

RBF 네트워크의 중심 개수와 위치의 통합 결정을 위한 Two-Phase 알고리즘

Two-Phase Algorithm for Determining the Number and the Locations of RBF Centers

이대원, 이재욱

(우편번호 : 790-784) 경상북도 포항시 남구 효자동 산31번지

포항공과대학교 산업공학과

Email : woosuhan@postech.ac.kr

Abstract

기존의 RBF네트워크의 중심 결정에 관한 연구에서는 은닉층의 노트 수(즉, 중심의 개수)가 결정되었다는 가정 하에 그 위치만을 결정하는 알고리즘들이 개발되었다. 그러나 RBF 네트워크의 성능과 계산속도는 중심의 개수에도 민감하기 때문에, 중심 위치와 개수의 통합적인 고려가 필요하다. 본 논문에서는 RBF 네트워크의 중심 결정에 있어서 그 위치 뿐만 아니라 개수까지 동시에 고려하는 Two-Phase 알고리즘을 제안한다. Two-Phase 알고리즘은 두 단계로 구성된다. 첫 번째 단계에서는 Bi-section 방법과 보정된 k-medoid 군집화 기법을 이용하여 네트워크의 최소 중심 개수와 위치를 결정한다. 두 번째 단계에서는 RBF 네트워크의 weight를 결정하고 네트워크 설계를 마친다. 제안된 알고리즘을 다양한 수치 예제에 적용한 결과, 중심결정에 관한 기존의 알고리즘에 비해 더 적은 수의 중심으로 더 정확한 예측성능을 보임을 알 수 있었다.

Keywords: Generalized RBF network, Center selection, data partition, Bisection, k-medoids clustering

1. 연구배경

RBF(Radial Basis Function)네트워크는 하나의 은닉층(hidden layer)만을 가지는 네트워크의 구조적 간단성으로 인해 비선형 함수의 추정과 패턴 분류의 분야에서 널리 쓰이고 있다.

RBF 네트워크의 구성은 입력데이터(training examples)를 네트워크와 연결하는 입력층(Input layer), 입력데이터를 radial basis function을 통해 고차원의 공간으로 비선

형 변환을 시키는 은닉층(hidden layer), 은닉층의 결과의 선형 조합을 통해 네트워크의 최종 출력값을 계산하는 출력층(output layer) 등의 세 개의 서로 다른 층으로 이루어져 있다.

이러한 RBF 네트워크의 학습은 은닉층으로의 비선형 변환을 하는 커널 함수(또는 RBF)의 중심의 결정과 은닉층과 출력층을 연결하는 weight의 추정의 두 가지로 구성되어 있다. 학습과정에서 일단 RBF 네트워크의 중심이 결정되어 고정된다면 네트워크의 weight는 least square 알고리즘을 이용하여 바로 구할 수 있다.

따라서 RBF 네트워크의 설계에 있어서 핵심적인 문제는 RBF의 중심의 개수와 위치를 결정하는 것이다. 기존의 연구에서는 중심의 위치만을 결정하는 알고리즘들이 다양하게 제안되었는데 대표적인 것으로는 입력 데이터 중에서 임의로 중심을 선택[4], 네트워크의 입력 공간에서 임의로 중심 추출[5], 군집화 기법(clustering algorithm)을 이용한 중심 결정[6], [7] 등이 있다. 하지만, 이러한 기존의 중심 선택 방법론들은 중심의 개수와 위치를 통합적으로 고려하지 않고 데이터가 속한 class 각각의 분포를 반영하지 않는 등 다양한 문제점을 지니고 있다.

본 논문에서는 입력 데이터를 목적 에러율(Goal error rate) 이하로 분류할 수 있는 RBF 중심의 위치와 개수를 동시에 결정하는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘의 기본적인 아이디어는 세 가지로 이루어졌다. 첫째, 입력 데이터를 각각이 속한 class별로 분할하여 각각에 대해 RBF의 중심을 구하여 각 class별 데이터의 분포를 반영하였다. 둘째, 기존의 알고리즘이 중심의 개수를 안다는 가정 하에서 출발하였으나 제안된 알고리즘은 이러한 가정이 필요 없이, Bi-section 알고리즘을 이용해 중심 개수에 대한 검색범위를 줄여가며 목적에

러울에 도달하는 최소의 RBF 중심 개수를 자동적으로 결정하여 준다. 셋째, 개수가 고정되면 기존의 군집분석 기법이 지닌 문제점(계산 시간, 입력데이터의 class 정보의 미사용 등)들을 보완하여 최적의 중심의 위치를 결정하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2절에서는 본 논문에서 다루게 될 Generalized RBF 네트워크의 기본적인 구조에 대해 알아보고 네트워크 설계에 있어서 핵심적인 문제 중에 하나인 RBF 중심 결정에 관한 기존의 연구들과 각각이 지닌 한계점에 대해 살펴본다. 3절에서는 RBF 중심의 개수와 위치의 통합 결정에 쓰인 기법들의 기본적인 아이디어에 대해 서술하고, 4절에서는 목적에러율에 도달하는 RBF네트워크의 최적의 중심 개수와 위치를 결정하는 Two-Phase 알고리즘을 제안한다. 5절에서는 수치 예제들을 통해 본 연구 결과의 성능을 살펴보고 6절에서 결론을 맺는다.

2. RBF 네트워크의 기본구조와 중심 결정에 관한 기존의 연구

RBF 네트워크는 은닉층 뉴우런의 개수 즉, RBF 중심의 개수에 따라 interpolation 문제에 이용된 RBF 네트워크와 Generalized RBF 네트워크로 나뉘어진다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘은 overfitting을 방지하고 네트워크의 복잡성을 극복한 Generalized RBF 네트워크에 대해 다룬다.

2.1 Generalized RBF 네트워크의 구조

전통적인 RBF 네트워크는 학습 데이터 모두를 RBF의 중심으로 이용하는 interpolation 문제에 이용되어 왔다. 이는 training error는 0이 되도록 학습하지만 Overfitting으로 인해 test 데이터에 대한 예측력은 떨어지며 계산 속도 또한 학습데이터의 개수가 커짐에 따라 급속히 증가한다. 이러한 RBF 네트워크의 weight를 계산하기 위해서는 $N \times N$ Matrix의 역행렬을 구해야 한다(학습데이터가 N 개인 경우). 이

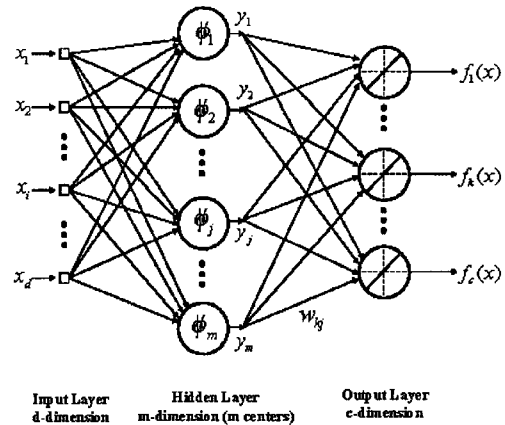


그림 1. Generalized RBF 네트워크의 구조

는 N 의 값이 커짐에 따라 계산은 N^3 에 비해 복잡해짐을 알 수 있다. 따라서 입력 데이터 모두를 RBF 중심으로 이용함으로써 유발되는 네트워크의 복잡성을 극복하기 위해 입력 데이터보다 더 적은 개수의 중심을 사용하는 Generalized RBF 네트워크가 제안되었다. Generalized RBF 네트워크의 구조는 [그림 1]과 같다. 이 방법은 기존의 네트워크보다 더 낮은 차원의 공간에서 interpolation 문제의 해를 추정한 sub-optimal 해를 구하는 방법이다. 추정해인 $F^*(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F^*(x) = \sum_{i=1}^m w_i \phi(\|x - t_i\|) \quad (1)$$

여기서 $\phi(\cdot)$ 는 RBF를 의미하며 t 는 RBF의 중심을 나타내며 t 의 개수는 입력 데이터의 개수 N 보다 작은 m 개이다. 본 논문에서는 RBF로 아래와 같은 다변량 가우스 함수를 이용하였다.

$$\phi(x, x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \|x - x_i\|^2\right)$$

여기서 x_i 는 함수의 중심이고 σ 는 함수의 분산이다. 식(1)의 weight 벡터 w 는 least square 방법을 이용하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$w = (\Phi^T \Phi + \lambda \Phi_0)^{-1} \Phi^T d \quad (2)$$

여기서

$$d = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T \leftarrow \text{학습데이터의 출력값}$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(x_1, t_1) & \phi(x_1, t_2) & \dots & \phi(x_1, t_m) \\ \phi(x_2, t_1) & \phi(x_2, t_2) & \dots & \phi(x_2, t_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(x_N, t_1) & \phi(x_N, t_2) & \dots & \phi(x_N, t_m) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \phi(t_1, t_1) & \phi(t_1, t_2) & \dots & \phi(t_1, t_m) \\ \phi(t_2, t_1) & \phi(t_2, t_2) & \dots & \phi(t_2, t_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(t_m, t_1) & \phi(t_m, t_2) & \dots & \phi(t_m, t_m) \end{bmatrix}$$

이다. 즉, Generalized RBF 네트워크에서 $\phi(x, x_i)$ 를 성분으로 갖는 행렬 Φ 는 더 이상 대칭이 아닌 $N \times m$ 행렬임을 알 수 있다.

2.2 RBF 중심 결정에 관한 기존의 연구 및 한계점

Generalized RBF 네트워크는 입력데이터보다 더 작은 개수의 중심을 가지기 때문에 RBF의 중심의 개수 $m (\ll N)$ 과 위치를 결정하는 것이 네트워크의 설계에 있어서 중요한 요소 중에 하나이다. 일단, RBF의 중심이 결정되면 행렬 Φ 가 구해지고 최적의 weight는 식(2)에 의해 바로 구할 수 있게 된다. RBF의 중심의 개수 결정에 관한 기존의 연구는 미비한 실정이다. 개수가 고정되었다는 가정 하에 중심의 위치를 결정하는 연구는 크게 아래와 같은 3가지의 방법이 있다.

1) **임의로 중심 선택** : 입력 공간에서 임의로 m 개의 중심을 추출하거나 학습 데이터 중에 임의로 중심을 선택하는 것으로 가장 간단한 방법 중에 하나다. 그러나 중심의 위치는 최적이지 아니므로 같은 예측력을 가지더라도 중심의 개수가 실제 필요한 것보다 많이 쓰이게 되는 단점이 있다. 적절한 수준의 중심의 개수를 찾는 것 또한 어려움이 있다.

2) **군집화 기법을 이용한 중심선택** : 이 방법은 입력 데이터들을 k-means, k-medoids, SOM, VQ 등과 같은 군집화 기법으로 나누고 이들 군집의 중심을 RBF의 중심으로 이용하는 방법이다. 이 방법은 군집의 수, 즉 RBF 중심의 수를 알고 있다는 가정을 하지만 실제로 군집의 개수 결정하는 것이 어렵다. 또한 supervised classification 문제에서 각각의 입력 데이터는 자신이 속한 class가 어디인지에 대한 정

보를 알고 있으나 실제 군집화 과정에서는 이에 대한 정보를 반영하지 않으므로 class 별 데이터의 분포를 잘 반영하지 못하는 단점이 있다.

3) **그래디언트(gradient)에 기반한 중심선택** : 이 방법은 RBF 네트워크에 관련된 모든 매개 변수(가우시안 커널의 분산, 중심의 위치, 네트워크의 weight)를 그래디언트 디센트(gradient-descent) 알고리즘을 이용하여 학습시키는 것이다. 중심의 위치에 관한 학습식은 아래와 같다.

$$t_i(n+1) = t_i(n) - \eta \frac{\partial e(n)}{\partial t_i(n)} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

그러나 이 방법 또한 중심의 개수를 알고 있다는 가정 하에 있고 $\frac{\partial e(n)}{\partial t_i(n)}$ 또한 구현하기가 어려울

뿐만 아니라 많은 local minima가 존재해 최적의 위치를 찾기가 어렵다.

3. 새로운 RBF 중심 선택을 위한 기본적인 아이디어

앞 절에서 살펴본 바와 같이 RBF 네트워크는 중심의 위치와 개수만 결정되면 네트워크의 weight를 구할 수 있다. 본 논문에서는 중심의 개수가 결정되어 있다는 가정 없이 중심의 개수와 위치를 통합적으로 결정하는 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘의 기본적인 아이디어는 다음의 세 가지로 나눌 수 있다.

3.1 입력 데이터의 분할

기존의 RBF 중심의 위치 결정에 있어서 가장 많이 사용되는 것이 군집화 기법이다. 본 논문 역시 기본적으로 군집화 기법에 기반하여 입력 데이터의 분포를 가장 잘 반영하는 RBF의 중심의 위치를 결정한다. 그러나 분류문제(classification problem)에 있어서 군집화 기법을 이용하는 기존의 방법들은 각 입력 데이터의 output값을 알고 있음에도 불구하고 각 데이터가 속한 class에 대한 정보를 반영하지 않고 전체 데이터를 unsupervised 데이터(출력값을 모르는 데이터)로 보고 분석한다. 하지만, RBF 네트워크는 Supervised 분석이므로 입력데이터가 어느 class에

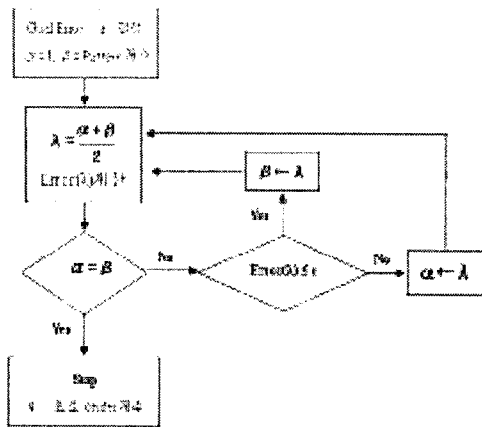


그림 2. Bi-section 알고리즘

속했는지에 대한 정보를 가지고 있고 이를 이용하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 먼저 N개의 입력 데이터를 class(supervised 정보이용) 별로 분할한 뒤, 그 이후의 분할된 데이터 각각을 unsupervised 데이터로 보고 군집화 기법을 적용하여 그 class에 속한 데이터의 분포를 가장 잘 반영하는 군집의 중심들을 구하고 이를 RBF네트워크의 중심으로 이용한다.

3.2 Bi-Section 알고리즘을 이용한 최소 중심개수 결정

본 논문에서 제안하는 RBF 네트워크의 중심 개수 결정 방법의 아이디어는 다음과 같다. 은닉층의 차원인 RBF 중심의 개수를 크게 할수록 입력데이터에 대한 에러율(training error)은 줄어든다[1]. 따라서 이러한 에러 곡선은 중심 개수에 대해 단조감소 함수이며 이러한 함수의 성질을 이용해 중심 개수의 검색 범위 (1개 ~ 입력데이터 개수)를 줄여가며 목표 에러율에 도달하는 최소의 중심 개수를 찾을 수 있다. 본 논문에서 목표에러에 도달하는 최소 중심 개수를 찾기 위해 제안한 Bi-section 방법은 기존의 이진 검색(Binary search)과 개념이 비슷하다. 즉 중심 개수가 증가하면 에러율이 작아진다는 가정 하에서 검색 공간을 반으로 줄여가며 목표 에러율 이하로 떨어지는 최소의 중심 개수를 찾아내는 것이다. 본 논문에서 제안한 Bi-Section의 알고리즘은 그림 2.와 같다.

Bi-section 방법은 중심 개수의 결정 시간이 $\log_2 N$ 에 비례하기 때문에 학습 데이터의 개수가 크더라도 비교

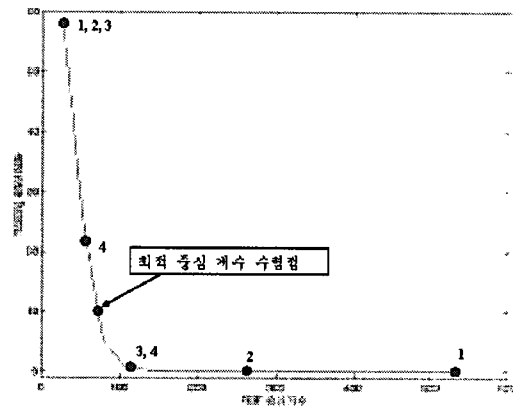


그림 3. Vowel 데이터 문제에 대한 Bi-section 진행 과정 (목표 에러율 0.1)

적 안정적인 시간 안에 최소 중심 개수를 구할 수 있다는 장점이 있다. 그림 3.은 5절에서 다른 Vowel 문제의 Bi-section 진행과정을 나타낸다. 그림에서 점이 검색 범위이며 알고리즘이 진행될수록 ([1,1] → [2,2] → [3,3] → [4,4]) 검색범위가 반씩 줄어들며 수렴함을 알 수 있다.

3.3 중심 위치 결정을 위한 보정된 K-medoids 군집화 기법

본 논문에서는 기본적으로 군집화 기법을 이용하여 RBF 중심의 위치를 결정한다. 먼저 식(3)과 같은 비용함수를 최소화 하는 k개의 군집의 중심을 입력공간에서 추출한다.

$$W(C) = \min_{C, \{m_k\}^k} \sum_{i=1}^n \sum_{c(i)=k} \|x_i - m_k\|^2 \quad (3)$$

여기서 군집의 개수인 k는 3.2절에서 다른 bi-section 알고리즘을 이용하여 결정한다. 하지만 데이터의 분포가 Non-convex인 경우는 입력 데이터를 class별로 분할하였다더라도 군집의 중심이 다른 class의 영역에 위치하는 경우가 생기게 된다. 따라서 입력 공간에서 추출한 군집의 중심의 위치를 분할된 자신의 class의 데이터들 중 가장 가까운 값으로 보정한다. 이처럼 보정된 k-medoids 군집화 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 I. 보정된 K-medoids 군집화 알고리즘

1. 입력 공간에서 임의로 초기 군집의 중심 $\{m_1, \dots, m_k\}$ 를 추출한다.
2. 군집의 중심에 대해 식(3)을 최소화하도록 입력 데이터를 군집화하고 각 군집의 데이터들의 평균값을 구한다.
3. 2에서 구한 평균값들을 새로운 군집의 중심으로 update하고 식(4)와 같이 입력데이터들을 가장 가까운 중심이 속한 군집으로 다시 할당한다.

$$C(i) = \arg \min_{1 \leq k \leq K} \|x_i - m_k\|^2 \quad (4)$$

4. 입력데이터들이 군집화가 변화가 없을 때까지 2~3단계를 반복한다.
5. 최종 추출된 k개의 군집의 중심을 입력 데이터들 중 가장 가까운 값들로 수정한다.

4. Two-Phase 알고리즘

3절에서 제안한 기법들을 이용하여 목표에러 이하로 입력 데이터를 classify하는 Generalized RBF 네트워크의 중심의 최소 개수와 위치를 구하는 Two-Phase 알고리즘을 아래와 같이 제안한다. 알고리즘의 순서도는 그림 4와 같다.

알고리즘 II. RBF네트워크의 중심개수와 위치의 통합 결정하는 Two-Phase 알고리즘

1. $i=1$ 에서 c 까지 아래 과정 반복 (여기서 C 는 출력 class의 종류)

PHASE I : 각 class별 최적의 중심개수와 위치 결정

- 1.1. 전체 입력데이터를 i 번째 class에 속한 것파 속하지 않은 것으로 두 부분으로 분할한다.

$$\begin{aligned} \text{training sample} : & \{(x_1, d_1), (x_2, d_2), \dots, (x_N, d_N)\} \\ \Rightarrow & \begin{cases} D_i : \{(x_1, d_1), \dots, (x_n, d_n)\} \text{ for } d \in \text{class } i \\ D_{-i} : \{(x_1, d_1), \dots, (x_n, d_n)\} \text{ for } d \notin \text{class } i \end{cases} \end{aligned}$$

- 1.2. 아래와 같이 sub-sample D_i 중에서 class i 를 대표하는 RBF 중심의 위치와 개수를 결정한다.

[Bi-section method와 알고리즘 I의 군집기법 이용]

- 1.2.1. i 번째 class 데이터에 대한 목표에러 ϵ 과 검색범위(search space) 범위 $[\alpha_0, \beta_0]$ 결정.

$$(\alpha_0 = 0, \beta_0 = r_1)$$

- 1.2.2. 알고리즘 I의 군집기법 이용하여

sub-sample D_i 중 $\lambda_0 (= \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2})$ 개의 군집의 중심을 구한다.

- 1.2.3. λ_0 개의 중심을 sub-sample D_i 중 가장 가까운 점들로 보정한다. 이 점들을 C_{i0} 라 한다.

- 1.2.4. C_{i0} 를 RBFN의 중심으로 이용하여 전체 training sample에 대한 weight를 구한다.

$$W = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T d$$

- 1.2.5. 위 weight를 이용하여 sub-sample D_i 에 대한 에러 ϵ_0 를 구한다. (즉 class i 에 속한 sample을 속하지 않았다고 classify할 비율)

- 1.2.6. 알고리즘 I의 군집기법은 군집의 중심의 초기위치에 따라 수렴 위치가 차이가 많이 나므로 1.2.2~1.2.5의 과정을 10회 반복하여, ϵ_0 가 가장 작게 나오는 C_{i0} 를 최종 i 번째 class의 λ_0 개의 RBF 중심의 위치로 정한다.

- 1.2.7. 검색범위를 아래와 같이 반으로 줄인다.

$$[\alpha_0, \beta_0] \Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0, \beta_1 = \lambda_0 & \text{if } \epsilon_0 \leq \epsilon \\ \alpha_1 = \lambda_0, \beta_1 = \beta_0 & \text{if } \epsilon_0 > \epsilon \end{cases}$$

- 1.2.8. 검색범위가 수렴할 때까지 1.2.1~1.2.7의 과정을 반복

- 1.2.9. 이를 통해 목표에러 ϵ 에 도달하는 최소의 RBF 중심인 C_i 를 구한다. (즉 class I 의 중심의 위치와 개수가 동시에 결정)

2. 1의 과정을 통해 각 class별로 RBF의 최적의 중심의 개수와 위치를 아래와 같이 구하였다.

$$\text{RBF 네트워크의 중심} : C = \{C_1^*, \dots, C_i^*, \dots, C_c^*\}$$

PHASE II : RBF 중심을 이용해 최적 네트워크 구성

3. 최종 RBF center C 를 이용하여 전체 입력 데이터에 대한 Generalized RBF 네트워크를 구성하고 weight를 구한다.(식(2) 이용)

5. 수치예제 실험결과

4절에서 제안한 RBF네트워크의 중심개수와 위치의 통합결정 알고리즘의 성능을 평가하기 위해서 2-spiral, sonar, heart, vowel 등의 잘 알려진 4종류의 벡치마킹 분류문제(classification problem)에 적용하였

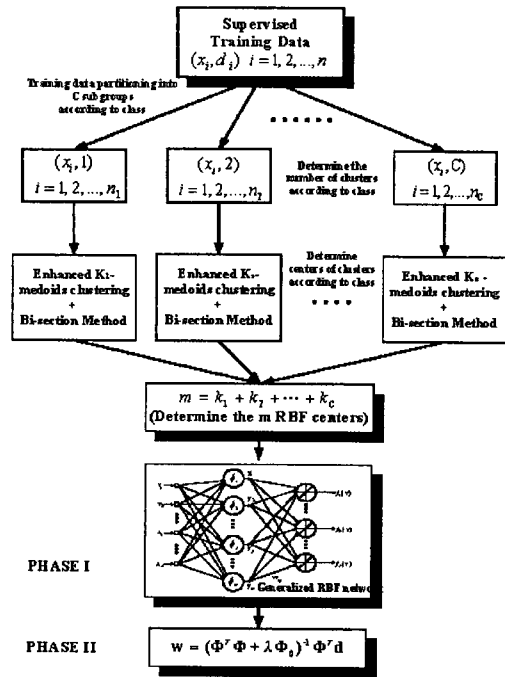


그림 4. Two-Phase 알고리즘의 순서도

다. 수치예제에 대한 설명은 다음과 같다.

5.1 수치예제 설명

2-Spiral 데이터는 2차원 평면상에 놓인 2개의 서로 다른 소용돌이(spiral) 모양의 입력 데이터를 분류하는 문제이다. 2개의 소용돌이는 원점을 출발점으로 하여 서로 엉켜있는 형태로 매우 어려운 분류 문제 중에 하나이다. **Sonar** 데이터는 신경망을 이용하여 sonar 신호를 분류한 Gorman과 Sejnowski의 연구에서 이용된 것으로 금속성 실린더에서 반사된 sonar 신호와 실린더 형태의 암석에서 반사된 sonar

표 1. 수치예제 설명

	입력차원	class 개수	입력데이터개수
2-Spirals	2	2	388 (194,194)
Sonar	60	2	104 (55,49)
Heart	13	2	180 (98,82)
Vowel	10	11	528 (48,48,48,48,48,48,48,48,48,48)

(* ()안은 각 class 별 입력 데이터의 개수)

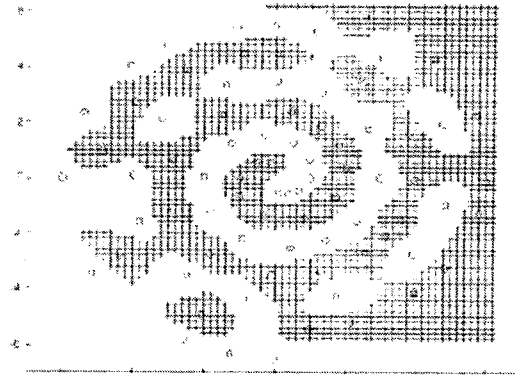


그림 5. 2-spiral 문제의 결정영역

신호를 분류하는 문제이다. **Heart** 데이터는 심장병의 발생율과 나이,성별 등의 13 종류의 사람의 특성 간의 관계를 보여준다. 출력값은 심장병이 있고 없고 유무의 2 class로 나뉘어진다. **Vowel** 데이터는 log area ratios를 통해 기록된 lpc의 입력값을 통해 British English의 11개의 모음(vowel)을 분류하는 문제이다. 위 수치예제의 속성은 표 1.에서 정리하였다.

5.2 실험 결과

5.1절에서 설명한 4종류의 수치예제를 3종류의 알고리즘을 적용하여 실험하였다. 결과는 표2.에 정리하였다. Method I은 본 논문에서 제안한 RBF네트워크의 중심개수와 위치의 통합결정하는 Two-Phase 알고리즘이며 Method II와 III은 제안된 알고리즘의 성능과 비교하기 위한 기존의 알고리즘이다. Method II는 k-means군집화 기법을 이용하여 중심의 위치를 결정하는 알고리즘으로 중심의 개수인 k는 한개씩 증가시켜가며 목표 에러율에 도달하는 최소의 개수로 결정하였다. Method III는 입력 데이터 중에 임의로 중심의 위치를 결정하는 알고리즘으로 중심의 개수는 Method II와 같이 한 개씩 증가시켜가며 목표 에러율에 도달하는 최소의 개수로 결정하였다. 본 논문에서는 RBF인 다변량 가우스 함수의 분산은 1로 고정하였고 목표 에러율은 0.1로 하였다. 그림 5.는 제안된 알고리즘인 Method I을 이용하여 2-spiral 문제의 분류의 결정 영역(decision region)을 나타낸 그림이다.

표 2. 수치예제 실험 결과

알고리즘	Method I (제안된 알고리즘)			Method II			Method III		
	중심 개수	계산시간	에러율	중심 개수	계산시간	에러율	중심 개수	계산시간	에러율
2-Spirals	78 (36,42)	351	0.067	84	5650	0.069	88	5925	0.080
Sonar	34 (17,17)	34	0.096	37	1570	0.096	37	1112	0.096
Heart	126 (67,59)	159	0.106	126	13956	0.106	126	13094	0.106
Vowel	61 (2,5,5,2,8, 8,2,2,11,2,14)	256	0.115	65	4000	0.099	65	3688	0.093

(* Method I에서 ()안은 각 class 데이터 별 RBF 중심의 개수)

6. 결론 및 토의

본 논문에서는 사용자가 임의로 설정한 목표 에러율 이하에 도달 하는 Generalized RBF 네트워크의 최소 중심 개수와 그 위치를 동시에 결정하는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘을 4 종류의 수치 예제에 적용한 결과, 표 2.에서 볼 수 있듯이 중심개수를 결정하는데 걸리는 시간이 최소 15배에서 최대 85배까지 단축됨을 알 수 있었다. 구해진 중심 개수는 중심을 하나씩 증가 시켜 구한 Method II나 III와 거의 유사하거나 더 작게 결정됨을 알 수 있다. 이는 bi-section 알고리즘이 안정적으로 중심의 개수를 비교적 정확하게 결정하고 있음을 입증한다. 또한 같은 에러율을 가지면서 오히려 더 적은 수의 RBF 중심을 이용한다는 것은 입력 데이터를 class별로 분할하고 분할된 데이터 각각에 대해 군집화하여 구한 RBF의 중심이 기존의 기법보다 각각 분류된 데이터의 분포를 더 잘 반영함을 나타낸다.

본 논문에서 제안한 Two-Phase 알고리즘의 의미는 기존의 RBF 중심 결정 알고리즘들이 대부분 중심의 위치만을 고려한 것에 비해 제안된 알고리즘에서는 RBF 네트워크 구성에 가장 큰 변수 중에 하나인 중심의 개수를 위치와 통합적으로 결정한다는 것이다.

참고 문헌

[1] Cover, T.M., "Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition," *IEEE Trans. Electronic Computers*, vol. EC-14, pp. 326-334, 1965.
[2] J. Barry Gomm and Ding Li Yu, "Selecting Radial

Basis Function Network Centers with Recursive Orthogonal Least Squares Training," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, no. 2, pp. 306-314, 2000.

[3] Z. Uykan, C. Guzelis, M. E. Celebi and H. N. Koivo, "Analysis of inputoutput clustering for determining centers of RBFN," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, pp. 851-858, July 2000.

[4] K. Z. Mao, "RBF Neural Network Center Selection Based on Fisher Ratio Class Separability Measure," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 13, no.5, pp. 1211-1217, September 2002.

[5] A. C. Micchelli, "Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions," *Construct. Approx.*, vol. 2, pp. 11-22, 1986.

[6] M. J. D. Powell, "Radial basis functions for multivariable interpolation: A review," in *Proc. IMA Conf. Algorithms for the Approximation of Functions and Data*, Shrivvenham, U.K., 1985.

[7] D. S. Broomhead and D. Lowe, "Multivariable functional interpolation and adaptive networks," *Complex Syst.*, vol. 2, pp.321-355, 1988.

[8] S. Elanayar V. T. and Y. C. Shin, "Radial basis function neural network for approximation and estimation of nonlinear stochastic dynamic systems," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 5, no. 4, pp. 594-603, 1994.

[9] W. Kaminski and P. Strumillo, "Kernel orthonormalization in radial basis function neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 8, no. 5, pp. 1177-1183, 1997.

[10] S. Chen, "Nonlinear time series modeling and

prediction using Gaussian RBF networks with enhanced clustering and RLS learning," *Inst. Elect Eng. Electron. Lett.*, vol. 31, no. 2, pp. 117-118, 1995.

[11] J. Moody and C. Darken, "Fast learning in networks of locally-tuned processing units," *Neural Comput.*, vol. 1, pp. 281-294, 1989.

[12] S. Chen, C. F. Cowan, and P. M. Grant, "Orthogonal least squares learning algorithms for radial basis function networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, pp. 302-309, 1991.

[13] R. Schokopf, K. K. Sung, C. J. C. Burges, F. Girosi, P. Niyogi, T. Poggio, and V. N. Vapnik, "Comparing support vector machines with Gaussian kernels to radial basis function classifiers," *IEEE Trans. Signal Processing*,

[14] M. J. Orr, "Regularization in the selection of RBF centers," *Neural Computation*, vol. 7, no. 3, pp. 606-623, 1995.

[15] N. Dyn and A. Ron, "Radial basis function approximation: from grided centers to scattered centers," in *Proc. London Math. Soc.*, 1995.

[16] C. M. Bishop, "Improving the generalization properties of radial basis function neural networks," *Neural Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 579-588, 1991.

[17] L. Bruzzone and D. F. Prieto, "A technique for the selection of kernel function parameters in RBF neural networks for classification of remote sensing images," *IEEE Trans. Geosci.*, vol. 37, no. 2, pp. 1179-1184, 1999.

[18] Zheng ou Wang and Tao Zhu, "An efficient learning algorithm for improving generalization performance of radial basis function neural networks," *Neural Networks*, vol. 13, no. 4,5, 2000.