

# 비정상 유동 해석을 위한 고차 정확도 WENO 필터

김 대 희<sup>\*1</sup>, 권 장 혁<sup>\*2</sup>

## High Order Scheme with WENO Filter for Unsteady Flow Analysis

D. Kim and J. H. Kwon

The WENO filter is presented for unsteady flow analysis. The filter is low dissipative and dispersive. The results using the present WENO filter show more accurate resolution than those using other filters. The numerical analyses for several test cases are performed.

**Key Words:** 고차 수치 기법(High Order Scheme), 비정상유동(Unsteady Flow), WENO 수치기법(WENO scheme), 필터(Filter)

### 1. 서 론

고차 정확도의 수치기법은 적은 수의 격자점으로 해석하고자 하는 유동장의 복잡한 거동을 명확히 해상해 낼 수 있고, 같은 해상도를 얻기 위해 저차 정확도의 기법과 밀집된 격자계를 사용하는 경우와 비교해서 몇배 이상의 시간 이득을 얻을 수 있으므로 매우 효율적인 수치기법의 하나로 볼 수 있다. 고차 정확도의 기법은 긴 시간적분을 통해서도 수치점성에 의해 유체의 거동이 소산(dissipative)되는 것을 방지해야 하므로 수치점성이 작아야 하며 충격파와 같은 불연속면 주위에서 비 물리적인 거동을 막기 위해 수치기법이 확산(dispersive)하지 않아야 한다.

고차 정확도를 얻기 위해 다양한 수치기법들 가운데 ENO(Essentially Non-Oscillatory) 계열이 많이 사용되고 있으며[1,2], 공력 음향학의 경우 compact 기법이 널리 사용되고 있다[3].

Yee는 filtering 개념을 사용하는 고차 정확도 기

법을 개발하였다[4,5]. Yee의 수치기법은 고차의 중앙차분이나 compact 기법을 이용해서 수치유속(numerical flux)을 구하고 수치해의 불안정성을 막고 충격파를 해상해내기 위해 2차 upwind TVD의 수치점성 부분을 추가하는 방법이다. 또한, 수치점성을 줄이기 위해 Harten이 제안한 ACM(Artificial Compression Method)을 수치점성 부분에 적용함으로써 5차 정확도 WENO5[2] 기법의 결과에 버금가는 해상도를 보여 주었다. Yee 기법의 수치점성 부분은 다른 충격파 해상(shock-capturing) 기법에서 중앙차분 유속 부분을 제외함으로써 다양한 수치점성을 적용할 수 있으며 몇몇 연구자들이 적용한 바 있다[6,7].

Garnier 등[7]은 MUSCL, ENO, WENO 필터를 비정상 유동에 적용하였다. 수치점성 부분은 충격파 해상 기법에서 중앙차분 유속을 제외함으로써 얻고 있다. 한편, WENO 기법 자체를 중앙차분 유속과 수치점성 부분으로 나눈다면 부가적인 계산이 필요없이 바로 Yee 기법에 적용가능한 수치점성을 얻을 수 있다.

본 논문에서는 WENO 기법에서 수치점성 부분만을 분리한 다음, Yee 기법에 적용함으로써 긴 시간적분동안 수치적 소산이 적으면서 충격파를 잘 해상

\*1 학생회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

\*2 종신회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

\*E-mail : dehee@kaist.ac.kr, jhkwon@kaist.ac.kr

해 낼 수 있음을 보이고자 한다.

개발된 수치기법은 자유류에서의 와류의 대류, 1차원 충격파/난류 상호작용, 충격파/전단층 상호 작용 문제에 적용하고 그 정확도를 검증하였다.

## 2. 지배 방정식 및 공간 이산화

### 2.1 지배방정식

2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식을 직교좌표계에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{vi}}{\partial x_i} \quad (1)$$

여기서,

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i H \end{pmatrix}, F_{vi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \delta_{j1} \\ \sigma_{ij} \delta_{j2} \\ u_j \sigma_{ij} + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2)$$

이고,  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $p$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $T$  는 각각 밀도,  $x_i$  축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피 및 온도를 나타낸다.  $\nu$ 는 비열비를 나타내며 완전 기체(perfect gas)의 경우 1.4로 고정시킨다. 또한 점성응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (3)$$

여기서  $\mu$  와  $\lambda$ 는 점성 계수이고 각각 Sutherland law 과 Stokes 의 가정에 의하여 결정된다.

### 2.2 공간 이산화

#### 2.1.1 Weight ENO 기법

ENO기법은 후보 stencil들 가운데 가장 부드러운 stencil을 택하는 방법이다. ENO기법은 adaptive

stencil을 사용하므로 수렴성과 정확도에 영향을 받는다[2]. 이에 비해, WENO 기법은 모든 후보 stencil의 정보를 이용하므로 같은 양의 정보로부터 더높은 정확도를 얻을 수 있고 수렴성도 향상시킬 수 있다.

WENO 기법을 이용한 수치유속 계산의 단계는 다음과 같다.

- (1) characteristic space로 사영
- (2) flux splitting
- (3) WENO interpolation

보존변수와 비점성 유속을 characteristic space로 사영할 때 비점성 유속의 자코비안 행렬의 right eigenvector,  $R$ 를 이용한다.

$$q = R^{-1}_{i+\frac{1}{2}} Q, \quad f = R^{-1}_{i+\frac{1}{2}} F \quad (4)$$

Lax-Friedrichs flux splitting을 이용하면,

$$f^k = \frac{1}{2} (f^+ + a'_{\max} q^k) \quad (5)$$

여기서, 고유치  $a'_{\max}$ 는 해석하는 전유동장에 걸쳐  $a'_{\max} = \max |a'_i|$ 이다.

WENO interpolation을 통해  $\hat{f}^k_{i+\frac{1}{2}}$ 을 구하면 고유치 공간에서 수치유속은 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}^+_{i+\frac{1}{2}} + \hat{f}^-_{i+\frac{1}{2}} \quad (6)$$

마지막으로, 역변환하면  $\tilde{F} = R_{i+\frac{1}{2}} \tilde{f}$ 의 비점성 수치유속을 구할 수 있다.

WENO interpolation은 다음에서 설명한다.

r차의 ENO 기법에서  $\tilde{f}^+_{i+\frac{1}{2}}$ 는 r개의 후보 stenci에서 선택되며 stencil은 다음에 의해 정의된다.

$$S_k = (x_{i+k-r+1}, \dots, x_{i+k}), \quad k = 0, 1, \dots, r-1 \quad (7)$$

WENO 기법은 stencil  $S_k$ 에서 계산된 수치 유속의 convex 함으로 나타낸다.

$$\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \sum_{k=0}^{r-1} w_k \overline{f}_k^+(f_{i+k-r+1}^+, \dots, f_{i+k}^+) \quad (8)$$

마찬가지로,  $\overline{f}_{i+\frac{1}{2}}^-$ 는 다음의 stencil로부터 구한 유속으로 계산된다.

$$S_k = (x_{i+k-r+2}, \dots, x_{i+k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, r-1 \quad (9)$$

일반적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{i+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{r-1} w_k \overline{g}_k^r(g_{i+k-r+1}, \dots, g_{i+k}) \\ w_k &= \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \dots + \alpha_{r-1}} \\ \alpha_k &= \frac{C_k^r}{(\varepsilon + IS_k)^p}, \quad k=0, 1, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (10)$$

$C_k^r$ 는 최적의 가중치를 나타내는 값이며  $\varepsilon$ 은 분모가 0이 되는 것을 방지하는 작은 값으로  $\varepsilon=10^{-6}$ 으로 두고,  $p=2$ 로 한다. smoothness indicator IS는 5차 정확도 WENO( $r=3$ )에서  $f^+, f^-$ 의 수치유속을 이용해서 다음으로 정의된다.

$$\begin{pmatrix} g_{i-2} = f_{i-2}^+ \\ g_{i-1} = f_{i-1}^+ \\ g_i = f_i^+ \\ g_{i+1} = f_{i+1}^+ \\ g_{i+2} = f_{i+2}^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{i-2} = f_{i+3}^- \\ g_{i-1} = f_{i+2}^- \\ g_i = f_{i+1}^- \\ g_{i+1} = f_i^- \\ g_{i+2} = f_{i-1}^- \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_0^3 &= \frac{(2g_{i-2} - 7g_{i-1} + 11g_i)}{6} \\ \overline{g}_1^3 &= \frac{(-g_{i-1} + 5g_i + 2g_{i+1})}{6} \\ \overline{g}_2^3 &= \frac{(2g_i + 5g_{i+1} - g_{i+2})}{6} \end{aligned} \quad (12)$$

$IS_k$ 와  $C_k^r$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} IS_0 &= \frac{13}{12}(g_{i-2} - 2g_{i-1} + g_i)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(g_{i-2} - 4g_{i-1} + 3f_i)^2 \\ IS_1 &= \frac{13}{12}(g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(g_{i-1} - 3g_{i+1})^2 \\ IS_2 &= \frac{13}{12}(g_i - 2g_{i+1} + g_{i+2})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(g_{i+2} - 4g_{i+1} + 3g_i)^2 \\ C_0^3 &= \frac{1}{10}, \quad C_1^3 = \frac{6}{10}, \quad C_2^3 = \frac{3}{10} \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.1.2 WENO filter

WENO interpolation에 의해 재구성된 수치유속  $\widehat{f}$ 는  $\alpha_{\max}^l$ 가 유동장 전체에 걸쳐 일정하므로 중앙차분 유속과 수치점성으로 나눌 수 있다. 중앙차분 유속의 경우 엄밀하게는 중앙차분이라 할 수 없으나 5차 정확도의 WENO 기법은 부드럽게 변하는 유동장에서 6차정확도의 중앙차분 연산자에 근접하도록 최적의 가중치 값을 사용한다. 따라서, 5차정확도의 WENO 기법은 (6차 정확도 중앙차분 연산자 + 수치점성) + 수치점성의 형태로 수치유속이 구성되어 있다. 이에 착안하여 WENO 기법도 수치점성 부분이 수치해의 안정성을 제어할 수 있도록 하고 중앙차분 유속에 가중치를 사용하는 대신 6차 정확도의 중앙차분유속을 사용함으로써 전체적으로 정확도와 안정성을 피하고자 한다.

식 (11) 대신 식 (12)과 식 (14)을 이용해서 각 stencil에서의 수치점성을 구해서 convex 함을 구하면 된다.

$$\begin{pmatrix} g_{i-2} = q_{i-2} \\ g_{i-1} = q_{i-1} \\ g_i = q_i \\ g_{i+1} = q_{i+1} \\ g_{i+2} = q_{i+2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{i-2} = q_{i+3} \\ g_{i-1} = q_{i+2} \\ g_i = q_{i+1} \\ g_{i+1} = q_i \\ g_{i+2} = q_{i-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서, smoothness measurement는 식 (11)과 식 (13)을 이용해서 구한다.

셀의 경계면을 기준으로 좌우에서 WENO interpolation을 이용해 구성된 특성변수를  $q_l, q_r$ 라 하면 수치점성은 다음과 같다.

$$\hat{F}_{filter} = \frac{1}{2} Ra_{max} (q_r - q_l) \quad (15)$$

비점성 유속은 6차 정확도 중앙차분유속과 WENO 수치점성으로 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \hat{F}_{inviscid} &= \hat{F}_{central} + \hat{F}_{filter} \\ &= \frac{1}{30} [F_{i+3} + F_{i-2} - 8(F_{i+2} + F_{i-1}) \\ &\quad + 37(F_{i+1} + F_i)] + \hat{F}_{filter} \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.1.3 Artificial Compression Method(ACM)

수치점성을 줄이기 위해 Harten의 ACM 기법을 도입한다[8].

$$\begin{aligned} \hat{F}_{filter} &= \frac{1}{2} R\phi^* \\ \phi^* &= k\theta^l \phi^l \\ \theta^l_{i+1/2} &= \max(\hat{\theta}^l_i, \dots, \hat{\theta}^l_{i+1}) \\ \hat{\theta}^l_i &= \left| \frac{|\alpha'_{i+1/2}| - |\alpha'_{i-1/2}|}{|\alpha'_{i+1/2}| + |\alpha'_{i-1/2}|} \right|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$\phi$ 는 다양한 수치기법으로부터 구할 수 있다. WENO 기법에서는 식 (15)에 left eigenvector를 곱하면 구할 수 있다.  $k$ 는 수치점성을 조절하는 계수로 보통  $0.03 \leq k \leq 2$ 의 값을 쓴다. 본 논문의 WENO filter에서는 1로 통일하여 사용하고 나머지 filter에 대해서는 Yee[1]가 사용한 계수를 사용하였다. WENO filter 기법에서는  $k$ 의 변화에 따르는 수치점성의 변화가 크지 않으나 다른 filter의 경우 적절히 조절하지 않으면 해의 질을 떨어뜨릴 수 있다.  $k$ 의 값이 작을 수록 수치점성을 줄일 수 있으나 해의 불안정성을 야기할 수 있다.

### 2.1.4 점성 유속의 계산

대류가 지배적인 유동의 경우 비점성 유속의 정확도가 중요하지만 소산이 지배적인 유동에서는 점성 유속의 정확도도 고려를 해야 한다. 본 논문에서는 4차 정확도의 중앙차분을 이용해서 점성 유속을 구한다[9].

## 2.3 시간 적분법

시간 전진을 위해서 4차 정확도의 Runge-Kutta 다단계 시간 적분법이나 3차 정확도의 Shu 다단계 시간 적분법(TVD 조건 만족)이 사용될 수 있다. 이 논문에서는 4차 정확도의 Runge-Kutta 시간 적분법을 사용하였다. 그 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q^n + \frac{1}{2} \Delta t L(Q^n) \\ Q^{(2)} &= Q^n + \frac{1}{2} \Delta t L(Q^{(1)}) \\ Q^{(3)} &= Q^n + \Delta t L(Q^{(2)}) \\ \tilde{Q}^{n+1} &= Q^n + \frac{1}{6} \Delta t [L(Q^n) + 2L(Q^{(1)}) \\ &\quad + 2L(Q^{(2)}) + L(Q^{(3)})] \\ Q^{n+1} &= \tilde{Q}^{n+1} + \Delta t L_f(Q^{n+1}) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,  $L(Q) = L_c(Q) + L_v(Q)$ 며 비점성, 점성 유속을 나타낸다.  $L_f(Q)$ 는 수치 점성, 곧 filter를 나타내며 filter는 다단계 시간전진이 다 끝난 후에 최종적으로 더해진다.

## 3. 수치 계산

### 3.1 Advection of an Isentropic Vortex

실제 유동에서 수치기법이 긴 시간 적분을 통해서 어느정도 정확도가 유지되는지 확인하기 위한 문제로 자유류에 등엔트로피 와류를 흘려 보내는 문제이다[4]. 비점성 유동이다.

유동 조건은 다음과 같다

$$\begin{aligned} p_\infty &= \rho_\infty = 1 \\ (\delta u, \delta v) &= \frac{\beta}{2\pi} e^{(1-r^2)/2} (-\bar{y}, \bar{x}) \\ \delta T &= -\frac{(\gamma-1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$(\bar{x}, \bar{y}) = (x - x_w, y - y_w)$ ,  $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ 이고  $(x_w, y_w)$ 는 와류의 중심 좌표이다.  $\beta$ 는 와류의 강도를 나타내는 상수로서 5로 준다.

유동장은  $[-5,5] \times [0,10]$ 으로  $81 \times 80$ 의 격자점이 사용되었다. 시간 간격은 0.04로 두며, 경계조건은 주기 조건(periodic boundary condition)이 적용된다. 무차원 시간이 10일때, 원래 자리로 되돌아 오는 1주기가 된다.

Fig. 1은 초기 와류를 보여주고 있다. Fig. 2는  $y=0$ 에서 밀도 분포를 보여 준다. 10주기가 되었을 때 2차 TVD, 3차 MUSCL에 의한 결과는 심한 수치 소산을 보여주며 Yee의 기법을 이용할 경우 엄밀해와 거의 동일한 결과를 보여준다. 그러나 100주기가 되면 TVD filter를 이용하는 Yee 기법도 수치소산이 상당히 영향을 끼침을 Fig. 3을 통해 확인할 수 있다.

WENO5 기법과 WENO filter 기법을 이용할 경우 Fig. 4에서 보듯이 WENO filter 기법의 경우 100주기가 되어서도 소산이 거의 없음을 확인할 수 있다. Fig. 5는 150주기일때 WENO filter를 이용한 결과를 보여주고 있다. 초기형태가 거의 유지됨을 알 수 있다.

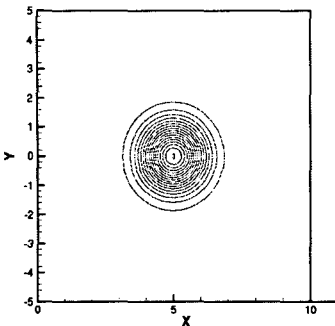


Fig. 1 Initial vortex; density contours

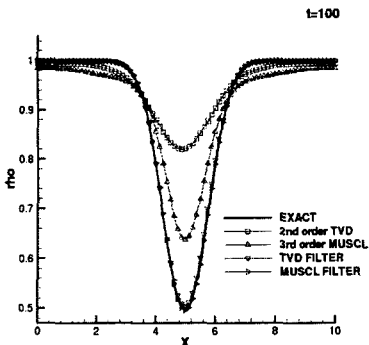


Fig. 2 Density distributions

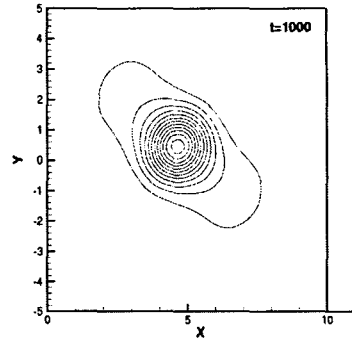


Fig. 3 Density contours after 100 periods(TVD filter)

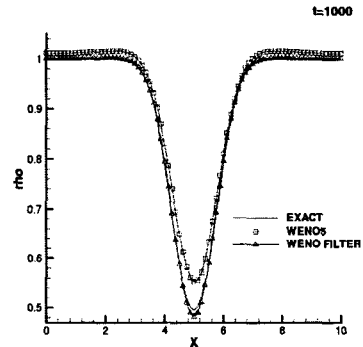


Fig. 4 Density distributions after 100 periods

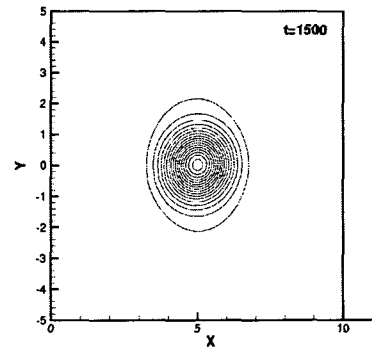


Fig. 5 Density contours after 150 periods(WENO filter)

### 3.2 Interaction of a Moving Shock with a Density WAVE

이 예제는 충격파가 존재할 때에도 filter가 제대로 동작하는지 확인하기 위해 사용된다. [-5, 5]에서 Euler 방정식을 풀이한다. 사용된 격자점은 401이고 비교를 위해 1601개의 격자점에서 WENO5를 이용해서 얻은 결과를 엄밀해로 간주한다. 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_L &= 3.857143, & \rho_R &= 1 + 0.2 \sin(5x) \\ u_L &= 2.269369, & u_R &= 0 \\ P_L &= 10.33333, & P_R &= 1 \end{aligned} \quad (20)$$

무차원 시간이 1.8일때까지 시간전진 시킨다.

Fig. 6은 일반적인 TVD 기법과 TVD filter 기법을 이용했을 경우의 결과를 나타낸다. TVD의 경우 유동을 제대로 해상해내지 못하지만 Yee기법을 이용할 경우 적절한  $k$ 값의 사용으로 나은 결과를 보여주고 있다.

Fig. 7은 Garnier 등[7]에 의해 제안된 ENO 및 WENO filter와 본 논문에서 제안된 WENO filter를 사용한 결과이다. 엄밀해와 거의 같은 해상도를 보여주고 있으며 Garnier의 filter를 이용할 때는 마지막의 peak point를 해상할 수 없지만 본 논문에서 제안한 filter의 경우 정확하게 해상해 념을 확인할 수 있다.

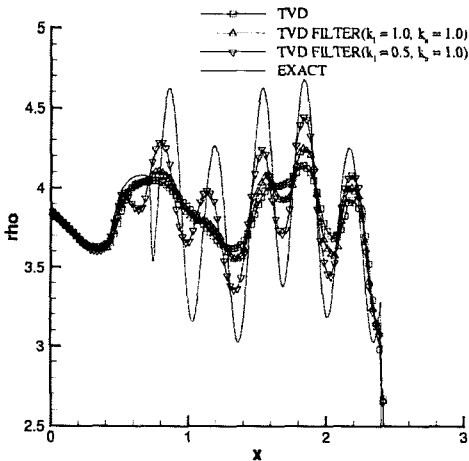


Fig. 6 Density distributions; TVD scheme and TVD filter

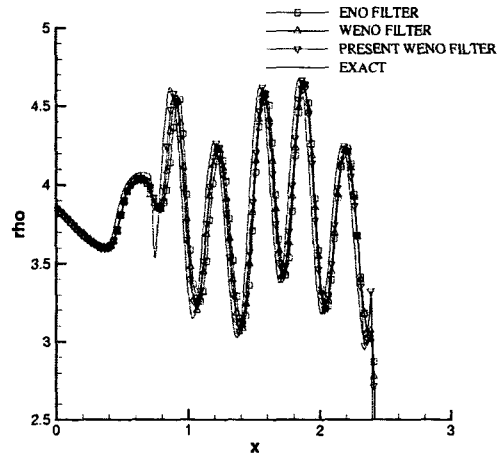


Fig. 7 Density distributions; Garnier ENO/WENO filters and present WENO filter

### 3.3 Mixing-Layer/Shock Interaction

이 예제는 전단층 불안정(shear layer instability)에 의해 형성된 전단층 와류가 충격파와 상호작용하면서 일어나는 복잡한 유체의 거동을 해상해내는 문제이다. 초기 유동 조건 및 문제에 대한 자세한 사항은 참고문헌[4]에서 확인할 수 있다. 비교를 위해 641x161격자계와 5차 정확도 WENO 기법을 이용해서 해석한 결과가 Fig. 8에 나타난다. 전단층 와류가 충격파를 통과하면서 방향이 바뀌고 또한 방향이 바뀐 충격파는 벽에 부딪쳐 반사되고, 이 반사된 충격파와 와류가 다시 만나서 복잡한 거동을 나타내게 된다. 결과 그림은 무차원 시간이 113.16일때이다.

TVD 기법, TVD filter 기법, WENO 기법, WENO filter 기법을 이용해 해석한 결과는 Fig. 9-Fig. 12에 나타내었다. 321x81격자계가 사용되었다. TVD 기법은 복잡한 거동을 거의 해상해내지 못하는 반면 Yee의 기법은 좋은 해상도를 보여준다. WENO5 기법보다 WENO filter 기법이 더 적은 계산시간으로 더 나은 해상도를 보여준다. TVD filter를 이용했을 경우와 WENO filter를 이용했을 경우를 비교하면 거의 차이를 알 수 없으나 WENO filter를 사용한 결과가 수치소산이 더 적다.

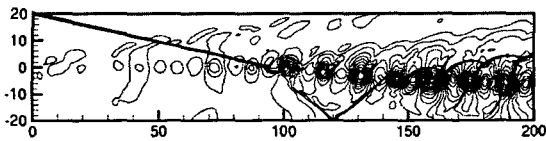


Fig. 8 Pressure contours;

WENO5 scheme, 641x161(reference)

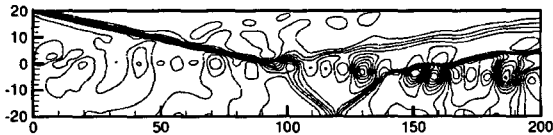


Fig. 9 Pressure contours;

TVD scheme, 321x81

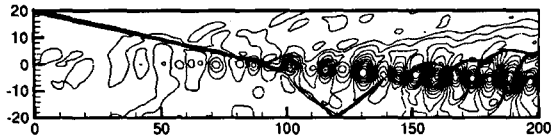


Fig. 10 Pressure contours;

TVD filter scheme, 321x81

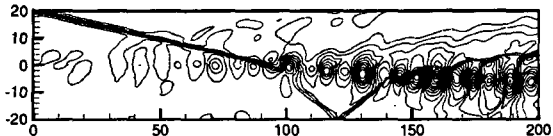


Fig. 11 Pressure contours;

WENO5 scheme, 321x81

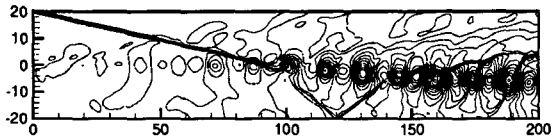


Fig. 12 Pressure contours;

WENO filter scheme, 321x81

#### 4. 결 론

Yee의 수치기법은 고차의 중앙차분 유속으로 수치유속을 계산하고 TVD filter를 이용해서 해의 안정성 및 충격파의 해상도를 높이는 기법이다. 다양한 filter가 적용가능 한데, 본 논문에서는 5차 정확도를 가지는 WENO 기법에서 수치점성을 분리하고 이 수치점성을 filter로 사용함으로써 TVD filter를 사용한 결과와 비교해서 수치점성을 낮추고 해상도를 높이는 결과를 얻을 수 있었다. WENO 기법보다 수치점성이 작고 비슷한 충격파 해상도를 보이므로 공력음향학이나 LES, DNS에 적용가능하다.

#### 참고문헌

- [1] Shu, C. W., and Osher, S., "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock Capturing Schemes II," *Journal of Computational Physics*, Vol.83, (1989), p.32-78.
- [2] Jiang, G. S., and Shu, C. W., "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol.126, (1996), p.202-228.
- [3] Lele, S. K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution," *Journal of Computational Physics*, Vol.103, (1992), p.16-42.
- [4] Yee, H. C., Sandham, N. D., and Djomehri, M. J., "Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters," *Journal of Computational Physics*, Vol.150, (1999), p.199-238.
- [5] Yee, H. C., Vinokur, M., and Djomehri, M. J., "Entropy Splitting and Numerical Dissipation," *Journal of Computational Physics*, Vol.162, (2000), p.33-81.
- [6] Weirs, V. G., "Low Dissipative Shock-Capturing Methods Using Weighted Essentially Nonoscillatory and Central High Resolution Filters," AIAA 2001-2667, (2001).
- [7] Garnier, E., Sagaut, P., and Deville, M., "A Class of Explicit ENO Filters with Application to Unsteady Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.170, (2001). p.184-204.
- [8] Harten, A., "The Artificial Compression Method for Computation of Shocks and Contact Discontinuities:III. Self-Adjusting Hybrid Schemes," *Mathematics of Computations*, Vol.32-142, (1978), p.363-389.
- [9] Deng, X., and Mao, M., "High-Order Dissipative Weighted Compact Nonlinear Schemes for Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA 2001-2626, (2001).