비정렬 격자 유한체적법을 이용한 삼차원 자유표면 유동 해석 코드의 개발

임중혁* · 백제현†

Development of a Solver for 3-D Flows with Free Surface using the Finite Volume Method on Unstructured Grids

Joong-Hyuck Yim, Je-Hyun Baek

Key Words : Free Surface(자유표면), Finite Volume Method(유한체적법), Unstructured grids(비정렬 격자), VOF Method(Volume of Fluid 방법)

Abstract

A Navier-Stokes equation solver for incompressible viscous flows with free surface is developed and tested. This is based upon a fractional time step method and a non-staggered finite volume formulation for unstructured meshes. For time advancement scheme, Adams-Bashforth method for convective term and Crank-Nicolson method for diffusive term are applied. The interface between two fluids with different fluid properties is tracked with Piecewise Linear Interface Calculation(PLIC) Volume-of-Fluid(VOF) methods. Computational results are presented for some test problems: the broken dam, the sloshing in a rectangular tank, the filling of a cylindrical tank.

기호설명

f	:체적비율
$\vec{n}$:	:면수직벡터
$\hat{n}$:	:경계면 수직벡터
u	:속도성분(셀중심)
U	:면수직속도
P	:압력
r	:밀도
m	:점성계수
S	:면의 넓이
V	:셀의 체적
t	:시간

하첨자

f	:면표시
g,l	:기체, 액체
i, j	:방향표시

* 회원, 포항공과대학교 기계공학과 대학원

† 책임저자, 회원, 포항공과대학교 기계공학과
E-mail : jhbaek@postech.ac.kr
TEL : (054)279-2168 FAX : (054)279-3199

1. 서 론

자유표면과 같이 물성치가 서로 다른 변화하는 경계면을 포함한 유동은 자연이나 산업 현장에서 쉽게 찾아볼 수 있으며, 대단히 중요한 역할을 한다. 따라서 과거로부터 지금까지 경계면이 포함된 유동 해석에 관한 연구는 활발하게 이루어져 많은 발전을 이룩하였지만, 경계면에서의 큰 밀도 등의 차이로 인하여 여전히 어려움을 겪고 있다.

경계면이 존재하는 유동 해석방법으로는 일반적으로 크게 라그랑지안격자기법, 오일러리안격자기법, 또는 두 방법을 조합한 ALE(Arbitrary

Lagrangian-Eulerian)기법 등으로 나눌 수 있으며, 1965 년 Harlow 와 Welch 의 MAC 방법과 1980 년 Hirt 와 Nichols 의 VOF 방법[1] 이후로 오일러리안 격자기법 계열의 연구가 보다 활발히 진행되고 있다. 오일러리안 격자기법을 이용한 자유표면 유동 해석은 경계면의 변형이 큰 경우에도 효과적이라는 장점을 지니지만, 별도의 방정식을 풀어야 하는 점과 자유표면의 위치를 보다 정확하게 추적해야 하는 어려움이 따른다.

이와 같이 방정식 풀이와 자유표면의 위치를 찾는 알고리즘들에는 대표적으로 VOF 방법과 Level Set 방법이 있다. 먼저 체적비율을 이용하는 VOF 방법은 90 년대 중반 까지는 단순화 시킨 SLIC 방법이나 SOLA-VOF 알고리즘 등을 사용한 여러 종류의 해석 코드들이 개발되었으며, 이후로 Youngs 등에 의하여 구분적선형경계면근사(piecewise linear interface approximation)방법이 제안된 이후 Pilliod 와 Puckett 에 의한 2 차 정확도의 PLIC(Piecewise Linear Interface Calculation) 방법[11] 이 현재 널리 사용되고 있다. 액적이나 기포 등의 해석에 중요한 표면장력효과를 위하여 CSF(Continuum Surface Force) 모델을 널리 사용하면서 경계면의 곡률을 정확하게 구하기 위한 여러 가지 노력 속에서 Osher 와 Sethian[9]에 의하여 처음 제안된 거리함수를 이용한 Level Set 방법은 경계면의 위치 추적이 용이하고, 경계면의 곡률을 보다 효과적으로 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 VOF 방법과 비교하여 각 상의 질량보존에 문제점이 있었다. 최근에는 Sussman 과 Puckett[8]이 VOF 방법과 Level Set 방법을 상호 보완하는 CLSVOF(Coupled Level Set and Volume-of-fluid)방법을 제시하기도 하였다.

지배방정식을 해석하는 여러 가지 방법 중에서 fractional step 방법은 비정상 유동 해석의 경우에 많이 사용되고 있으며, Zang[3] 등은 비엇갈림격자(non-staggered grids) 상에서 운동량보간법(momentum interpolation method)을 적용한 fractional step 방법을 제시하였다. 또한 90 년대 중반 이 후에는 복잡한 형상에서 격자 생성이 상대적으로 용이한 비정렬격자계(unstructured grid system)를 유한체적법(Finite Volume Method)에 이용한 해석방법이 많이 사용되고 있는데, Kim 과 Choi[4]는 Zang 등의 방법을 비정렬격자계에 적용하였다.

본 연구에서는 비정렬격자계를 이용하여 임의의 형상에서 3 차원 자유표면 유동해석을 할 수 있는 해석코드의 개발을 목적으로 하였다.

2. 수치해석방법

2.1 지배방정식 및 수식화

비정상 비압축성 점성 유동 해석을 위한 지배방정식으로 다음의 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}[m(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})]\right)+s_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad (2)$$

식 (1)에서 밀도 r와 점성계수 m는 식 (3)과 같이 셀 중심에서 각 검사체적과 액상의 체적비로 정의된 체적비율(volume fraction) f 의 함수 형태로 계산되며, 생성항 s_i 에는 중력과 표면장력 효과 등이 포함된다.

$$\begin{aligned} r(f) &= f r_l + (1-f) r_g \\ n(f) &= f n_l + (1-f) n_g \end{aligned} \quad (3)$$

외재적방법(explicit method)으로 체적비율 전달 방정식을 풀어 다음 단계의 체적비율 f를 계산하는 VOF 방법은 시간간격에 대한 제약이 비교적 심하여 CFL 수가 작으므로(CFL<0.5) 효율성을 고려하여 식 (1)의 대류항과 확산항의 시간 적분법으로는 식 (4)와 같이 각각 Adams-Bashforth 방법과 Crank-Nicolson 방법을 사용하였다.

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(3u_i^n u_j^n - u_i^{n-1}u_j^{n-1}) = -\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}[\frac{m^{n+\frac{1}{2}}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^{n+1}+u_i^n)]\right)+s_i \quad (4)$$

식 (4)에 fractional step 방법[2,3]을 적용하면 다음의 식 (5), (6)으로 표현된다.

$$\frac{u_i^{*}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(3u_i^n u_j^n - u_i^{n-1}u_j^{n-1}) = -\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial P^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}[\frac{m^{n+\frac{1}{2}}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^{*}+u_i^n)]\right)+s_i \quad (5)$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^*}{\Delta t}=-\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_i}-\frac{\partial P^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

여기서 밀도 r와 점성계수 m는 현재와 다음 단계에서의 체적비율을 이용하여 구해진 밀도와 점성계수를 평균하였다.

식 (6)의 양변에 발산(divergence: $\nabla\cdot$)을 취하여 얻어진 프아송방정식(Poisson equation)과 운동량방정식 (5)은 유한체적법을 사용하여 검사체적에 대하여 적분한 후 발산정리(divergence theorem)를 적용하면 각각 식 (7), (8)과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}&\frac{(u_i^*-u_i^n)}{\Delta t}+\frac{1}{2V}\int(3u_i^nU^n-u_i^{n-1}U^{n-1})_f\,dS\\&=-\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}V}\left(\int P^{n-\frac{1}{2}}n_i\,dS+\frac{1}{2}\int m^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial n}+\frac{\partial u_i^n}{\partial n}\right)dS\right)+s_i\end{aligned} \tag{7}$$

$$\int\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n}-\frac{\partial P^{n-\frac{1}{2}}}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{\Delta t}\int U^*dS \tag{8}$$

여기서, 대류항에 포함된 각 면에서의 속도 u는 주변 셀 중심에 위치한 속도 성분을 보간하여 얻어진다. 금번 연구에서는 1차 정확도 상류기법(1st order upwind scheme)과 비정렬격자계에 적용된 TVD 기법[5] (Total Variational Diminishing scheme)을 각각 적용하였다. (SUPERBEE limiter 사용)

식 (7)을 정리하여 얻어진 대수방정식을 계산하여 얻어진 중간속도(intermediate velocity) u*를 식 (8)에 대입하여 같은 방법으로 대수방정식을 풀어서 다음 단계에서의 압력을 구한다. 이렇게 구해진 다음 단계에서의 압력을 식 (9)에 대입하여 최종적으로 다음 단계에서의 속도를 구한다.

$$\begin{aligned}&u_i^{n+1}-u_i^*=-\frac{\Delta t}{r^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_i}-\frac{\partial P^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x_i}\right)\\&U^{n+1}-U^*=-\Delta t\left(\frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}}\right)_f\left(\frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n}-\frac{\partial P^{n-\frac{1}{2}}}{\partial n}\right)_f\end{aligned} \tag{9}$$

여기서, 셀의 중심에 속도성분 u 와 압력 P 가 위치하고 셀의 각 면에 수직속도 U 가 존재하는 비엇갈림격자계(non-staggered grid system) [3,4]를 사용하였으므로 식 (8)에도 적용된 것처럼 셀의 각 면수직속도(face-normal velocity)가 비압축성조건(divergence-free condition)을 만족한다.

$$\int U^{n+1}dS=0 \tag{10}$$

특히 체적비율전달방정식을 풀어서 다음 단계의 체적비율을 구하는 과정에서 면수직속도를 사용하므로 식 (10)은 각 상의 질량보존을 만족시키는 중요한 조건이 된다.

2.2 체적비율전달방정식 및 재구성 알고리즘

2.2.1 체적비율전달방정식

시간의 변화에 따른 체적비율 f의 변화를 계산할 수 있는 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec{u}f)=0 \tag{11}$$

식 (11)에 식 (7), (8)과 같은 방법으로 유한체적법을 이용하여 적분한 후 발산정리를 이용하여 면적분으로 바꾼 후 수식화 하면 다음의 식 (12)와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}f^{n+1}&=f^n-\frac{\Delta t}{V}\sum_f(f\vec{u})_f\cdot\vec{n}_fS_f\\&=f^n-\frac{\Delta t}{V}\sum_f U_fA_{f_{wet}}\end{aligned} \tag{12}$$

여기서, Fig. 1에 표현된 것과 같이 평면에 의하여 잘려진 체적이 셀의 각 면과 공유하는 넓이를 젖은면적(wetted area) $A_{fwet}(=f_fS_f)$으로 정의하였다.

본 연구에서는 식 (11)을 효과적으로 풀기 위하여 경계면이 포함된 셀 내에서의 자유표면을 직선(2D), 평면(3D)으로 가정한 PLIC VOF 방법[6]을 비정렬격자계를 이용한 지배방정식의 해석에 맞도록 단순화하여 사용하였다. VOF 방법의 경우 식 (12)와 같이 체적비율 전달방정식을 외재적방법으로 해석하게 되므로, 경계면의 재구성을 통하여 정확한 젖은 면적을 계산하여도 다음 단계의 체적비율 f^{n+1}이 1을 넘거나 0보다 작아지는 경우가 발생한다. 따라서, 이를 보정하는 과

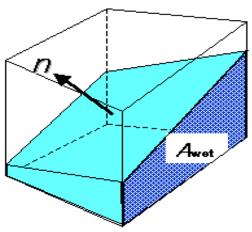

Fig. 1 Schematic diagram of interface-normal vector and wetted area of the volume cut by plane

정에서 각 상의 질량 변화가 생기게 되며, 이와 같은 시간 전진에 따른 각 상의 체적변화를 줄이기 위한 시간간격(time step)의 제약이 따르게 된다.

2.2.2 재구성 알고리즘

식 (12)를 계산하기 위해서는 경계면이 포함된 셀($0<f<1$)에서 재구성 알고리즘을 이용하여 셀 각 면에서의 젖은면적 A_{fwet}를 구해야 한다. 이를 위해서는 먼저 평면으로 가정된 경계면의 수직벡터 $\hat{n}$이 필요하며, 다음의 식 (13)과 같이 체적비율의 구배 형태로 나타낼 수 있다.

$$\hat{n} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \tag{13}$$

여기서, 체적비율 구배를 비정렬격자계에서 효과적으로 구하기 위하여 Barth[7]의 최소제곱법(least squares method)을 사용하였다. 다음으로는 앞서 구해진 수직벡터를 갖는 평면에 의하여 잘려진 부피 V_{tr} (Fig.1 의 어두운 부분)가 체적비율과 셀 체적의 곱과 같도록 만들어주는 과정이 필요하다.

$$V_{tr}(C) - f\,V_{cell} = 0 \tag{14}$$

평면상수 C 에 따라서 잘려지는 체적(truncated volume: V_{tr})이 변화하게 되므로 반복기법(Brent's method 사용)을 이용하여 식 (14)를 만족시켜야 하며, 셀의 각 꼭짓점을 이용하여 평면상수의 최대/최소값을 정하여 반복횟수를 줄여줄 수 있다.

3. 계산결과

3.1 댐붕괴 유동해석

해석코드의 검증을 위하여 가장 대표적인 자유표면 문제인 댐붕괴 유동을 해석하였다. 초기에 Fig.2 와 같은 형상을 지닌 물기둥은 중력의 영향에 의하여 무너지며 앞으로 전진하게 된다. 계산에는 바닥면을 보다 조밀하게 나눈 90x40x3 개의 격자를 사용하였으며, 각각 공기와 물의 물성치를 적용하였다. 또한 경계조건으로는 앞/뒷면의 경우 symmetry 조건을 사용하였으며, 이를 제외한 모든 면에서는 slip 조건을 사용하였다.

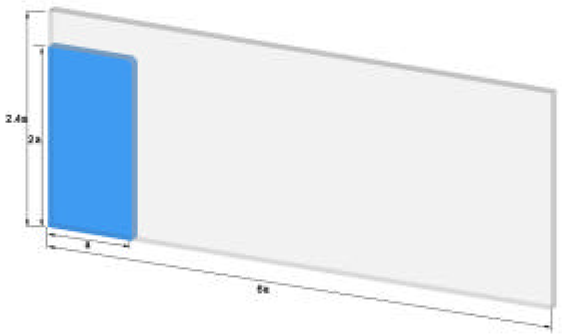

Fig. 2 Definition sketch for broken dam problem

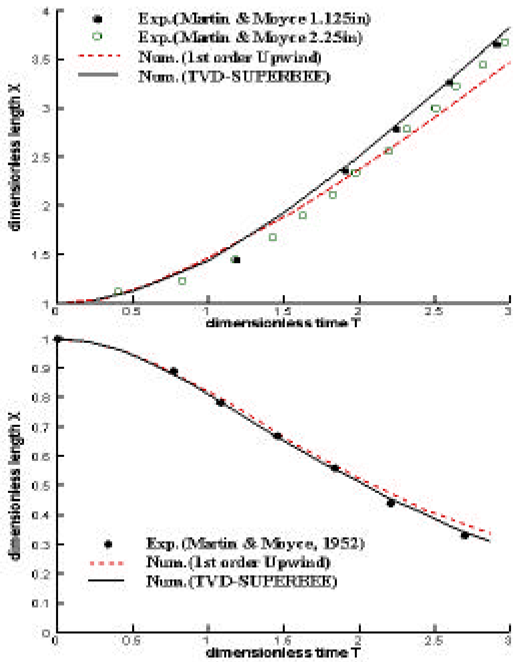

Fig. 3 Comparison between numerical results and experimental result

해석코드를 이용한 계산결과와 Martin 과 Moyce [10]의 실험결과를 비교한 Fig.3 에서는 각각 시간 변화에 따른 바닥면과 왼쪽 벽면에서의 자유표면 위치변화를 무차원화하여 나타내었으며, 비교적 잘 일치함을 확인할 수 있다.

3.2 사각용기 내의 슬러싱 유동해석

움직이는 액체가 부분적으로 채워진 저장탱크 내에서는 슬러싱(sloshing)과 같은 자유표면 유동이 발생한다. 사각용기 내의 슬러싱 유동해석을 위하여 Fig.4 와 같이 초기에 물이 반만큼 채워진

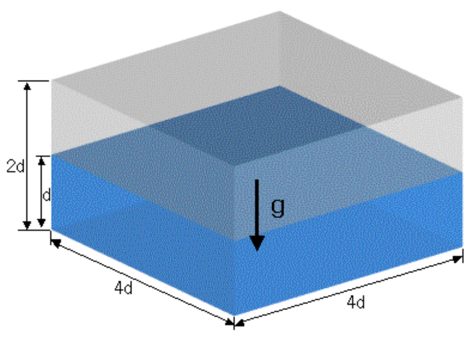

Fig. 4 Definition sketch for sloshing of rectangular tank

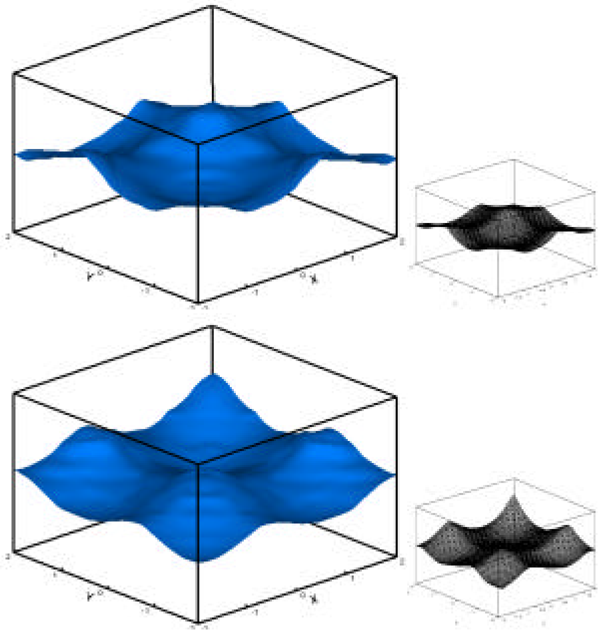

Fig. 5 Comparison of wave profile (A_x/d=A_y/d=0.0186, $T_x\sqrt{g/d} = T_y\sqrt{g/d} = 4.13$; Wu & et al[6])

탱크를 각각 $x = A_x \sin(w_x t)$, $y = A_y \sin(w_t t)$ 형태로 진동 시켰다. 여기서, 이와 같은 진동 조건은 비관성좌표계(non-inertial coordinate system)로의 변환을 통하여 지배방정식의 생성항 S_i 에 두 번 미분한 가속도의 형태로 적용시켰다. 또한, 계산에는 48x48x24 개의 격자를 사용하였으며, 경계조건으로는 모든 면에서 slip 조건을 사용하였다. 시간의 변화에 따라서 사각용기 내에서는 Fig.5 와 같은 물결이 주기적으로 변하게 되며, 그 크기도 점점 증가하다가 다시 감소하는 주기적인 형태를 나타낸다.

3.3 실린더탱크 내의 충전 유동해석

실린더탱크 내로 유체가 충전되는 과정을 해석하였다. Fig.6 과 같은 형상을 약 90000 개의 격자를 사용하여 계산하였으며, 입구/출구를 제외한

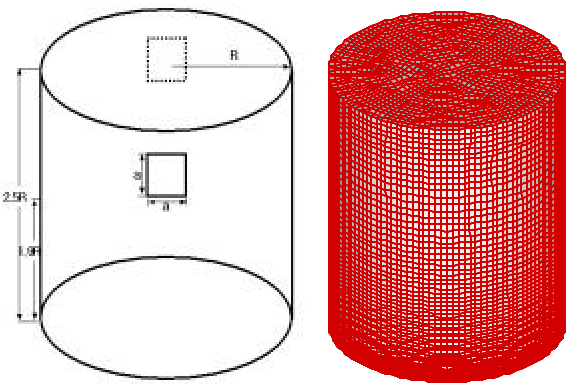

Fig. 6 Definition sketch and computational meshes of cylindrical tank

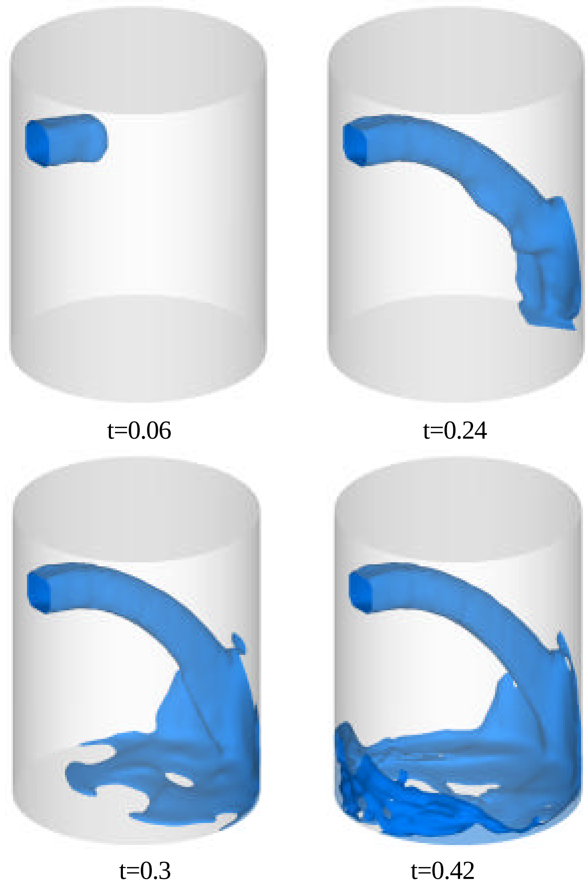

Fig. 7 Transient free surface for filling of tank

모든 경계면은 slip 조건을 사용하였다. 또한, 유입되는 유체는 물로 가정하였으며, 유체의 입구속도는 균일하게 1.2m/s 로 정하였다. Fig.7 은 시간에 따라 변화하는 자유표면의 형상을 체적비율의 값이 0.5 인 Iso-surface 로 표현한 그림이다. 보다 세밀하고 정확한 충전유동해석을 위해서는 더욱 조밀한 격자를 사용해야 할 것으로 판단되지만, 비정규격자상에서 위상(topology)의 변화가 큰 유동도 잘 해석할 수 있음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 자유표면이 포함된 유동을 해석할 수 있는 Navier-Stokes 방정식 해석코드를 개발하였다. 이를 위해서 셀의 각 경계면에 수직속도가 위치한 비엇갈림 격자를 사용하여 자유표면 위치추적 알고리즘인 PLIC 방법을 간단하고 효과적으로 적용하였으며, 비정렬격자계에 유한체적법을 적용하여 2 차원이나 축대칭이 아닌 3 차원 임의의 형상에서 자유표면 유동해석을 수행하였다. 또한, 개발된 코드의 검증을 위하여 댐붕괴 실험결과와 사각용기 내의 슬러싱유동 계산결과

등과 비교하였으며, 만족할 만한 결과를 보였다.

지배방정식의 이산화과정에서 셀의 각 면 중앙에 대한 보다 정확한 보간법에 관한 연구를 통하여 심한 비균일격자(irregular grid)를 이용한 아주 복잡한 형상에서도 효과적이고 만족스러운 정확도를 갖는 유동해석을 수행할 예정이다.

후 기

이 연구는 BK21 사업과 ADD 의 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

(1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys*., Vol. 39, pp.201~225.

(2) J. K. Dukowitcz and A. S. Dvinsky, 1992, "Approximation Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 102, pp.336~347

(3) Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff, 1994, "A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equation in Curvilinear Coordinates," *J. Comput. Phys*., Vol. 114, pp.18~33

(4) Dongjoo Kim and Haecheon Choi, 2000, "A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp.411~428

(5) M. S. Darwish, and F. Moukalled, 2003, "TVD schemes for unstructured grids," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp.599~611.

(6) G. X. Wu, Q. W. Ma and R. Eatock Taylor, 1998, "Numerical Simulation of Sloshing Waves in a 3D Tank based on a Finite Element Method," *Applied Ocean Research*, Vol. 20, pp. 337~355

(7) Timothy J. Barth, 1993, "Recent Developments in High Order K-Exact Reconstruction on Unstructured Meshes," *31st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, AIAA-93-0668

(8) Sussman, M. and Puckett, E. G., 2000, "A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric incompressible Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys*., Vol. 162, pp. 301~337

(9) S. Osher and J. A. Sethian, 1988, "Fronts Propagating with Curvature Dependent speed: Algorithms based on Hamilton Jacobi formulations" *J. Comput. Phys*., Vol. 79, pp.12~49

(10) J. C. Martin and W. J. Moyce, 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Horizontal Plane," *Philosophical Transactions, Series A, Mathematical and Physical Science*, Vol. 244, pp. 312~324

(11) William J. Rider and Douglas B. Kothe, 1998, "Reconstructing Volume Tracking," *J. Comput. Phys*., Vol. 141, pp.112~152.