

# 병렬화된 비정렬 격자계를 이용한 3차원 비정상 점성 유동 계산 기법 개발

김 주 성<sup>\*1</sup>, 권 오 준<sup>\*2</sup>

## Computation of 3-Dimensional Unsteady Viscous Flows Using an Parallel Unstructured Mesh

J. S. Kim and O. J. Kwon

In the present study, solution algorithms for the computation of unsteady flows on an unstructured mesh are presented. Dual time stepping is incorporated to achieve the 2-nd order temporal accuracy while reducing the linearization and the factorization errors associated with a linear solver. Hence, any time step can be used by only considering physical phenomena. Gauss-Seidel scheme is used to solve linear system of equations. Rigid motion and spring analogy method for moving mesh are all considered and compared. Special treatments of spring analogy for high aspect ratio cells are presented. Finally, numerical results for oscillating wing are compared with experimental data.

**Key Words:** 비정상유동(Unsteady Flow), 이중시간 전진 기법(dual-time stepping scheme), 스프링 상사(spring analogy)

### 1. 서 론

비정렬 격자를 이용하여 복잡한 3차원 형상에 대한 비점성 유동뿐만 아니라 점성 유동을 효율적으로 계산하고자 하는 많은 연구가 진행되고 있다. 비정렬 격자 기법은 정렬 격자 기법과 비교하여 격자 생성과 격자 적용이 용이하다는 장점이 있으나, 계산시간과 기억 용량을 많이 필요로 하는 단점을 가지고 있다. 비정상 유동 계산은 정상 유동에 비해 훨씬 많은 계산시간이 소요되며, 이로 인해 비정렬 격자 기법은 비정상 유동 계산에 적합하지 않은 것으로 인식될 수 있다. 하지만 참고문헌 [1, 2]를 통해서 볼 수 있듯이, 실제적인 복잡한 유동 현상을 계산하는데 있어서 비정렬 격자가 매우 효율적으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

본 연구에서는 참고문헌 [3]에서 개발된 비정렬 격자를 사용하는 병렬화된 3차원 점성 유동해석 프로그램을 기본으로 하여, 공탄성(aeroelasticity) 해석을 수행할 수 있는 비정상 유동 해석프로그램을 개발하였다. 지배 방정식으로는 압축성 Navier-Stokes 방정식이 사용되었으며, 난류 영향을 고려하기 위해 Spalart-Allmaras 난류 모형[4]이 사용되었다. 공간 차분을 위해서 격자 중심 기법(cell-centered scheme)이 적용되었다. 비정상 시간 적분 기법으로는 이중 시간 적분법(dual-time stepping scheme)을 사용하였으며, 물체 형상의 변화에 따라 격자를 움직이기 위해서 스프링 상사 방법을 기본으로 하는 방법을 사용하였다.

시간 적분 기법 중에서 외재적 기법(explicit scheme)은 적용하기가 용이하지만, 안정된 해석을 위한 시간 간격 제한(time step limit)이 존재한다. 이러한 시간 간격 제한은 격자 크기가 작아질수록 더욱 심해지며, 따라서 본 연구의 Navier-Stokes 방

\*1 학생회원, KAIST 항공우주공학과 대학원,  
E-mail : soo@kaist.ac.kr

\*2 종신회원, KAIST 항공우주공학과,  
E-mail : ojkwon@kaist.ac.kr

정식의 해석의 경우처럼 매우 작은 격자가 경계층 근처에 밀집되어 있는 경우에 대해서는 매우 작은 시간 간격을 사용하여야 안정적인 계산을 수행할 수 있다. 이러한 외재적 기법은 물리적으로 고주파수 특성을 갖는 시간 단위(time scale)가 작은 음향학 해석 등에는 효율적으로 사용될 수 있다. 하지만 대부분의 공탄성 현상들은 낮은 주파수 영역에서 발생하는 현상이며, 이러한 문제를 해석하기 위해서는 매우 큰 시간간격을 사용할 수 있는 내재적 기법의 사용이 필수적이다. 비정상 유동 계산에서 내재적 기법이 사용되었을 때, 각각의 시간 단계에서 비정상 잔류항이 사라지도록 하여야 시간정확도를 유지할 수 있다. 이를 위해 참고문헌 [5, 6]에서는 내부 반복 계산(inner iteration) 기법이 사용되고 있으며, 본 연구에서는 Jameson[5]이 제안한 이중 시간 적분법(dual time stepping scheme)을 사용하였다.

공탄성 현상과 같이 매시간 단계에서 물체의 형상이 변하는 비정상 유동 계산에서는 물체의 변형에 맞추어서 격자를 움직이게 하는 방법이 매우 중요하다. 본 연구에서는 이러한 격자점 움직임을 위해 스프링 유사(spring analogy) 기법을 사용하였다. 하지만 스프링 유사 기법은 비점성 유동 계산에 사용되는 등방성 격자에 대해서는 매우 강건하고 효율적으로 사용될 수 있으나, 경계층 안에 존재하는 높은 종횡비의 격자에 대해서는 그렇지 않다. 본 연구에서는 점성 격자에 대해서는 스프링 유사 기법을 사용하지 않고 강체처럼 움직이게 하는 방법을 사용하였으며, 나머지 비점성 격자에 대해서는 스프링 유사 기법을 사용하였다.

## 2. 지배방정식 및 수치적 방법

지배방정식으로 이상기체에 대한 3차원 Reynolds-averaged Navier-Stokes 방정식과, 유동장의 난류 효과를 모사하기 위한 Spalart-Allmaras 난류 모형 방정식[4]이 사용되었다. 고체 경계면에서는 계산 시간 절약을 위해서 벽함수(wall function)가 사용되었다. 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식과 Spalart-Allmaras 난류 모형 방정식은 격자 중심 유한체적법(cell-centered finite volume scheme)을 사용하여 거의 비슷한 방법으로 차분화되었다. Navier-Stokes 방정식의 대류항은 Roe의 FDS 기법을 사용하여 차분화 하였으며, Frink[7]의 방법을 사

용하여 고차정확도를 얻었다. 또한 확산항은 Mitchell[8]이 제안한 방법을 사용하였다. 난류 모형 방정식의 차분은 참고문헌 [4]에서 제시한 방법을 사용하였으며, 대류항은 FVS 기법을 확산항은 Navier-Stokes 방정식과 같은 방법을 사용하였다.

개발된 해석 프로그램은 영역분할법을 통해 병렬화 되었으며, Karypis가 개발한 Metis 라이브러리를 사용하여 분할하였다. 또한 각 분할 영역간의 자료 교환은 MPI 라이브러리를 사용하여 구현하였다. 정상 상태 수치 기법은 참고문헌 [3]에 자세히 기술되어 있다.

## 3. 이중시간 전진 기법(dual-time stepping scheme)

이중 시간 기법은 Jameson[5]에 의해 개발되었으며, 실제 시간 단계(real-time level)에서 내재적인 방법을 사용하여 차분화된다. 따라서 사용될 수 있는 시간간격이 유동해석의 정확도만을 고려하여 정해질 수 있으므로 매우 효율적으로 비정상 유동 계산에 사용될 수 있다. 또한, pseudo-time 단계에서는 정상 상태 방정식이 되며, 이로 인해 정상 유동 계산에서 사용되는 여러 가지 수렴증진 기법이 사용될 수 있다.

편미분 형태의 Navier-Stokes 방정식에 유한 체적법을 적용하면 다음과 같이 상미분 방정식 형태로 쓰여질 수 있다.

$$\frac{d}{dt}(Q_i V_i) + R(Q_i) = 0 \quad (1)$$

여기서  $R(Q_i)$ 는  $i$ 셀에 해당하는 대류항과 확산항이 모두 포함되어 있다. 식 (1)에 대해서 fully implicit 방법을 사용하고, 시간에 대한 2차 정확도 후방 차분(backward differencing)법을 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{3V^{n+1}Q^{n+1} - 4V^n Q^n + V^{n-1}Q^{n-1}}{2\Delta t} + R(Q^{n+1}) = 0 \quad (2)$$

여기서  $\Delta t$ 는 실제 시간(real time) 간격을 나타내며, 전 유동장에 걸쳐 일정한 값이 사용된다. 위 식

은 2차 시간정확도 기법을 사용한 차분화된 지배방정식을 나타내며, 구하고자 하는 변수(unknown variable),  $Q^{n+1}$ , 에 대해서 비선형이다. 위 식은 다음과 같이 가상 시간(pseudo-time),  $\tau$ , 에 대한 시간 미분항을 도입함으로써 시간 적분법으로 해석 가능한 정상 상태 방정식으로 변환될 수 있다.

$$\frac{dQ^{n+1}}{d\tau} + \frac{1}{V^{n+1}} R^*(Q^{n+1}) = 0 \quad (3)$$

여기서  $R^*(Q)$  는 비정상 잔류치(unsteady residual)이며, 식 (2) 전체를 나타낸다. 식 (3)에 대한 정상 상태 해는  $dQ^{n+1}/d\tau = 0$  를 만족시키며, 이 식은 또한  $R^*(Q) = 0$  을 만족한다는 것을 뜻한다. 따라서 식 (3)에 대한 정상 상태 해는 비정상 상태에 대한 지배방정식인 식 (2)의 해가 된다. 따라서 각각의 실제 시간 단계에서 식 (3)에 대한 정상 상태 해를 구하면 비정상 해를 얻게 되며, 외재적 방법과 내재적 방법을 포함한 어떠한 시간 적분법을 사용해서도 계산될 수 있다. 본 연구에서는 내재적 방법을 사용하였으며, 결과적인 선형 방정식은 Gauss-Seidel 방법을 사용하여 계산되었다.

#### 4. 격자 변형 기법

움직이는 물체에 대한 비정상 유동을 계산하기 위해서는, 각각의 시간 단계에서의 물체의 형상에 맞는 격자를 형성하여야 한다. 하나의 날개에 대한 진동하는 pitching 운동과 같은 간단한 형상이나 간단한 움직임에 대해서는, 격자 전체가 강체처럼 움직이게 하는 방법을 사용할 수 있다. 하지만 상대적인 움직임이 있는 다중익형에 대한 해석이나 본 연구에서 다루고자 하는 것처럼 물체 형상 자체가 변형하는 경우에 대해서는 전체 격자가 물체 형상에 맞게 매 시간 단계에서 재생성 되어야 한다.

이러한 방법은 매 시간 단계에서 초기 격자와 무관하게 전체 격자를 다시 재생성하는 방법과 초기 격자를 변형하여 사용하는 방법으로 나눌 수 있다. 매 시간 단계에서 격자를 재생성 하는 방법은 항상 좋은 격자 질을 유지할 수 있는 장점을 갖고 있으나 실제적인 문제를 해석하기에는 계산 시간이 너무 많이 소요되는 단점을 갖는다. 초기 격자를 변형하는

방법으로는 스프링 상사 기법[9]과 정렬 격자에 대해서만 사용될 수 있는 TFI(Transfinite Finite Interpolation)[10] 방법이 많이 사용되고 있다. 이러한 격자 움직임 방법들은 움직임이 클 경우 격자 질이 저하되는 단점을 갖고 있으나 매우 빠르게 격자 변형을 할 수 있는 장점을 갖고 있다. 또한 두 방법의 장점을 동시에 이용하기 위해 어느 정도의 변형까지는 격자 변형 방법을 사용하고 어느 정도 이상의 변형에 대해서는 격자를 재생성 하는 혼용 방법도 사용되고 있다.

본 연구에서는 등방성 사면체 격자에 대한 격자 변형을 위해서 참고문헌 [9]에 제시된 수정된 스프링 상사 방법을 사용하였다. 스프링 상사 방법에서 각각의 격자점은 초기에 평형상태로 있는 스프링으로 연결되어 있다고 가정된다. 움직이는 경계면에 존재하는 격자점의 위치가 변화되면, 교란된 스프링 시스템은 새로운 경계면에 대한 새로운 평형상태로 움직이게 된다. 격자점  $i$ 에 대한 평형 상태 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_j \lambda_{ij} k_{ij} (\Delta s_i - \Delta s_j) = 0 \quad (4)$$

여기서,  $\Delta s_i$ 와  $\Delta s_j$ 는 각각 격자점  $i$ 와, 이에 이웃하는 격자점  $j$ 의 변위이며,  $k_{ij}$ 는  $i-j$  격자선(edge)에 해당하는 스프링 상수이며, 격자선의 거리에 반비례 하는 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$k_{ij} = \frac{1}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}} \quad (5)$$

식 (4)에서  $\lambda_{ij}$ 는 가중함수(weighting function)로써,  $\lambda_{ij} = 1/L_{ij}$ 를 사용하였다. 여기서  $L_{ij}$ 는  $i-j$  격자선과 움직이는 물체 표면과의 최소 거리이며, 이러한 가중함수의 사용으로 움직이는 물체 표면 근처의 스프링 상수는 매우 커지고, 물체와의 거리가 증가함에 따라 점점 감소하는 경향을 갖게 된다. 따라서 물체 표면 근처의 격자는 상대적으로 강성이 큰 스프링으로 구성되며, 이로 인해 강체 운동과 비슷하게 움직인다. 물체 표면과의 거리가 어느 정도 이상이 되면 가중 함수의 값이 작아지고, 이 영역에서의 격자가 물체의 움직임에 의한 격자 변형에 해당되는 변위를 흡수한다. 이러한 작용에 의해 격자 크기가

상대적으로 작고, 변위가 가장 큰 물체 표면 근처의 격자를 강체처럼 움직이고, 상대적으로 큰 격자에서 변위를 흡수할 수 있게 되어, 강건하게 스프링 상사 방법을 사용하여 격자 변형을 할 수 있게 된다. Fig. 1은 이러한 가중 함수의 효과를 보이고 있다. Fig. 1a는 움직이기 전의 초기 격자를 나타내며, 전체 격자는 1/4 코드를 중심으로 60도 만큼 회전된다. Fig. 1b는 가중 함수를 적용하지 않는 기존의 방법을 사용하여 격자를 변형시킨 결과이며, Fig. 1c는 가중 함수를 사용하여 변형시킨 결과이다. 가중 함수를 사용하지 않은 방법의 결과는 변위가 크고 격자의 크기가 작은 앞전과 뒷전 부근에서 negative volume cell이 생성되며, 이로 인해 해석 기법은 발산하게 된다. 하지만 가중 함수를 사용한 방법에서는 물체 표면 근처의 높은 강성으로 인해 negative volume cell 없이 안정적으로 격자 변형이 이루어 졌다. 스프링 상사 방법은 등방성 비점성 격자를 움직이게 하는 데는 효과적이지만, 높은 종횡비를 갖는 점성 격자에 대해서는 미소한 움직임에 대해서도 격자의 꼬임 현상 등이 발생하여, 강건하게 사용될 수 없다. 본 연구에서는 점성 영역에 해당하는 격자는 물체와 함께 강체처럼 움직이게 하는 방법을 사용하였다. 본 연구의 점성 유동 계산에 사용되는 격자는 ALM 방법으로 높은 종횡비의 점성 격자를 생성하고, 나머지 계산 영역에 대해서는 AFM 방법으로 등방성 격자를 채워 넣어서 생성한다. 이 과정에서 점성 격자에 해당하는 격자점 들을 기억하고, 격자점을 움직이는 과정에서 이에 해당하는 격자만을 강체처럼 움직이게 된다. Fig. 2에서는 점성 격자에 대한 격자 변형을 보이고 있으며, 비점성 격자에 대해서는 가중 함수를 사용하여 변형시켰다. Fig 2a는 초기의 점성 격자를 보이고 있으며, Fig. 2b는 1/4 코드를 중심으로 10도 만큼 회전한 후의 격자를 보이고 있다. 점성 영역에 해당하는 높은 종횡비의 격자는 강체 운동을 하므로, 격자 질의 저하 없이 회전한 것을 볼 수 있다. 또한 강체 운동을 하는 점성 격자와 스프링 상사 방법을 이용하여 변형되는 비점성 격자의 경계면에서도 부드럽게 격자가 변형된 것을 확인할 수 있다.

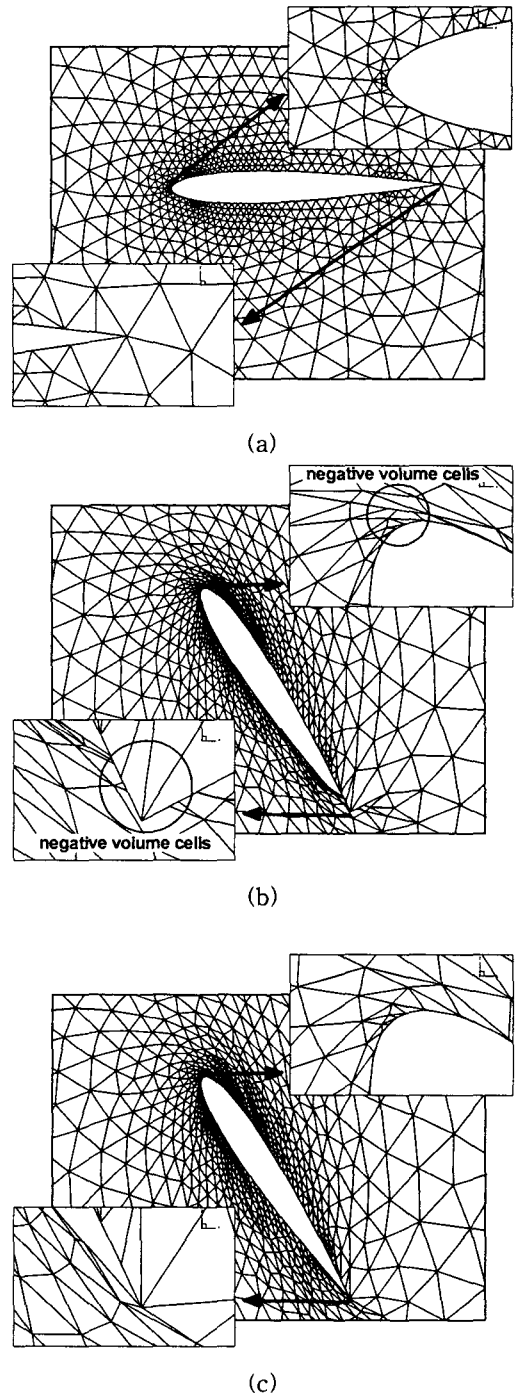


Fig. 1 Moving inviscid grid around a NACA 0012 airfoil: (a) grid in the original position, (b) grid moved without weighting function, (c) grid moved with weighting function

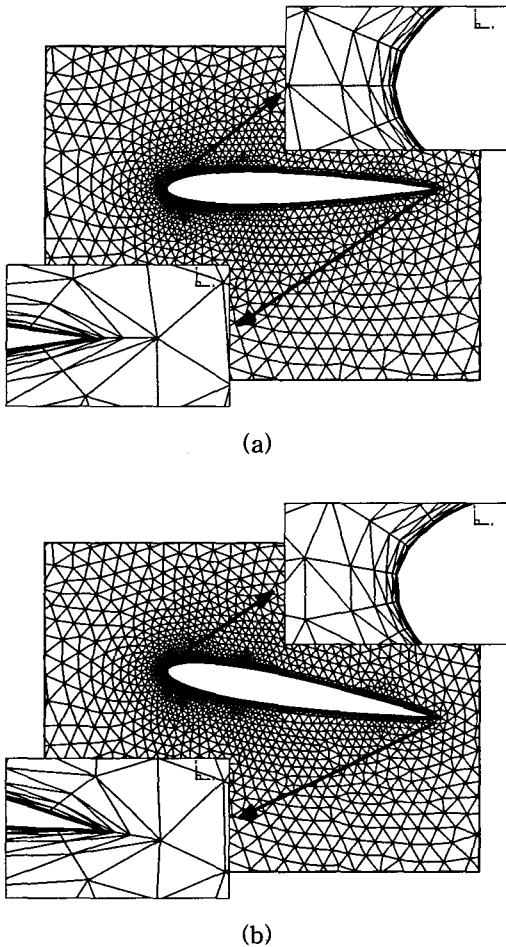


Fig. 2 Moving viscous grid around a NACA 0012 airfoil: (a) grid in the original position, (b) grid after moving

## 5. 결과 및 검토

개발된 기법에 대한 검증은 위해 NACA 0012 의 형에 대해 다음과 같은 식의 주기적인 운동을 하는 유동에 대해 해석하였다.

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(2kM_\infty t)$$

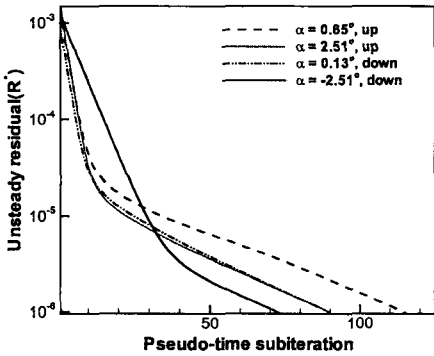
본 연구에서는  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  이며, 자유류의 마하수는 0.755 이고, 레이놀즈수는  $5.5 \times 10^6$  인 유동에 대해 해석하였다. 사용된 격자는 3차원 NACA 0012 익형에 대해, 날

개의 양옆을 대칭면으로 처리하여 2차원 익형으로 모사하였다. 전체 격자는 301,830 개의 격자와 56,016 개의 격자점으로 구성되었으며 날개 표면에 19,891 개의 격자면이 존재한다.

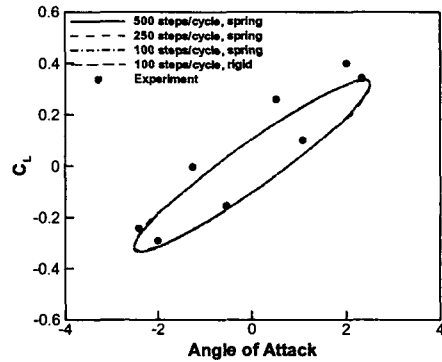
우선 비정상 유동 계산의 정확도 검증은 위해 몇 개의 비정상 시간 단계에서의 유동값의 수렴성에 대한 조사를 하였다. Fig. 3은 시간 간격,  $\Delta t = 0.5$  이며, 격자가 강체 운동을 하는 경우에 대해 여러 가지 받음각에서의 해석 결과이다.  $\Delta t = 0.5$  인 경우, 약 100번의 시간 단계 당 한 주기의 운동을 한다. Fig. 3a는 pseudo-time subiteration 동안에 비정상 잔류치,  $R^*$ , 의 수렴성을 보이고 있으며, 50에서 100번 정도의 반복 계산 동안에  $10^{-6}$  정도로 감소하는 것을 볼 수 있다. Fig. 3b와 Fig. 3c는 양력과 모멘트 계수의 수렴성을 보이고 있으며, 비정상 잔류치가  $10^{-6}$  정도가 되기 전에 항상 유동 값이 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 양력에 대해서는 비정상 잔류치가 약  $10^{-4}$  정도에 해당하는 반복 계산에서 모두 수렴하지만, 모멘트의 경우는  $10^{-5}$  보다 작은 잔류치에서 수렴함을 볼 수 있다. 이러한 결과를 통해서, 본 연구에서는 비정상 잔류치의 값이  $10^{-6}$  보다 작아질 때까지 pseudo-time subiteration을 수행함으로써 비정상 유동 계산의 정확도를 유지하였다. 이러한 경향은 스프링 상사 방법을 사용한 경우에도 비슷하게 나타난다.

Fig. 4에서 격자를 스프링 상사 방법을 사용하여 움직이는 경우에 대해 여러 가지 다른 시간 간격에 대한 결과와 강체로 움직이는 방법을 사용한 결과를 실험치와 비교하였다. 먼저 격자를 스프링 상사 방법을 사용하여 움직이는 경우에 대해 여러 가지 시간 간격에 대해서 양력과 모멘트 계수 모두 서로 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 큰 시간 간격에서도 이처럼 정확도를 잘 유지할 수 있는 이유는, 적절한 pseudo-time subiteration을 통해서 정확한 2차 시간 정확도를 유지할 수 있기 때문이다.

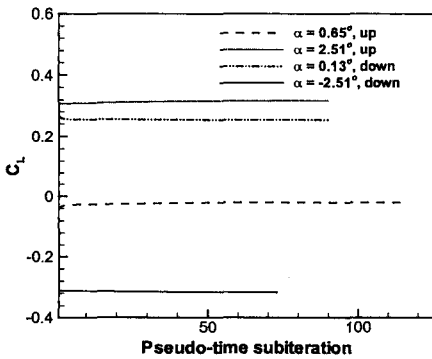
또한 스프링 상사 방법과 강체 운동 방법을 비교해 볼 때, 양력과 모멘트 모두에 대해서 거의 같은 결과를 보이고 있다. 따라서 스프링 상사 기법을 사용한 격자 움직임 기법이 매우 정확함을 알 수 있다. 또한 실험 결과와도 대체적으로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.



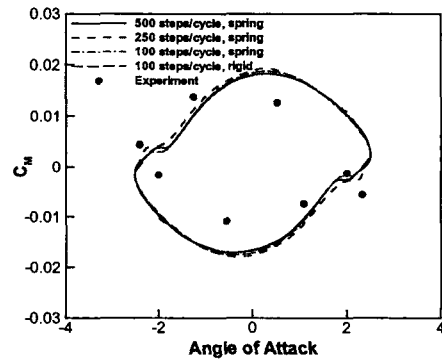
(a) Unsteady residual



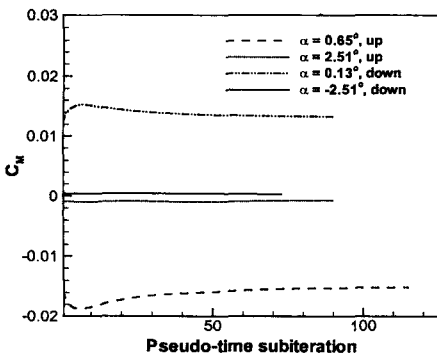
(a) Lift coefficient



(b) Lift coefficient



(b) Moment coefficient



(c) Moment coefficient

Fig. 3 Convergence histories of the unsteady residual, and lift and moment coefficients during pseudo-time subiteration

Fig. 4 Lift and moment coefficient loops

### 6. 결론

본 연구에서는 3차원 정상 상태 유동 해석 프로그램을 기본으로 하여, 공탄성 해석을 위한 비정상 난류 유동 해석 프로그램을 개발하였다. 시간 적분 기법으로 내재적 기법인 이중시간 적분법을 사용함으로써, 매우 큰 시간 간격에서도 안정적이며, 정확한 비정상 유동 해석 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 격자 변형 기법으로 스프링 상사 방법을 사용하였으며, 강체 운동의 경우와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 또한 점성 격자에 대한 특별한 처리를 통해 점성 유동에 대해서도 스프링 상사 방법을 강건하게 사용할 수 있음을 확인하였다.

## 참고문헌

- [1] Oh, W.S., Kim, J.S., and Kwon, O.J., "Numerical Simulation of Two-Dimensional Blade-Vortex Interactions Using Unstructured Adaptive Meshes," *AIAA Journal*, Vol.40, No.2, (2002), pp.474-480.
- [2] Kang, H.J. and Kwon, O.J., "Effect of Wake Adaptation on Rotor Hover Simulations Using Unstructured Meshes," *Journal of Aircraft*, Vol.38, No.5, (2001), pp.868-877.
- [3] 강희정, "비정렬 적응 격자계를 이용한 정지비행 로터 공력의 수치적 모사," 한국과학기술원 박사 학위 논문, (2001).
- [4] Spalart, P.R. and Allmaras, S.R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," *AIAA Paper 92-0439*, (1992).
- [5] Alonso, J.J. and Jameson, A., "Fully-Implicit Time-Marching Aeroelastic Solutions," *AIAA Paper 94-0056*, (1994).
- [6] Pulliam, T., "Time Accuracy and the Use of Implicit Methods," *AIAA Paper 93-3360-CP*, (1993).
- [7] Frink, N.T., "Recent Progress Toward a Three-Dimensional Unstructured Navier-Stokes Flow Solver," *AIAA Paper 94-0061*, (1994).
- [8] Mitchell, C.R., "Improved Reconstruction Schemes for the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes," *AIAA Paper 94-0642*, (1994).
- [9] Pirzadeh, S.Z., "An Adaptive Unstructured Grid Method by Grid Subdivision, Local Remeshing, and Grid Movement," *AIAA Paper 99-3255*, (1999).
- [10] Dubuc, L., Cantariti, F., Woodgate, M., Gribben, B., Badcock, K.J., and Richards, B.E., "A Grid Deformation Technique for Unsteady Flow Computations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.32, (2000), pp.285-311.