한국경영과학회/대한산업공학회 2003 춘계공동학술대회
2003 년 5 월 16 일-17 일 한동대학교(포항)

확률적 재고시스템에서 조달기간수요에 대한 고찰

박창규 · 추상목
울산대학교 경영대학 경영학부 · 울산대학교 자연과학대학 수학및물리기술학부

Abstract

Due to the importance of lead time demand in the design of inventory management systems, researchers and practitioners have paid continuous attention and a few analytic models using the compound distribution approach have been reported. However, since the nature of compound distributions is hardly amenable, the analytic models have been done by non-recognition of the compound nature of some components to reduce the analytic task. This study concerns some of the important aspects in the analytic models. Through the theoretic examination of the analytic model approach and the comparison with the rigid compound stochastic process approach, this study clarifies the assumptions implicitly made by the analytic models and provides some precautions in using the analytic models.

1. 서론

재고관리시스템을 설계함에 있어서 조달기간수요(lead time demand, LTD)에 대한 지식은 필수적 요소이므로 연구자들 뿐만 아니라 실무자들도 LTD 에 대해 지대한 관심을 쏟아왔다. LTD 분포를 유도하기 위해서는 수요와 조달기간에 대한 분포를 동시에 고려하여야 하며, 이 작업은 아주 복잡하고 어려운 수리적 과정을 거쳐야 한다. 따라서 종종 LTD 가 특정의 편리한 분포(예를 들어, 포아송, 정규, 감마, 와이블분포 등)를 따른다는 가정 하에 많은 연구들이 재고문제를 풀어왔다[4].

그러나 Bagchi, Hayya & Ord[1], Carlson[2], McFadden[5] 등과 같은 연구자들은 복합분포(compound distribution)를 이용하여 LTD 분포를 명시적으로 유도하였다. Bagchi, Hayya & Ord[1] 등이 주장하듯이, 복합분포를 이용한 방법은 다음과 같은 장점이 있다. (1) 복합분포의 각 구성요소들을 개별적으로 모형화하여 쉽게 모수를 추정할 수 있다. 그리고 (2) 각 구성요소들을 개별적으로 모형화하면 모형구조가 간단해지고 데이터의 이용이 수월해지므로 직접적으로 LTD 분포를 모형화하려는 시도보다 더 체계적인 접근방법이 된다.

Bagchi, Hayya & Ord[1]는 수리적으로 만족할 만한 결과를 발표한 연구들을 검토한 후에 LTD 를 유도하는 정식모형을 제안하였다. 그들이 검토한 연구들에서는 연속적인 기간 당 수요와 조달기간이 독립적이고 동일한 분포를 따르는 확률변수로 가정되었고, LTD 분포는 복합분포로 유도되었다. LTD 를 유도하는 정식모형에 대해서는 제 2 장에서 자세히 다루겠지만 우선 간단히 살펴보면, 정식모형은 주문강도(order intensity), 주문크기(order size), 그리고 조달기간을 주요요소로 고려한다. 그리고 LTD 특성을 밝혀내는 수리적 분석과정에 복잡성을 줄이기 위해서 주요요소들 중에 2 가지 요소를 중간요소(예를 들면, DPUT(demand per unit time), 제 2 장에 있는 [그림 1] 참조)로 통합한다.

수리적으로 만족할 만한 결과를 낸 대부분의 연구들이 이 정식모형에 포함되는데 이는

그렇게 놀랄 만한 일은 아니다. 왜냐하면, 복합 분포를 수리적으로 유도하는 과정은 단지 두개의 확률요소만을 고려하더라도 매우 복잡하며 그 이상의 확률요소들을 고려한다는 것은 매우 도전적인 작업이기 때문이다. 여기서 우리는 다음과 같은 난관에 직면하게 된다. 즉, 실제에 가까운 LTD 분포를 유도하는 모형은 무척 힘든 계산과정을 유발하고, 종종 수리적인 유도가 불가능하다. 반면에 보다 간단한 모형은 유도과정은 수월하나 실제상황을 묘사하기에 부적절한 면을 갖게 된다.

대개 우리는 간단한 모형을 실제상황의 근사치로서 큰 비판 없이 받아들인다. 하지만 한 번쯤은 어떠한 상황에서 이런 간단한 모형에 의해 유도된 LTD 분포가 적절한 성과를 발휘하는지 검토할 필요성은 충분히 있다. 본 논문의 목적은 LTD 를 유도하는 정식모형을 비판하기 위한 것이 아니라 정식모형을 사용할 때 주의해야 할 사항을 제공하여 정식모형을 이용하려는 연구자나 실무자를 돕기 위한 것이다. 우선 본 논문은 보다 현실적인 LTD 분포를 이론적으로 유도한다. 비록 이런 시도는 완전한 함수형태(closed function form)를 갖는 LTD 분포를 수리적으로 유도하기는 어렵지만, 최소한, 약간의 계산과정을 통하여 LTD 분포의 특성을 밝혀 낼 수 있다. 그런 다음, 위의 결과를 바탕으로 정식모형의 특성을 검토하고, 정식모형이 어떠한 상황에서 적절한 성과를 발휘하는지 밝혀낸다.

2. 접근방법

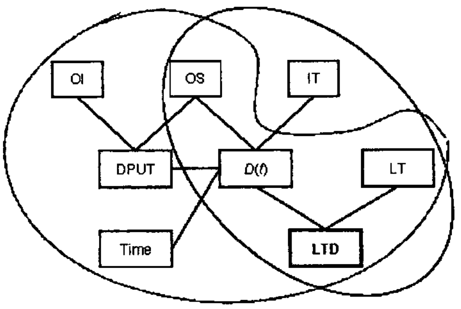
확률적 재고시스템에서 수요는 독립적이고 동일한 분포를 따르는 확률변수들의 연속체로 묘사될 수 있다. 이런 가정을 바탕으로 누적수요과정(cumulative demand process)에 대해 다음과 같은 정의를 이끌어 낼 수 있다[3].

정의 1. $D(0) = 0$ 를 갖는 확률수요과정(stochastic demand process) $D = \{D(t), 0 \le t \le a\}$는 독립적이고 균일한 증가치(homogeneous increments)를 갖으며, 각 $t \in (0,a)$에 대해서 유한의 분산을 갖는 확률과정(stochastic process)이다. 여기서 $D(t)$는 일정기간 $(0,t)$동안의 누적수요이다.

LTD 는 조달기간(lead time, LT)동안에 발생한 총 수요이다. 여기서 LT 는 재고관리시스템에서 쓰이는 용어로 재보충기간, 즉 보충주문이 내려진 시각부터 공급자로부터 그 주문에 대한 보충을 받을 때까지의 시간이다. 정의 1 에 따르면 LTD 는 $D(LT), LT \ge 0$ 로 묘사되어 진다.

LTD 를 유도하는 접근방법은 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있고, 여기서는 2 가지 접근방법을 보여주고 있다. 점선으로 된 원으로 둘러 쌓인 접근방법은 Bagchi, Hayya & Ord[1]가 제안한 정식모형이다. 수리적으로 만족할 만한 결과를 낸 대부분의 연구들이 이 접근방법에 해당된다. 이 접근방법은 우선적으로 주문강도(order intensity, OI)와 주문크기(order size, OS)를 결합하여 단위 시간 당 수요(demand per unit time, DPUT)를 유도한다. 여기서 OI 는 시간 당 주문의 수, OS 는 각 주문의 크기, 그리고 DPUT 는 단위 시간 당 총 수요를 의미한다. 그런 다음, $D(t)$는 DPUT 에 시간을 비례적으로 적용시켜 유도하고, 최종적으로 $D(t)$와 LT 를 결합하여 LTD 를 유도한다. (정식모형은 OI 와 LT 를 결합하여 유도한 조달기간주문강도(lead time order intensity)라는 개념을 이용하는 다른 대안도 보여주고 있지만, 이 대안은 앞의 접근방법과 기본적으로 같고 문헌적으로 알려지지 않아서 본 논문에서는 생략한다.)

실선으로 된 원으로 둘러 쌓인 2 번째 접근방법은 재생-복합 확률과정(renewal-compound stochastic process)으로 묘사되는 확률수요과정을 따른다. 이 접근방법은 LTD 분포를 수리적으로 유도하는 과정이 복잡하고 계산상의 어려움이 따르기는 하지만, 앞의 접근방법보다 현실성을 좀더 잘 반영하고 있다. 본 논문은 앞의 접근방법을 검토하기 위한 기준으로서 이 접근방법을 활용한다. 이 접근방법은 우선 OS 와 도착 주문 간의 시간(inter-arrival time, IT)을 이용하여 $D(t)$를 유도한다. 여기서 IT 는 연속적으로 도착하는 주문간의 시간간격이다. 그런 다음, $D(t)$와 LT 를 결합하여 LTD 를 유도한다. 앞으로 본 논문에서는 각각의 접근방법을 정식모형 접근방법과 재생-복합 확률과정 접근방법이라고 부르기로 한다.



<그림 1> LTD 를 유도하는 접근방법

2.1. 재생-복합 확률과정 접근방법

이 접근방법은 OS 와 IT 의 정보를 이용하여 일정기간 $(0,t)$동안의 총 수요인 $D(t)$를 유도한다. 여기서 주문크기의 연속체 $\{OS_i, i = 0, 1, 2, \ldots\}$내의 OS_i 는 서로 독립이고, 동일한 분포(즉, 확률질량함수 $h(.)$, 누적분포함수 $H(.)$, 평균 μ_{OS}, 분산 σ^2_{OS})를 따른다고 가정한다. 그러면 일정기간 $(0,t)$동안의 총 수요는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

여기서 $N(t)$는 일정기간 $(0,t)$동안에 도착한 주문의 수이고 $N(0) = 0, D(0) = 0$.

주어진 시간 t 에서 $D(t)$의 누적분포함수를 $F(d;t)$라 정의하면, $d, t \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} F(d;t) &= \Pr\{D(t) \leq d\} = \Pr\{\sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \leq d\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \leq d \mid N(t) = n\}\Pr\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\sum_{i=0}^{n} OS_i \leq d\}\Pr\{N(t) = n\} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 도착 주문간의 시간간격의 연속체 $\{IT_i, i = 0, 1, 2, \ldots\}$내의 IT_i 는 서로 독립이고, 동일한 분포(즉, 확률밀도함수 $g(.)$, 누적분포함수 $G(.)$, 평균 μ_{IT}, 분산 σ^2_{IT})를 따른다고 가정한다. 그러면 비음 정수를 갖는 확률과정 $\{N(t), t \geq 0\}$는 일정기간 $(0,t)$동안에 도착한 연속적인 주문을 기록하는 재생과정(renewal process)이다.

이제 n 번째 주문이 도착할 때까지의 대기시간을 W_n이라 하면,

$$W_n = \sum_{i=0}^{n} IT_i \qquad n \geq 0 \tag{3}$$

여기서 $W_0 = 0$ 이고 $IT_0 = 0$.

대기시간과정 $\{W_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$과 재생과정 $\{N(t), t \geq 0\}$을 잇는 기본적인 관계는 다음과 같다[7].

$$N(t) \geq n \text{ if and only if } W_n \leq t$$

따라서 $n, t \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t) \geq n\} &= \Pr\{W_n \leq t\} = \Pr\{\sum_{i=0}^{n} IT_i \leq t\} \\ &= G_n(t) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $G_n(t)$는 $G(t)$의 n 차 convolution 이고, $t \geq 0$ 에 대해

$$G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(t-y)dG(y) \qquad n \geq 2 \tag{5}$$

그리고 $G_0(t) = 1, G_1(t) = G(t)$.

결국 식(4)로부터 $n, t \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} z(n;t) &= \Pr\{N(t)=n\} \\ &= \Pr\{N(t) \geq n\} - \Pr\{N(t) \geq n+1\} \\ &= G_n(t) - G_{n+1}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

식(6)을 식(2) 삽입하면, $d, t \geq 0$ 에 대해

$$F(d;t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(d) z(n;t) \tag{7}$$

여기서 $H_n(d)$는 $H(d)$의 n 차 convolution 이고, $d \geq 0$ 에 대해

$$H_n(d) = \sum_{y=0}^{d} H_{n-1}(d-y)h(y) \quad n \geq 2 \tag{8}$$

그리고 $H_0(d)=1, H_1(d)=H(d)$.

마지막으로 LTD 는 $D(t)$와 LT 를 결합시켜 얻는다. 여기서 LTD 의 누적분포함수를 $L(d)$라 정의하고, LT 는 평균 μ_{LT} 과 분산 σ^2_{LT} 를 갖는 확률밀도함수 $k(.)$를 따른다고 가정하면, $d \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} L(d) &= \sum_{x=0}^{d} \int_0^{\infty} \Pr\{D(t)=x\}k(t)dt \\ &= \sum_{x=0}^{d} \int_0^{\infty} [F(d;t) - F(d-1;t)]k(t)dt \end{aligned} \tag{9}$$

2.2. 정식모형 접근방법

이 접근방법은 복합분포의 구성요소인 OS 와 OI 를 결합시켜 만든 DPUT 의 복합적 성질(compound nature)을 암시적으로 취급함으로써 LTD 를 유도하는 과정에서 수리적 복잡성을 줄이고 있다. 주문강도 OI 가 평균 μ_{OI} 과 분산 σ^2_{OI} 를 갖는 확률질량함수 $p(.)$를 따른다고 가정하면, 단위 시간 당 수요는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$DPUT = \sum_{i=0}^{OI} OS_i \tag{10}$$

그리고 관련된 확률분포는 다음과 같이 구해진다. 즉, $d \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} \Pr\{DPUT \leq d\} &= \Pr\{\sum_{i=0}^{OI} OS_i \leq d\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\sum_{i=0}^{OI} OS_i \leq d \mid OI=n\}\Pr\{OI=n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{\sum_{i=0}^{n} OS_i \leq d\}p(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(d)p(n) \end{aligned} \tag{11}$$

정식모형 접근방법에서는 일정기간 $(0,t)$동안의 총 수요인 $D(t)$를 DPUT 에 시간을 암시적으로 포함시켜 유도한다. 다시 설명하면, DPUT 는 단위 시간 당 수요이므로 $D(t)$는 일정기간 $(0,t)$동안에 발생한 DPUT 들의 합이 되고, 각 DPUT 는 독립이면서 동일한 분포를 따른다고 가정한다. 따라서, $d \geq 0$ 이고 $t > 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} \Pr\{D(t) \leq d\} &= \Pr\{DPUT * t \leq d\} \\ &= \Pr\{DPUT \leq \frac{d}{t}\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\frac{d}{t})p(n) \end{aligned} \tag{12}$$

식(7)과 비교하여 보면, 정식모형 접근방법은 DPUT 의 복합적 성질을 간과함으로써 수리적 복잡성을 상당히 줄이고 있다는 사실을 식(12)로부터 알 수 있다. 마지막으로 LTD 의 확률분포는 재생-복합 확률과정 접근방법과 유사하게 식(9)를 이용하여 구할 수 있다.

식(9)로부터 알 수 있듯이, 주변확률분포나 조건부 확률분포를 이용하여 LTD 분포를 유도하는 과정은 종종 수리적으로 다루기가 힘들다. 따라서 정식모형 접근방법은 발생함수(generating functions)를 이용하고 있다. 하지만 이 방법은 오직 특수한 경우에만 해답이 제공되고 있다(참고문헌[1] 참조).

3. 접근방법의 이론적 비교 및 토론

정식모형 접근방법에서 중간요소의 복합적

성질을 간과할 수 밖에 없는 것은 수리적 해답을 얻기 위해 지불해야 할 대가라고 Bagchi, Hayya & Ord[1] 등은 주장하고 있다. 그러나 지불해야 할 대가가 허용수준을 넘는다면, 우리는 다른 접근방법을 고려해야 할 것이다. 본 장에서는 제 2 장에서 기술한 2 가지 접근방법을 비교하여 수요과정의 특성을 검토하고, 어떠한 상황에서 정식모형 접근방법을 적절히 사용할 수 있는지 밝혀보고자 한다.

재생-복합 확률과정 접근방법에서 식(1)에 있는 OS_i 와 $N(t)$는 확률변수이므로 일정기간 $(0,t)$동안의 총 수요인 $D(t)$는 확률변수들의 무작위 합(random sum)이다. 따라서 $D(t)$의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다(참고문헌[7] 참조).

$$E[D(t)] = \mu_{OS} E[N(t)] \quad (13)$$
$$Var[D(t)] = E[N(t)]\sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2 Var[N(t)]$$

마찬가지 방법으로, 식(10)으로부터 DPUT 역시 확률변수들의 무작위 합임을 알 수 있고, DPUT 의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$E[DPUT] = \mu_{OS}\mu_{OI}$$
$$Var[DPUT] = \mu_{OI}\sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2\sigma_{OI}^2 \quad (14)$$

정식모형 접근방법에서 $D(t)$는 독립적이고 동일한 분포를 따르는 DPUT 가 일정기간 $(0,t)$ 동안에 발생한 빈도의 합으로 가정하므로 $D(t)$의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$E[D(t)] = \mu_{OS}\mu_{OI} t$$
$$Var[D(t)] = (\mu_{OI}\sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2\sigma_{OI}^2)t \quad (15)$$

본 논문은 수요의 변동성(demand variability)을 측정하기 위해서 분산 대 평균 비율(variance-to-mean ratio, VMR)을 이용한다. 비록 자주 사용되는 변동계수(coefficient of variation)보다는 잘 알려져 있지는 않지만, VMR(또한, index of dispersion 이라고도 불림)은 이산형 분포를 구분하는데 유용하게 사용될 수 있다[6]. 식(15)에 따르면, 정식모형 접근방법은 수요의 VMR 이 상수라는 가정에 기초를 두고 있음을 알 수 있다. 다시 말해서, 수요의 평균과 분산이 시간에 대해서 일정한 비율로 증가한다는 것이다. 이런 가정은 식(13)에 있는 재생과정 $\{N(t),\ t \geq 0\}$이 포아송 과정(Poisson process)일 경우에 정당화 될 수 있다. 이 분석에 따르면, 정식모형 접근방법은 IT 가 지수분포를 따를 경우에만 재생-복합 확률과정 접근방법과 일치될 수 있다.

그러나 다음과 같은 $N(t)$의 근사적 성격에 따르면 (참고문헌[7] 참조),

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu_{IT}}$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \frac{\sigma_{IT}^2}{\mu_{IT}^3} \quad (16)$$

식(13)에 있는 $N(t)$의 근사적 평균과 분산은 각각 t/μ_{IT}와 $t\sigma^2_{IT}/\mu^3_{IT}$으로 접근한다. 이 분석으로부터 우리는 IT 가 어떠한 분포를 따르더라도 고려하는 기간이 충분히 크다면, 재생-복합 확률과정 접근방법과 정식모형 접근방법은 $D(t)$에 대해 유사한 결과를 낳는다는 것을 알 수 있다.

지금까지의 이론적 검토에 비추어 볼 때, 정식모형 접근방법은 확률수요과정이 복합포아송과정(compound Poisson process)을 따를 경우에 가장 적절함을 알 수 있다. 그리고, 다른 경우일지라도, 근사치를 사용할 수 있도록 LT 의 평균, μ_{LT} 이 충분히 크다면 정식모형 접근방법을 사용할 수 있으리라 추측할 수 있다.

참고문헌

[1] Bagchi, U., J.C. Hayya and J.K. Ord, "Modeling Demand During Lead Time," *Decision Sciences*, Vol.15(1984), pp.157-176.

[2] Carlson, P.G., "An Alternative Model for Lead-Time Demand: Continuous-Review Inventory Systems," *Decision Sciences*, Vol.13(1982), pp.120-128.

[3] Girlich, H.J., "Some Comments on Normal Approximation for Stochastic Demand Processes," *International Journal of Production Economics*, Vol.45(1996), pp.389-395.

[4] Kumaran, M. and K.K. Achary, "On Approximating Lead Time Demand Distributions Using the Generalized λ-type Distribution," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.47(1996), pp.395-404.

[5] McFadden, F.R., "On Lead Time Demand Distributions," *Decision Sciences*, Vol.3(1972), pp.106-126.

[6] Ord, J.K., *Families of Frequency Distributions*, Charles Griffin & Co. Ltd., London, 1973.

[7] Taylor, H.M. and S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, Inc., London, 1984.