

QPSK 신호 입력시스템에서의 유한 알파벳 기반 ML 블라인드 신호 추정 비교

A Consideration on ML Blind Signal Estimation based on Finite-Alphabet
Characteristic in QPSK Modulation

권순만, 김석주, 이종무, 김춘경, 천종민
(S. M. Kwon, S. J. Kim, J. M. Lee, C. K. Kim, J. M. Cheon)

한국전기연구원 계속제어연구그룹(전화:(055)280-1441, 팩스:(055)280-1476, E-mail : smkwon@keri.re.kr)

Abstract : In this paper, a performance comparison between two blind signal estimation algorithms in a LTI channel is considered. The two algorithms, Iterative Least-Squares with Projection (ILSP) and a modified ILSP, are based on the finite-alphabet property of input symbols. This case typically arises in a multiple access system with a sensor array antenna at the receiving end.

We start with the formulation of a maximum-likelihood (ML) estimation problem under an additive white Gaussian noise assumption. A blind ML estimator is derived with its iterative algorithm for calculation. Then we narrow down the consideration of this problem to QPSK case so that a modified algorithm is proposed for $\pi/4$ -QPSK case.

The modified version is compared with the original ILSP algorithm in terms of the rate of the convergence to global minima. A computer simulation shows that the modified algorithm gives a better performance. This result implies that the performance of the blind separation algorithms may be greatly improved by adopting a smart coding scheme with rich structure.

Keywords : Blind Signal Estimation, Finite-Alphabet, Maximum-Likelihood, Sensor Array, QPSK

1. 서론

디지털 무선통신 채널 등과 같은 일반 선형시스템에서는 시스템 특성이 시간에 따라 변화하는 경우가 대부분이므로 보다 정확한 신호 추정을 위해 지속적으로 파일릿 신호를 통한 채널 추정을 행하지 않으면 안된다. 또한 채널 특성도 송수신 단말기의 빠른 이동 등에 따라 때때로 급격하게 변화하기 때문에 신호 송수신 중에 단속이 일어나거나 에러가 발생하게 된다[3]. 이러한 문제에 대한 대안으로서 채널을 추정하기 보다는 그냥 블랙박스라고 두고 수신신호 자체를 바로 추정해 내는 이른바 블라인드 신호 추정 기법의 적용이 많이 연구되고 있다[1],[2],[3]. 이 경우 신호추정을 위하여 이미 알고 있는 입력신호의 기본적인 특성을 이용하게 되는데 대표적인 것이 cyclo-stationarity나 higher-order statistics 등과 같은 신호의 통계적인 성질을 이용하는 것[3]과 유한 알파벳 공간이나 신호의 비트 스트림 상의 정해진 규정을 이용하는 방법[1]이 있다.

N-to-1 통신과 같은 다중접속 시스템의 경우 N개의 독립적인 송신기로부터의 송신신호의 심볼이 유한한 알파벳 공간 내에서 선정되는 경우 수신기에서는 송신된 신호가 가지는 특성을 이용하여 추정하는 기법이 검토될 수 있다. 이 때 수신측에서는 센서 어레이와

같은 다중 수신 장치들 이용하여 샘플링을 하게 되며 시간 및 공간상의 개념으로 샘플링되어 누적된 데이터 세트는 특정한 구조를 가진 매트릭스를 형성하게 되는데 잡음이 개재된 실제 측정데이터로부터 신호를 추정시 이러한 구조 정보를 실측 데이터 매트릭스에 적용함으로써 그 해를 찾게 된다. 이 때 그 해가 존재하는 공간상에서 유일한 해가 주어지는 지 아니면 어떤 형태의 애매성이 존재하는 해의 그룹이 존재하는지, 그리고 그룹이 존재할 시 그룹중의 실질 해를 찾아 낼 수 있는 간단한 방법이 존재하는 지에 의해 그 추정기법의 성능이 평가될 수 있다.

수신단에서 더해지는 잡음이 가우시안(Gaussian)이고 전송신호가 Deterministic한 경우에는 많은 경우 Maximum-likelihood (ML) 추정 기법이 사용된다. 이 ML 추정값에 대한 해를 구하는 알고리즘의 한 예를 Talwar 등[1]이 BPSK의 경우에 대해 제시하고 있는데 본 논문에서는 입력신호가 QPSK와 $\frac{\pi}{4}$ -QPSK일 경우에 대하여 제시된 알고리즘과 새로이 수정된 알고리즘을 적용한 결과에 대하여, 해에 대한 수렴성 측면을 비교한다. 본 논문에서는 먼저 각각의 경우에 대해 추정 알고리즘을 제시한 후 이 알고리즘에 근거한 몬테 카를로 시뮬레이션 결과를 확률론적인 관점에서 비교

하여 보여준다.

II. 시스템 모델

1. 모델 설정

시스템의 입력을 $s_k(t)$, $k=1, 2, \dots, d$ 로, 출력과 잡음신호를 각각 $z_j(t)$, $w_j(t)$, $j=1, 2, \dots, M$ 라고 가정하자. 그러면 출력벡터 $\mathbf{z}(t)$ 는

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^d \mathbf{a}_k s_k(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

로 표시될 수 있다. 여기서 \mathbf{a}_k 는 k 번째 입력에 대한 시스템의 이득을 나타내는 $M \times 1$ 벡터이다.

이 출력을 N 번 샘플링한 측정 데이터 매트릭스로 표시된 이산시간에서의 시스템 입출력 식은

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (2)$$

와 같이 표시될 수 있고 매트릭스 $\mathbf{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{W}$ 는 각각 $d \times N$, $d \times M$, $M \times N$, $d \times N$ 의 크기를 가진다. 여기서 구하고자 하는 것은 측정값 \mathbf{Z} 로부터 \mathbf{S} 를 추정해내는 것이다.

식(2)에 나타난 모델의 유도는 시스템의 입력신호의 심볼이 모두 동기화되어 있는 경우를 가정하였다. 그러나 보다 실질적인 경우인 비동기 신호 입력시에도 이 모델은 유효하다. 그 이유를 살펴보면 다음과 같다.

먼저 출력단에서 샘플링되는 심볼들은 현실적으로 비동기일 경우가 대부분이며 이를 위하여 일반적으로 과샘플링(oversampling)하여 측정데이터 매트릭스를 구성하게 되며 따라서 이 매트릭스는 구조화된 시간-공간 정보를 가진 형태가 된다. 잡음을 무시한 경우에 대하여 이 시스템의 입출력 매트릭스 방정식을

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma} \quad (3)$$

로 표시하면 full-column-rank 매트릭스인 \mathbf{A} 는 블록-Toeplitz가 되고 $\mathbf{\Sigma}$ 의 행 공간(row space)은 \mathbf{A} 의 행 공간과 같게 된다. 또한 full-row-rank 매트릭스인 $\mathbf{\Sigma}$ 는 블록-Hankel 구조를 갖게 되고 따라서 \mathbf{A} 의 열 공간(column space)은 $\mathbf{\Gamma}$ 의 열 공간과 같게 된다. 여기서 측정 데이터 매트릭스인 $\mathbf{\Gamma}$ 에 대해 블록 구조를 적용하고 subspace 통가를 적용한 후 잡음 매트릭스를 추가하면 결국 식(2)와 같게 된다[2]. 따라서 지금까지의 해석에는 식(2)의 모델을 이용하기로 한다.

먼저 잡음신호 $\mathbf{w}(t)$ 는 가우시안 잡음이며 상관함수가

$$E(\mathbf{w}(t) \mathbf{w}^*(s)) = \sigma^2 \mathbf{I} \delta(t-s) \quad (4)$$

로 주어진다고 가정한다. 또 \mathbf{I} 는 적절한 크기를 가지는 단위(identity) 매트릭스를 나타낸다.

여기서 측정된 데이터 매트릭스인 \mathbf{Z} 를 벡터 형식인 $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}(1) \mathbf{z}(2) \dots \mathbf{z}(N)]$ 로 표시하면 이 경우 측정 데이터 매트릭스의 확률 밀도 함수는

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z} | \mathbf{A}, \mathbf{S}) =$$

$$\pi^{-MN} \sigma^{-2MN} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{z}(n) - \mathbf{A}\mathbf{s}(n)\|_F^2\right\} \quad (5)$$

과 같이 주어지게 되므로 \mathbf{S} 의 ML 추정값 $\hat{\mathbf{S}}$ 은

$$(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{S}}) = \arg \min_{\mathbf{A}, \mathbf{S} \in \mathcal{T}} \|\mathbf{Z} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|_F^2 \quad (6)$$

의 해를 구하는 최소 자승(Least Squares) 문제로 된다. 식(6)에서 \mathcal{T} 와 F 는 각각 \mathbf{S} 가 가질 수 있는 모든 값의 집합(매트릭스 집합)과 프로베니우스 놈(Frobenius norm)을 나타낸다.

식(6)을 다시 표현하면 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{S}}$ 는 각각 다음 식(7)과 (8)을 만족하여야 한다.

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}\mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \max_{\mathbf{S} \in \mathcal{T}} \|\mathbf{Z}\mathbf{P}_{\mathbf{S}}\|_F^2 \quad (8)$$

여기서,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S} \quad (9)$$

이고 식(8)에서 $\mathbf{Z}\mathbf{P}_{\mathbf{S}}$ 는 \mathbf{Z} 를 \mathbf{S} 의 row subspace에 행 투영(row projection)하는 연산이 된다.

2. 추정 알고리즘

앞에서 설명한 $\hat{\mathbf{S}}$ 을 구하기 위한 두 가지 추정 알고리즘, 즉 ILSP와 ILSE가 참고문헌 [1]에 제시되어 있다. 이 두 가지의 알고리즘은 단순히 앞에서 설명한 식(7)과 (8)의 두 식을 수렴할 때까지 아래와 같이 반복하여 계산하게 된다.

반복투영최소자승법(ILSP; Iterative Least-Squares with Projection)

1) 초기값 \mathbf{A}_0 를 선택하고 $k=0$ 로 둔다.

2) $k = k+1$;

$$(가) \bar{\mathbf{S}}_k = (\mathbf{A}_{k-1}^* \mathbf{A}_{k-1})^{-1} \mathbf{A}_{k-1}^* \mathbf{Z}$$

$$(나) \mathbf{S}_k = \text{proj}[\bar{\mathbf{S}}_k]$$

$$(다) \mathbf{A}_k = \mathbf{Z}\mathbf{S}_k^* (\mathbf{S}_k \mathbf{S}_k^*)^{-1}$$

3) 2)항을 $(\mathbf{A}_k, \mathbf{S}_k) = (\mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{S}_{k-1})$ 이 될 때까지 반복한다.

(나)의 투영은 유한 알파벳 공간상으로 투영하는 것을 나타내며 다음의 그림 1은 이 알고리즘을 도식적으로 표시한 것이다.

여기서는 $\frac{\pi}{4}$ -QPSK 신호 시스템에 대해서 다음과 같은 알고리즘을 제안하여 QPSK의 경우에 대한 상기의 알고리즘과의 시뮬레이션 결과를 비교한다.

먼저 세 개의 집합 Q_A, Q_B, Q_C 를 다음과 같이 정의하자. 즉,

$$Q_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1 + jI, 1 - jI, -1 + jI, -1 - jI\},$$

$$Q_B = \{1, -1, j, -j\},$$

$$Q = Q_A \cup Q_B.$$

그리고 어떤 매트릭스 집합 $\Upsilon_{d \times N}(Q)$ 는 각 열벡터들의 원소들이 모두 Q_A 와 Q_B 집합으로부터 교번하여 만들어질 수 있는 모든 $d \times N$ 크기의 매트릭스의 집합이라고 가정하자. 그러면 식(2)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} Z &= AS + W \\ &= A\Phi U + W \end{aligned} \quad (10)$$

이며 이 때

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_d \end{bmatrix} \text{로 정의되며 } p_i \in \{e^{j\theta/A}, e^{j\pi/A}\} \text{이다.}$$

상관이 없는 가우시안 잡음의 경우 식(2)에서의 A, S 에 대한 추정문제는 결국 식(10)에서는 A, Φ, U 에 대해

$$\min \|Z - A\Phi U\|_F^2$$

를 찾는 문제가 된다. 따라서 이 경우의 해 (\hat{A}, \hat{S}) 는

$$\hat{A} = Z\hat{\Phi}U^T(\hat{\Phi}UU^T)^{-1},$$

$$\hat{S} = \hat{\Phi}\hat{U}$$

을 만족시켜야 하는 데 이 때

$$(\hat{\Phi}, \hat{U}) = \arg\max \|Z\hat{\Phi}U\|_F^2,$$

$$P_U = \Phi U^T(\Phi U U^T)^{-1}U \text{이다.}$$

이것을 계산하는 알고리즘은 다음과 같이 표시될 수 있다.

수정된 ILSP 알고리즘

- 1) 초기값 A_0 를 선택하고 $k=0$ 로 둔다.
- 2) $k = k + 1$;

$$(가) \bar{S}_k = (A_{k-1}^* A_{k-1})^{-1} A_{k-1}^* Z$$

$$(나) S_k = \text{proj}_S[\bar{S}_k]$$

$$(다) S_k \text{로부터 } \Phi_{ML} \text{을 구한다.}$$

$$(라) \hat{S}_k = \text{proj}_U[S_k]$$

$$(마) S_k = \Phi^{-1} \hat{S}_k$$

$$(바) A_k = Z S_k^* (S_k S_k^*)^{-1}$$

- 3) 2)항을 $(A_k, S_k) = (A_{k-1}, S_{k-1})$ 이 될 때까지 반복한다.

알고리즘의 (나)는 유한 알파벳 공간상으로의 투영을 나타내며 (라)의 연산은 Φ 를 이용하여 U 공간상으로

투영하는 연산을 나타낸다. 이 알고리즘을 도식적으로 표시하면 다음 그림2와 같이 나타낼 수 있다.

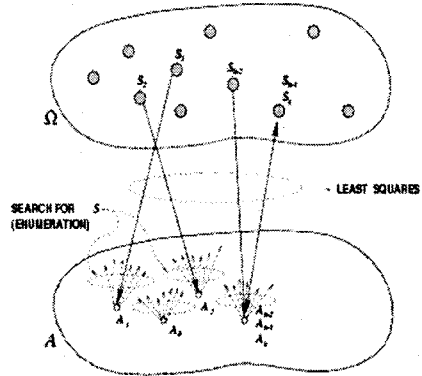


그림 1. ILSP 알고리즘

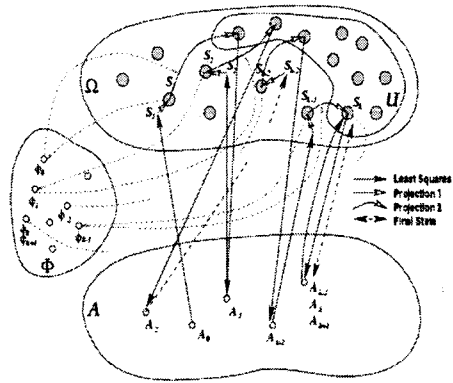


그림 2. 수정된 ILSP 알고리즘

이러한 알고리즘은 구현은 간단하나 실제로 아주 유용한 방법이 되지 못한다. 그 이유는 이 알고리즘에 의한 전역해(global solution)에 대한 수렴유무가 초기값의 선정에 따라 달라지기 때문이다. 따라서 기본적으로 그 해가 local minima/maxima로 수렴하는 것을 피할 수 없다. 아울러 근본적으로 다수의 전역해가 존재할 수도 있다[5].

III. 추정 특성 비교

앞에서 설명한 두 알고리즘의 성능을 비교하기 위해 임의로 생성된 4×30 QPSK 데이터 매트릭스에 대한 두 알고리즘의 결과를 100회에 대해 수행하였다. 시뮬레이션에서는 편의를 위하여 잡음을 포함시키지 않았

으며 비교를 위한 방법으로는 추정된 결과로 나온 매트릭스와 생성된 원래의 매트릭스와의 놈 오차(norm error)를 계산하여 결과를 비교하였다.

이 결과의 예가 다음 그림 3에 나타나져 있는데 그림에서 기존의 QPSK에 대한 ILSP의 경우 정확히 신호를 찾는 경우가 3회 정도로 나타나고 있으나 $\frac{\pi}{4}$

-QPSK의 경우에 대한 수정된 ILSP 알고리즘의 경우에는 12회 정도로 보다 나은 특성을 나타내고 있다. 이 결과는 미리 쉽게 예상하였던 것이지만 다음과 같은 추가적인 사항들에 대해 고찰할 수 있다.

(1) 간단한 신호 코우딩 구조의 차이가 블라인드 신호 추정에 있어서 어느 정도의 특성변화를 가져오는 가 하는 점이다. $\frac{\pi}{4}$ -QPSK는 일반적인 QPSK보다 구조적

으로 더 제한적이지만 통신 신호처리 관점에서는 더 효율적인 측면을 가지고 있다. 따라서 기존의 신호 전달 특성을 저해하지 않으면서 블라인드 신호처리의 장점을 효율적으로 활용할 수 있는 코우딩 기법에 대해 연구해 볼 필요성이 충분하다고 생각된다.

(2) 그림에서 두 가지 기법이 정확히 신호를 찾는 경우가 서로 다르다는 특징이 있다. 다시 말해서 첫 번째의 기법에서는 참값에 수렴했지만 수정된 기법에서는 참값에 도달하지 못함을 볼 수 있는데 그 이유는 우선 직관적으로 많은 지역해(local minima)가 존재하기 때문임을 알 수 있지만 거꾸로 이러한 특징의 차이들 보조적으로 잘 활용한 알고리즘을 구성하면 개개의 경우에 비해 보다 나은 특성을 나타낼 수도 있을 것으로 예상된다.

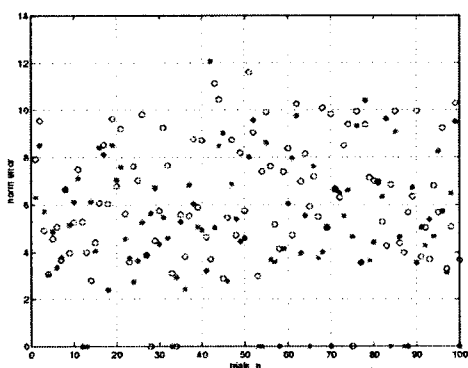


그림 3. 알고리즘 시뮬레이션 결과 비교(*: 수정된 알고리즘, o: 기존 알고리즘)

IV. 결론

본 논문에서는 선형시스템에서 입력신호가 유한 알파벳 공간에 존재하는 경우에 대해 고찰하였다. 이러한 시스템에서의 신호추정기법의 하나로 많이 연구되고 있는 유한 알파벳 공간 정보를 이용한 블라인드 신호처리 기법에 대하여 입력신호의 코우딩 기법에 따른 신호의 추가적인 정보가 신호추정 알고리즘의 특성에 어떤 영향을 미치는가에 대해 QPSK 신호의 경우에 대한 예를 들어 비교하였다.

컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 볼 때 추가적인 정보는 추정알고리즘의 특성에 뚜렷한 영향을 미침을 알 수 있었으며 따라서 블라인드 신호처리 기법 관점에서 활용 가능한 정보를 충분히 포함하고 있는 코우딩 기법에 대한 설계 방법을 검토할 필요가 있다고 판단된다.

참고문헌

- [1] S. Talwar, M. Viberg, and A. Paulraj, "Blind Separation of Synchronous Co-Channel Digital Signals Using an Antenna Array - Part I: Algorithms," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, no. 5, pp. 1184-1197, 1996.
- [2] Alle-Jan van der Veen, Shilpa Talwar, and Arogyaswami Paulraj, "A Subspace Approach to Blind Space-Time Signal Processing for Wireless Communication Systems," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 173-190, 1997.
- [3] S. Haykin, Editor, *Blind Deconvolution*, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [4] S. Kwon and D. R. Fuhrmann, "Identifiability Problem in Blind Separation of Synchronous BPSK Signals in Digital Wireless Communication," *Proceedings of the 35th Annual Allerton Conference*, pp. 291-300, 1997.
- [5] 권순만 외, "유한 알파벳 성질을 이용하는 블라인드 신호처리에서의 식별성 조건," 제15회 신호처리 합동학술대회 논문집, Vol.15, no.1, pp.222, 2002.