \\ \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ -s_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_i \\ r_i \end{bmatrix}, \quad 0 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (9)$$

위의 시스템에 대하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{v}_i \\ -s_i \\ x_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{w}_j \\ \bar{v}_j \\ -s_j \\ x_0 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad \Pi_0 \quad (10)$$

이제, 크라인 스페이스 강인 확장 칼만 필터는 다음 정리에 의해서 주어진다.

정리 III.2.1

크라인 스페이스 강인 확장 칼만 필터 (KREKF)

제한 조건 (10)을 만족하는 크라인 스페이스 이산 시간 불확정 비선형 시스템 (9)이 주어졌을 때, 스칼라 이차 가격 함수 (8)을 고정화(stationarize)시키는 강인 확장 칼만 필터는 다음의 공식들에 의해 순환적으로 구해질 수 있다.

$$\bar{L}_i = \bar{P}_{ii-1} \bar{H}_i^* \bar{R}_i^{-1}, \quad (\bar{R}_{e,i} = \bar{H}_i \bar{P}_{ii-1} \bar{H}_i^* + \bar{R}_i) \quad (11)$$

$$\hat{x}_{ii} = \hat{x}_{ii-1} + \bar{L}_i \begin{bmatrix} y_i - h_i(\hat{x}_{ii-1}) \\ -k_i(\hat{x}_{ii-1}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{P}_{ii} = \bar{P}_{ii-1} - \bar{L}_i \bar{H}_i \bar{P}_{ii-1} \quad (13)$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = f_i(\hat{x}_{ii}) \quad (14)$$

$$\bar{P}_{i+1|i} = F_i \bar{P}_{ii} F_i^* + G_i Q_i G_i^* \quad (15)$$

□

IV. 시뮬레이션

본 절에서는 제안된 강인 필터의 성능을 검증하기 위하여, 바다과 바퀴의 비점접촉(nonpoint contact)에 기인한 유효 휠베이스에서 발생하는 유한 놈(norm-bounded)형태의 불확실성을 가진 이동 로봇의 모델을 사용한다. 또한 비교 목적을 위해, 전형적인 확장 칼만 필터를 같은 모델에 적용해 본다.

$X_i = [x_i, y_i, \theta_i]^T$ 라 정의하면, 이동 로봇에 대한 불확정 비선형 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$X_{i+1} = X_i + \begin{bmatrix} -\frac{D}{4} AB \sin \theta_i + \frac{1}{2} A \cos \theta_i \\ \frac{D}{4} AB \cos \theta_i + \frac{1}{2} A \sin \theta_i \\ DB \end{bmatrix} + E_i A_i(X_i) + w_i \quad (16)$$

$$z_i = X_i + v_i \quad (17)$$

여기서

$$E_i = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}, \quad k_i(X_i) = \begin{bmatrix} AB \sin \theta_i \\ AB \cos \theta_i \\ B \end{bmatrix}$$

이고 프로세스와 측정 잡음들은 각각 다음과 같은 공분산 행렬들을 갖는 영평균 백색 가우시안 잡음으로 가정한다.

$$Q_i = 0.1 \times 10^{-6} \times I, \quad R_i = 0.1 \times 10^{-3} \times I$$

샘플링 간격과 전체 운영 시간은 각각 0.01초와 30초로 선택되었고, 다른 모든 파라미터들은 2절에서와 같이 정의된다.

식 (16)에서의 불확실성 Δ 의 값을 대표적으로 -1, 0 그리고 1의 값으로 변화시켜볼 때, EKF와 KREKF 각각에 대한 모든 상태 변수의 추정 오차 분산값들을 표 1에 정리해 보았다.

표 1. 서로 다른 Δ 값에 대한 추정 오차 분산

Table 1. Estimation error variances for different values of Δ

		x	y	θ
$\Delta = -1$	EKF	5.47×10^{-4}	5.79×10^{-4}	9.15×10^{-2}
	KREKF	1.96×10^{-5}	2.01×10^{-5}	2.09×10^{-5}
$\Delta = 0$	EKF	7.14×10^{-7}	6.30×10^{-7}	5.99×10^{-7}
	KREKF	1.90×10^{-5}	1.92×10^{-5}	1.88×10^{-5}
$\Delta = 1$	EKF	2.72×10^{-4}	3.86×10^{-4}	8.87×10^{-2}
	KREKF	1.99×10^{-5}	1.96×10^{-5}	2.03×10^{-5}

표 1을 보면, 불확실성의 존재 여부에 상관없이 KREKF를 적용했을 때의 모든 상태에 대한 추정 오차 분산값들은 좀처럼 변하지 않는 반면, EKF의 경우는 다소 값의 변동이 있음을 알 수 있다. 구체적으로, KREKF의 추정 성능은, 불확실성이 존재할 경우, EKF의 성능보다 월등히 나올 뿐만 아니라 불확실성이 전혀 없는 경우에서도 크게 나빠지지 않는다는 것을 알 수 있다.

V. 결론

이동 로봇 주행의 중요한 부분으로서 위치와 방향의 추정 문제를 보다 현실적으로 구성하기 위하여, 본 논문에서는 로봇의 비선형 모델내에 존재할 수 있는 파라미터 불확실성을 직접적인 형태로 다루었으며, 이를 SQC를 통하여 나타내었다. 또한 이러한 시스템을 다루기 위한 강인 확장 칼만 필터를 크라인 스페이스 접근법에 근거하여 설계할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 파라미터 불확실성의 존재여부에 관계없이 KREKF는 지속적이면서도 허용할만한 성능을 나타낸다는 사실을 확인하였다. 결론적으로, 제안된 KREKF는 전형적인 EKF와 비교하여, 파라미터 불확실성에 대하여 훨씬 강인할 뿐만 아니라, 전체적인 추정 성능 면에서도 더욱 뛰어나다고 말할 수 있다.

참고문헌

[1] Maher Kaffel and Yves Dube, "Nonlinear filtering and control for an autonomous vehicle", Industry Application Society Annual Meeting, 1991. Conference Record of the 1991 IEEE, Sept. 28 - Oct. 4. Vol. 2, pp. 1360-1366, 1991.

[2] Thomas Dall Larsen, Nils A. Andersen and Ole Ravn, "A New approach for Kalman filtering on mobile robots in the presence of uncertainties," Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. On Control Application, pp. 1009-1014, 1999.

[3] Thomas Dall Larsen, Karsten Lentfer Hansen, Nils A. Andersen and Ole Ravn, "Design of Kalman filters for mobile robots; evaluation of the kinematic and odometric approach," Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. On Control Application, pp. 1021-1026, 1999.

[4] C. Ming Wang, "Location estimation and uncertainty analysis for mobile robots," Proc. of the 1988 Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1230-1235, 1988.

[5] F. Chenavier and J.L. Crowley, "Position estimation for a mobile robot using vision and odometry," Proc. of the 1992 Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2588-2593, 1992.

[6] M. Shergei, U. Shaked and C.E. de Souza, "Robust H_∞ nonlinear estimation," Int. J. Robust and Nonlinear Control, Vol. 10, pp. 395-408, 1996.

[7] L. Xie, C.E. de Souza and Y. Wang, "Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems: an H_∞ approach," Int. J. Robust and Nonlinear Control, Vol. 6, pp. 297-312, 1996.

[8] S.H. Jin and J.B. Park, "Robust H_∞ filtering for polytopic uncertain systems via convex optimization," IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 148, No. 1, pp. 55-59, Jan. 2001.

[9] A.V. Savkin and I.R. Pertersen, "Robust state estimation and model validation for discrete-time uncertain systems with a deterministic description of noise and uncertainty," Automatica, Vol. 34, No. 2, 1998.

[10] J. Bogner, *Indefinite inner product spaces*, Springer-Verlag, 1974.

[11] S.H. Jin, J.B. Park, K.K. Kim and T.S. Yoon, "Krein space approach to decentralized H_∞ state estimation," IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 148, No. 6, pp. 502-508, Nov. 2001.

[12] B. Hassibi, A.H. Sayed and T. Kailath, *Indefinite-quadratic estimation and control: a unified approach to H_2 and H_∞ Theories*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[13] B. Hassibi, A.H. Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein spaces: I. Theory," IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 41, No.1, pp. 18-33, 1996.

[14] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal filtering*, Prentice Hall, 1979.