

# 비정렬 격자계에서 셀 중심 및 버텍스 중심 계산방법에 따른 계산의 정확도와 효율에 관한 연구

김 사 량<sup>\*1</sup>, Z. J. Wang<sup>\*2</sup>

## On the Accuracy and Efficiency of Cell-centered and Vertex-centered Approaches for Unstructured Meshes

S. R. Kim and Z. J. Wang

The numerical simulations with unstructured mesh by cell-centered and vertex-centered approaches were performed for the quadrilateral and triangular meshes. For the 2-D incompressible supersonic vortex flow, the simulation results and the analytic solution were compared and the accuracy was assessed. The calculation efficiency was measured by the parameter defined by the consumed CPU time multiplied by absolute error. As a results, equilateral triangular mesh yielded the best accuracy and efficiency among the tested meshes.

**Key Words:** 전산유체역학(CFD), 비정렬격자(Unstructured Mesh), 초음속 보텍스 유동(Supersonic Vortex Flow), 셀 중심(Cell-centered), 버텍스 중심(Vertex-centered)

### 1. 서 론

유한체적법을 사용한 수치계산 시에는 유동장에 대한 격자를 사용하게 된다. 검사체적을 만드는 방법에 따라서 격자점에서의 물리량을 해로 구하고 저장하는 버텍스 중심 방법(Vertex-centered approach)과 격자의 체적을 검사체적으로 하여 격자의 무게중심의 위치에서의 물리량을 해로 구하는 셀 중심 방법(Cell-centered approach)의 두가지로 나눌수가 있다(Fig. 1). 버텍스 중심 방법은 경계면에서의 경계조건이 정확한 값으로 주어지는 장점이 있는 반면에, 경계조건이 불연속인 경우 또는 경계면의 반쪽 검사체적에 대한 처리의 복잡성 등의 단점이 있다.

셀 중심 방법은 반쪽 검사체적의 문제는 없지만 경계조건을 주기 위해서 경계면에 가상 셀을 만들어야 하는 단점도 있다.

Aftosmis 등[1]은 사각형 및 삼각형 격자를 이용하여 버텍스 중심 방법에 의해서 용기부가 있는 채널유동, 초음속 보텍스 유동과 익형 주위의 유동에 대하여 유동장을 해석하여 정확도, 안정성 그리고 Restriction 알고리즘에 관한 연구를 하였으며,

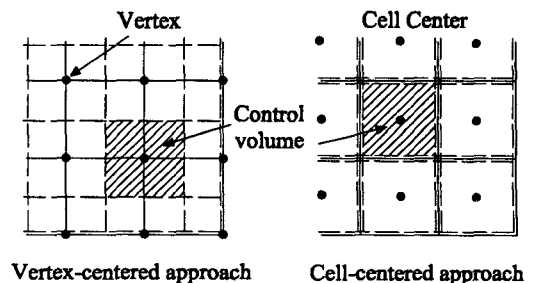


Fig. 1 Grid system

\*1 정희원, 강릉대학교 정밀기계공학과

\*2 Michigan State University, Dept. of Mechanical Eng.

\*E-mail : dearksr@kangnung.ac.kr

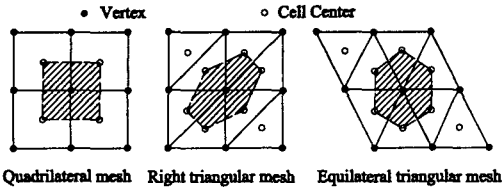


Fig. 2 Quad grid and Triangular grids

Wang[2]은 셀 중심 방법에 의해서 여러 가지 격자 형상에 대하여 익형주위의 유동, 초음속 보텍스 유동 및 후향계단 유동 등을 해석하여 개발한 수치해석 코드를 검증한 바 있다.

본 연구에서는 두 가지 격자 구성법을 사용하여 비점성 초음속 보텍스 유동에 대하여 수치계산을 수행하고 오차와 계산시간을 비교하여 두 격자계간의 계산효율을 비교 검토하도록 한다.

## 2. 수치해석

### 2.1 격자계

본 연구에서는 Fig. 2에 나타낸 것과 같이, 사각형(quadrilateral), 직각삼각형(right triangular) 그리고 이등변삼각형(equilateral triangular) 격자에 대하여 정확도와 계산효율에 대하여 검토하였다. 그림에서 빗금친 부분은 버텍스 중심 방법으로 계산하는 경우의 검사체적을 나타낸다. 삼각형 격자의 경우 검사체적의 모양은 6각형이 되는 것을 볼 수 있다.

### 2.2 초음속 보텍스 유동해석

정확도 및 오차를 비교하기 위해서 해석해가 있는 2차원 비점성 초음속 등엔트로피 보텍스 유동에 대하여 계산을 수행하였다

#### 2.2.1 해석해

유동장의 속도는 반경에 반비례한다. 해석하는 다음과 같이 밀도,  $\rho$ 를 반경,  $r$ 의 함수로 나타낼 수 있다[3,4].

$$\rho(r) = \rho_i \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \left\{ 1 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1)$$

여기서,  $M_i$ 는 하마수,  $r_i$ 는 보텍스의 안쪽 반지

름이다.

#### 2.2.2 지배방정식

2차원 비점성 초음속 유동에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(p+e) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ v(p+e) \end{pmatrix}$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $p$ 는 정압,  $u$ ,  $v$ 는 각각  $x$ ,  $y$  방향 속도이다. Total energy,  $e$ 는 완전기체의 상태방정식으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3)$$

이 방정식을 Roe의 Approximate Riemann Solver[5]를 사용하여 풀었다. 시간 적분에는 음해법의 일종인 LU-SGS를 사용하였다.

#### 2.2.3 Reconstruction

$i$ 번째 검사체적의 경계면에서 변수  $\phi$ 의 플럭스를 구할 때에 필요한 구배  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 의 값을 구하기 위해서 다음과 같은 Least square reconstruction method[2]를 사용하였다.

$$\phi(x, y) = \phi_i + \phi_x(x - x_i) + \phi_y(y - y_i) \quad (4)$$

$$\phi_x = \frac{1}{\Delta} \left[ I_{yy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(x_n - x_i) - I_{xy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(y_n - y_i) \right]$$

$$\phi_y = \frac{1}{\Delta} \left[ -I_{xy} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(x_n - x_i) + I_{xx} \sum_n (\phi_n - \phi_i)(y_n - y_i) \right]$$

$$I_{xx} = \sum_n (x_n - x_i)^2$$

$$I_{yy} = \sum_n (y_n - y_i)^2$$

$$I_{xy} = \sum_n (x_n - x_i)(y_n - y_i)$$

$$\Delta = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2$$

여기서  $n$ 은  $i$ 번째 검사체적에 이웃한 모든 셀을 나타낸다.

수치해의 진동을 방지하기 위해 리미터( $\Psi$ )[1,2]를 사용하는 경우가 있는데 이 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

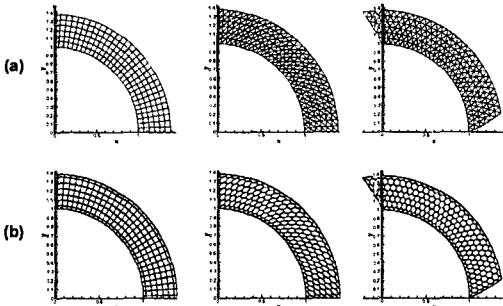


Fig. 3 Meshes for the simulation of 2-D inviscid supersonic vortex flow((a) Cell centered grid, (b) Vertex-centered)

$$\phi(x, y) = \phi_i + \Psi[\phi_x(x-x_i) + \phi_y(y-y_i)] \quad (5)$$

초음속 보텍스 유동은 비교적 간단하고 교란이 크지 않은 유동이므로, 본 연구에서는 리미터를 사용하지 않았으며,  $\Psi=0$ (1st order accuracy) 과  $\Psi=1$ (2nd order accuracy)인 경우에 대하여 수치계산을 수행하였고, 결과는 1st order accuracy의 경우만을 비교하여 나타내었다.

2.2.4 경계 조건

반지름  $r_i$ 에서의 입구 마하수는 2.25이며 바깥쪽 반지름  $r_o$ 는  $1.384r_i$ 이다. 안쪽 반지름  $r_i$ 는 1이고, 입구에서의 밀도는  $1(= \rho_{in})$ , 압력은  $1/\gamma(= p_{in})$ 이다. 안쪽 및 바깥쪽 반경의 경계면에는 벽조건을 주었고, 출구에는 외삽조건을 주었다.

2.2.5 계산격자

계산에 사용한 격자를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3(a)는 셀 중심 방법을 위한 격자이며, Fig 3(b)는 벡터 중심 방법을 위한 격자이다. 셀 개수를 기준으로 각각의 경우 4가지 격자에 대하여 계산을 수행하였다. 사각형 격자의 셀 수는 30x6, 60x12, 120x24, 240x48 개이고, 삼각형 격자는 앞의 사각형 격자를 둘로 나누어서 만들었으므로 셀의 수는 각각 사각형 격자의 두 배이다. 그러나, 벡터 중심 숫자를 기준으로 하면 사각형 격자와 삼각형 격자의 벡터 수는 31x7, 61x13, 121x25, 241x49로서 같다. 그림에서 보면 알 수 있듯이 벡터 중심 방법에 의한 격자는,

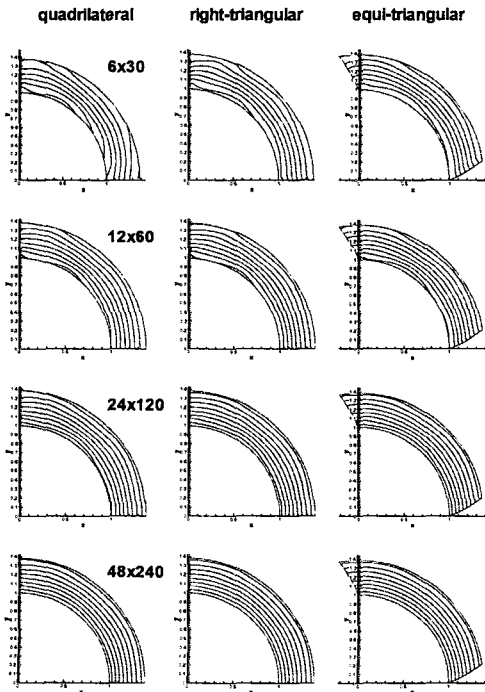


Fig. 4 Density contours from cell-centered calculation

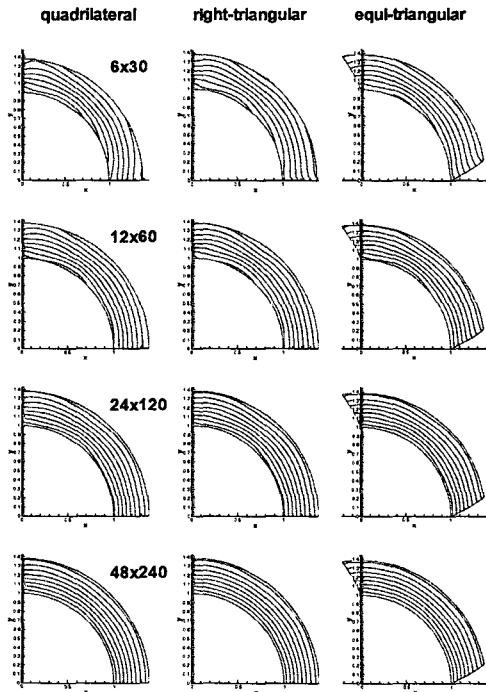


Fig. 5 Density contours from vertex-centered calculation

내부는 6각형이고, 경계에서는 4각형 또는 5각형이 되는 것을 볼 수 있다.

### 3. 결과 및 검토

#### 3.1 격자계에 따른 계산결과

계산결과 밀도 분포를 Fig. 4와 Fig. 5에 나타내었다. 각 등밀도선의 값은 0.2 간격으로 그렸다. 격자의 갯수가 증가하면서 등밀도선이 점점 원형으로 변화해 가는 것을 볼 수 있다. 격자계의 차이에서 오는 밀도분포의 차이는 크지 않은 것으로 보인다.

수치계산 결과와 해석해와의 절대오차분포를 격자계에 따라 Fig. 6과 Fig. 7에 나타내었다. 등오차선의 간격은 0.05이다. 셀 중심 방법의 경우는 삼각형 격자의 수가 사각형 격자의 수의 2배이므로 오차가 작아지는 것이 타당할 것으로 예측되며 같은 결과를 보여준다. 직각 삼각형보다 이등변 삼각형의 경우에 오차가 더 작아지는 것을 볼 수 있다. 버텍스 중심 방법의 경우는 삼각형이나 사각형 격자의 버텍스 수

는 같지만, 결과는 삼각형 격자의 경우가 사각형 격자의 경우보다 좋고, 이등변 삼각형의 경우가 가장 오차가 작은 것을 볼 수 있다.

#### 3.2 계산의 정확도

계산의 정확도를 알아보기 위하여 해석해와 수치해와의 평균오차를 먼저 구하였다. 평균 오차는 다음 식으로 나타낼 수 있다[6,7].

$$L_p = \left[ \int \frac{(\phi_i - \phi_{exact})^p dA}{A} \right]^{1/p} \quad (6)$$

여기서  $p$ 는 order이다.

Fig. 8에 계산에 사용한 검사체적의 수(셀 중심 방법에서는 셀의 수, 버텍스 중심 방법에서는 버텍스의 수)와  $L_1$ 과의 관계를 나타내었다. 모두 1st order의 기울기를 가지고 있으며, 오차는 사각형과 직각 삼각형격자의 경우는 비슷하고, 이등변 삼각형

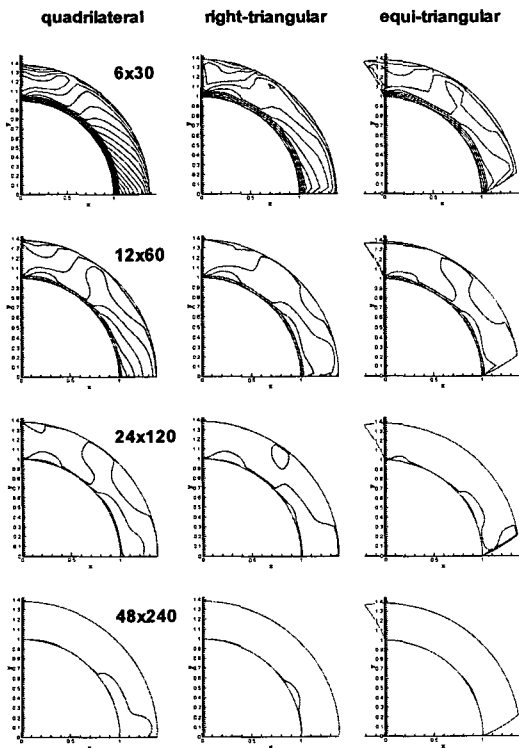


Fig. 6 Absolute error contours from cell-centered calculation

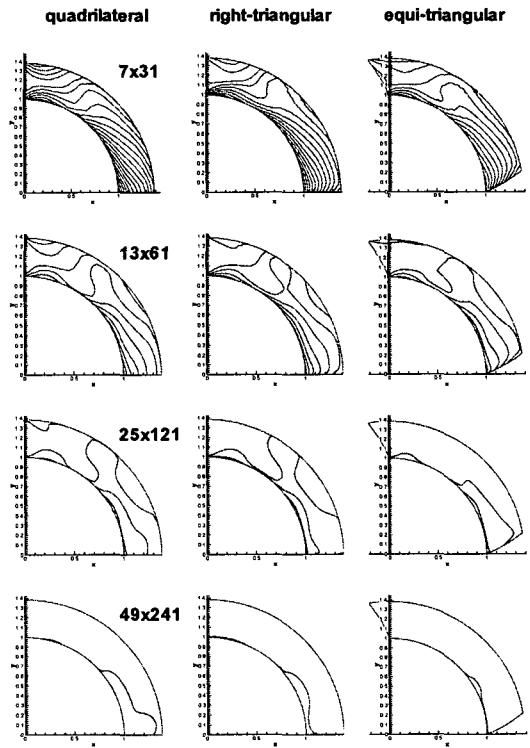


Fig. 7 Absolute error contours from vertex-centered calculation

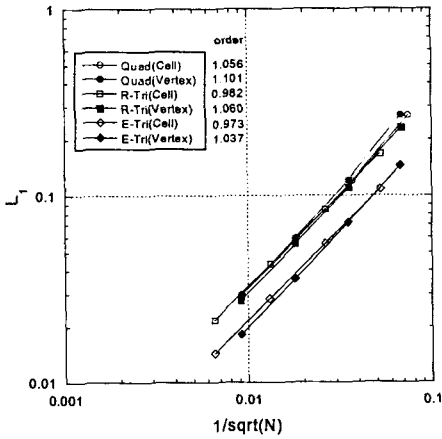


Fig. 8 The relation of  $L_1$  with respect to the inverse of the number of control volumes.

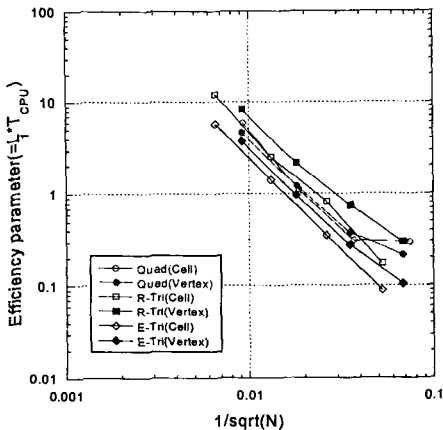


Fig. 10 The relation of efficiency parameter with respect to the inverse of the number of control volumes.

격자의 경우가 가장 작은 것을 볼 수 있다.

### 3.2 계산 소요 시간(CPU Time)

Fig. 9에 계산에 소요된 시간(CPU Time)을 검사체의 수에 대하여 그래프로 나타내었다. 계산에는 레드햇 리눅스 7.3을 설치한 Pentium 4, 2GHz, RAM 512MB, PC를 사용하였다. 버텍스 중심 방법을 사용한 직각삼각형 격자의 경우가 비교적 많은 시간이 걸리는 것을 볼 수 있다.

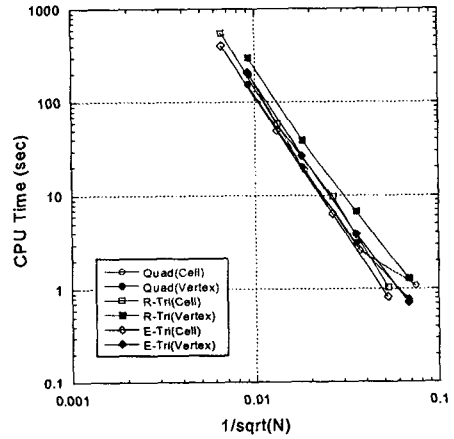


Fig. 9 The relation of CPU Time with respect to the inverse of the number of control volumes.

### 3.2 계산의 효율

수치계산을 하는데 있어서, 오차는 작으면 작을수록 좋고 계산시간은 짧으면 짧을수록 좋다고 할수 있다. 따라서 계산의 효율을 비교하기 위한 하나의 파라미터를 정확도와 소요시간(CPU 시간)의 함수의 곱으로 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{효율파라미터} = \text{평균오차} \times \text{소요시간}$$

따라서, 이 효율 파라미터가 작을수록 좋다고 말할 수 있을 것이다. 그림에서 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장 아래부분에 있으므로 가장 효율이 좋다고 말할 수 있을 것이다.

### 4. 결론

2D 비점성 초음속 보텍스 유동에 대하여, 셀중심 방법과 버텍스 중심 방법에 의해서 사각형과 삼각형 격자에 대하여 정확도와 소요시간, 그리고 효율에 대해서 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 격자의 수에 대하여 오차는 모든 격자가 같은 order로 줄어들지만, 이등변 삼각형 격자의 경우가 오차가 가장 적음을 알 수 있었다.
- (2) 소요시간은 큰 차이는 안 나지만 버텍스 중심 방법을 사용한 직각삼각형 격자의 경우가 시간이 가장 많이 걸림을 알 수 있었다.
- (3) 효율은 이등변 삼각형 격자의 경우가 가장 좋았으며, 셀 중심 방법이 조금 더 좋았다. 수치계산

의 효율을 나타내는 좀더 적절한 파라미터를 고안할 필요가 있을 것이다.

(4) 검사체적의 수뿐만 아니라, 검사체적 경계면의 수도 계산에 영향을 많이 미칠 것으로 생각되므로 이에 대한 검토가 필요하다.

(5) 유동장이 복잡해지면 결과가 달라 질 수 있다고 생각하며, 보다 많은 유동에 대한 검토가 필요하다.

## 후 기

본 연구는 2002년도 강릉대학교 장기해외파견연구 지원에 의하여 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] Aftosmis, M., Gaitoned, D. and Tavares, T.S., "On the Accuracy, Stability and Monotonicity of Various Reconstruction Algorithms for Unstructured Meshes," *AIAA 94-0415*, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit(Jan. 10-13, 1994, Reno, NV), (1994).
- [2] Wang, Z.J., "An Adaptive Hybrid (Cartesian - Prism) Grid and Flow Solver for Navier - Stokes Equations," *SBIR Phase I Final Report*, CFD Research Corporation, (1995)
- [3] Shih-I Pai, *Introduction to the Theory of Compressible Flow*, D. Van Nostrand company, Inc., Princeton, NJ(1959)
- [4] William J. Coirier and Kenneth G. Powell, "An Accuracy Assessment of Cartesian- Mesh Approaches for the Euler Equations," *J. of Computational Physics*, Vol.117 (1995), pp.121-131(Journal paper version of with ref.5).
- [5] Akira Ogawa, *Vortex Flow*, CRC Press, Inc., (1993), pp. 248-251.
- [6] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. of Computational Physics*, Vol.135, (1997), pp.250-258.
- [7] Mitchell, C.R., "Improved Reconstruction Schemes for the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes," *AIAA 94-0642*, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit(Jan. 10-13, 1994, Reno, NV), (1994).