

가상 경계 방법을 이용한 정지, 회전 및 진동하는 실린더의 유동 특성에 관한 연구

양 승 호* · 하 만 영† · 박 일 룡**

The study of the characteristics of the stationary, rotating and oscillating cylinders using the immersed boundary method

Seung Ho Yang, Man Yeong Ha, Il Ryong Park

Key Words : Immersed boundary method(가상경계), momentum forcing(운동량 보정), finite volume method(유한체적법), second order Lagrangian shape function(라그랑지안 형상함수)

Abstract

In most industrial applications, the geometrical complexity is combined with the moving boundaries. These problems considerably increase the computational difficulties since they require, respectively, regeneration and deformation of the grid. As a result, engineering flow simulation is restricted. In order to solve this kind of problems the immersed boundary method was developed. In this study, the immersed boundary method is applied to the numerical simulation of stationary, rotating and oscillating cylinders in the 2-dimensional square cavity. No-slip velocity boundary conditions are given by imposing feedback forcing term to the momentum equation. Besides, this technique is used with a second-order accurate interpolation scheme in order to improve the accuracy of flow near the immersed boundaries. The governing equations for the mass and momentum using the immersed boundary method are discretized on the non-staggered grid by using the finite volume method(FVM). This study presents the possibility of the immersed boundary method to apply to the complex flow experienced in the industrial applications.

1. 서 론

컴퓨터의 급속한 발달과 더불어 기존에 실험에 의존하던 방식들이 이제는 전산 해석 쪽으로 현저하게 이동하고 있다. 그러나, 불행하게도 기존의 전산 해석 모델들은 몇몇 한계점을 가지고 있으며 그러한 한계점 중 하나가 복잡한 형상을 가진 물체의 운동을 모사하는 것이다. 대부분의 산업 현장에서의 공학 문제들은 복잡한 형상을 가지게 되며, 또한 이러한 복잡한 형상들이

움직임과 연관되어 있다. 이렇게 되면, 계산이 상당히 복잡해지고 어려워진다. 따라서, 이러한 복잡한 형상에서의 움직임을 모사하는 방법을 연구하는 것이 전산 유체역학 분야의 두드러진 최신 경향이다. 기존의 해석 방법들은 대부분 그리드의 재생성과 변형을 필요로 하여, 유동을 시뮬레이션 하는데 엄청난 메모리와 시간을 소비하게 된다. 이러한 문제를 효과적으로 해결하기 위해 제안된 방법 중의 하나가 가상 경계 방법이며, 전산 해석 분야의 가장 도전적인 문제 중의 하나이다. 복잡하면서도 움직이는 물체에 대한 점성 유동의 상호작용에 대한 해석이 바로 본 논문의 주요 주제이다. 가상 경계 방법에는 여러 가지가 있으며⁽¹⁾, 첫 번째 방법으로 Eulerian 개념에 기초한 유한체적법, 두 번째 방법으로 유한차분법에 바탕을 둔 방법, 세 번째

† 부산대학교 기계공학부

E-mail : myha@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510 - 2440 FAX : (051) 512 - 9835

* 부산대학교 기계공학과 대학원

** 한국해양연구원 해양시스템안전연구소

방법으로 혼합 Eulerian-Lagrangian 방법이라고도 하는데, 여기서는 세 번째 방법을 사용하였다. 이 방법은 유체 유동은 고정된 Cartesian mesh 에서 이산화하고, 반면에 가상 경계는 기초를 이루는 유체 그리드와 관련해서 움직이는 일련의 점들로 구성하여 계산하는 것으로, 유체와 물체(body point)사이의 coupling 은 smooth delta function 을 사용하여, 서로 다른 두 격자점 사이를 보간시켜주는 방법이다. 그 후 Goldstein et al.⁽²⁾는 물체의 움직임을 나타내기 위해 feedback forcing 개념을 이용하여 실린더 주위의 정상 유동과 회전 유동을 계산하였다.

본 연구에서는 저 Re 수에서 사각 벽면으로 둘러싸인 내부의 실린더가 정지(stationary)해 있을 때, 회전(rotational)할 때, 진동(oscillating)할 때의 유동 현상을 가상 경계 방법을 이용하여 전산 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 운동량 보존 방정식(momentum equation)에 feedback forcing term 을 부과하여 가상 경계 면에서의 no-slip 경계 조건을 형성하였으며, 추가적으로 boundary 부근의 정도(accuracy) 향상을 위하여 second-order accurate interpolation scheme 을 사용하였다.

2. 이론적 연구

2.1 지배 방정식

일반적인 점성 유동 현상을 지배하는 비정상, 2 차원 질량 및 운동량 보존 방정식을 나타내면 다음과 같다.

- 연속 방정식

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

- x-운동량 보존 방정식

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \tag{2}$$

- y-운동량 보존 방정식

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \tag{3}$$

식(2)와 (3)에서 F_x 와 F_y 는 외력항(external force)이며, 가상 경계 면에서의 momentum forcing 값이다.

2.2 물체 경계조건

2.2.1 Shape function

해석 대상이 물체 표면에서 no slip boundary condition 을 구현하기 위해서는 매 계산시간에서의 유속을 구해야 한다. 다시 말해, 물체의 위치 정보로부터 물체 표면에서의 속도 정보를 구하는 것이다. 이때 물체 표면에서의 유속을 정확하게

구하기 위해 2 차 정도의 Lagrangian polynomial shape function 를 사용하여 내삽하였다. 형상함수의 정의는 아래와 같다.

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_j^9 N_j(\xi, \eta) \phi_j \tag{4}$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta) \xi_j \eta_j \quad j = 1, 3, 5, 7$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_j \eta) \eta_j \quad j = 2, 6$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1 + \xi_j \xi)(1 - \eta^2) \xi_j \xi \quad j = 4, 8$$

$$N_j = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad j = 9$$

2.2.2 Feedback forcing

물체 표면에서 구한 유속은 물체 표면의 no slip boundary condition 을 만족하기 위해서 유동장에 작용하는 일종의 힘(Body force)으로 치환하여 유동장과 feedback 관계를 가지도록 해야 한다. Goldstein et al⁽²⁾에 의하면 momentum forcing $f(X_s, t)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f(X_s, t) = \alpha_f \int_0^t [u(X_s, t') - V(X_s, t')] dt' + \beta_f [u(X_s, t) - V(X_s, t)] \tag{5}$$

여기서 α_f 와 β_f 는 차원이 각각 $\frac{M}{L^3 T^2}$ 과 $\frac{M}{L^3 T}$ 을

갖는 음의 큰 상수 값이다.

$V(X_s, t)$ 는 시간과 공간에 각각 의존되는 경계에서의 속도이다. 이 값을 통해서 변형하는 물체, 회전하는 물체, 움직이는 물체 등을 다양하게 구현할 수 있다. 속도 차 $u(X_s, t) - V(X_s, t)$ 에 대해 feedback 되는 양이 위의 momentum forcing 값이며, 가상 경계 면에서는 $u = V$ 가 되도록 구성된다. 상수 α_f 와 β_f 의 값은 유동에 의존적이며, α_f 와 β_f 값을 결정하는 일반적인 규칙은 없다. 이 방법의 주요 결점은 아주 큰 α_f 와 β_f 값을 취하고 time integration 을 하게 되면 time step 에 있어서 제약을 받게 된다. Goldstein et al⁽²⁾은 stability analysis 을 수행하였고, 모든 forcing term 이 explicit 하게 계산될 때, Adams-Bashforth scheme 에 대해 stability limit 이 다음과 같이 주어진다고 하였다.

$$\Delta t < \frac{-\beta_f - \sqrt{(\beta_f^2 - 2\alpha_f k)}}{\alpha_f} \tag{6}$$

k : Flow dependent constant of order 1

식(5)에서 움직임, 즉 회전요소와 병진요소 없으면 $V(X_s, t') = V(X_s, t) = 0$ 이 되고 time integral 이 식(12)으로 대체되면 아래와 같이 된다.

$$f(X_s, t) = \alpha_f \int_0^t [u(X_s, t')] dt' + \beta_f [u(X_s, t)] \quad (7)$$

$$\int_0^t U(X_s, t') dt' \cong \sum_{j=1}^N U(X_s, j) \Delta t \quad (8)$$

$$f(X_m, t) = \alpha_f \sum_{i=0}^{i=t} u(X_m, t') + \beta_f [u(X_m, t)] \quad (9)$$

위의 과정을 거쳐 forcing density 가 구해지면 다시 유동장인 공간 격자점으로 힘을 분포시켜주어야 한다. 이 때, 식(10)에서와 같이 discrete delta function 을 이용한다.

$$F(X, t) = \int_{\Gamma} f(s, t) \delta(x - X(s, t)) ds \quad (10)$$

2.2.3 Discrete delta function

Eulerian 요소와 Lagrangian mesh point 사이의 quantity 들을 coupling 시키는 데 사용되는 delta function 의 선택은 가상 경계 방법의 중요한 부분이다. Lai 와 Peskin⁽³⁾ 등은 다른 discrete delta function 을 사용하기도 하였다. 다시 말해, 본 논문에서 사용한 cosine 형태의 delta function 만이 유일한 것은 아니며, 여러 가지 다양한 형태의 delta function 을 사용할 수 있다. 그러나, delta function 은 결과에 상당한 영향을 미치게 되며, 경계에서의 “smoothing” 과 결과의 “accuracy” 를 위해 주의 깊게 선택해야 한다.

식(10), (11)에서 사용된 discrete delta function 은 물체 경계면에 분포된 외력을 유동장으로 외삽하기 위해 다음과 같이 미소 영역에서 연속된 함수로 나타낼 수 있다.

$$\delta_{2h}(x_i, y_j) = d_{2h}(x_i) d_{2h}(y_j) \quad (11)$$

$$d_{2h} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4h} (1 + \cos(\frac{\pi}{2h})) & \text{if } |r| < 2h \\ 0 & \text{if } |r| > 2h \end{array} \right\}$$

2.3 수치 해석 방법

유동장에 대한 수치 해석은 질량 및 운동량 보존 방정식을 일반화 좌표계에서 계산하였다. 그리고, 벡터(속도)와 스칼라량(압력)을 같은 격자에서 계산하는 비 엇갈림 격자(non-staggered grid)를 사용하였다.

앞서 서론에서 밝혔듯이 가상 경계 방법(Immersed boundary method)은 혼합 Eulerian-Lagrangian 방법이다. 다시 말해, fluid 와 관련된 변수들은 고정된 좌표 점인 Eulerian 요소 $N_x \times N_y$ 의 grid point 를 갖는다.

$$\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j) = (ih, jh) \quad i = 1, \dots, N_x \quad (12)$$

$$j = 1, \dots, N_y$$

N_x 와 N_y 는 양방향으로 동일한 grid 간격을 가져야 한다.

$$h = \frac{L_x}{N_x} = \frac{L_y}{N_y} \quad (13)$$

반면, 물체를 구성하는 점들은 Lagrangian 요소로서 N_b 개로 이산화된다. 따라서, parameter s 는 다음과 같이 정의된다.

$$s_l = l \cdot h_b \quad (14)$$

여기서 $h_b = \frac{L_f}{N_b}$ 이며, L_f 는 물체 표면 채적을 구성하는 미소 길이 요소이다.

2.4 형상 및 경계조건

본 연구의 형상은 Fig. 1, Fig. 2 와 같으며 상응하는 경계 조건은 다음과 같다.

1. 입구 조건: $u = U_\infty, v = 0$
2. 출구 조건: $mass_{in} = mass_{out}$
3. Cylinder wall: no-slip boundary condition
4. y 방향 경계면: symmetric boundary condition

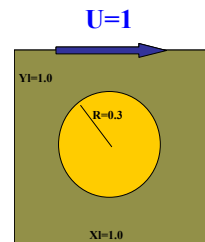


Fig. 1 Geometry of the cavity flow with the cylinder

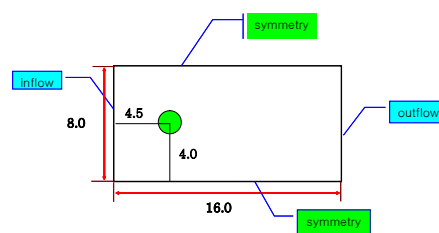


Fig. 2 Geometry of the circular cylinder in present study

3. 계산 결과 및 고찰

3.1 프로그램의 검증(2D driven cavity flow)

본 연구에 사용된 프로그램의 검증을 위해 먼저 $Re = 400$ (격자수: 100×100)에서의 cavity 유동을 계산하였다. 보는 바와 같이 Ghia et al⁽⁴⁾과 비교해 볼 때 정확히 일치하는 결과를 보인다.

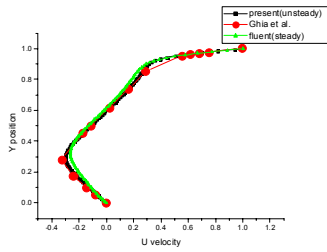


Fig. 3 Comparison of U component at $x = 0.5$, $Re=400$

3.2 정지되어 있는 실린더

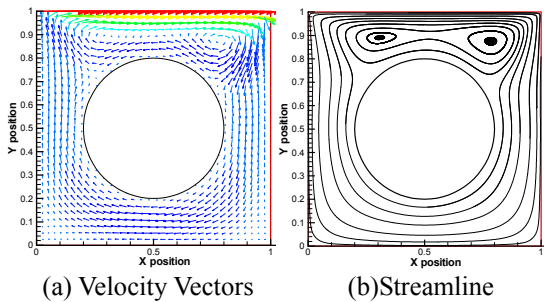


Fig. 4 Velocity vectors and Streamline with the cylinder in the domain for $Re=100$

사각 공동 내부에서의 정지해 있는 실린더를 해석하기 위해 Fig. 1 에서와 같이 형상 및 경계 조건을 구성하였다. 가상 경계 방법을 이용하여 해석 해본 결과는 Fig. 4 이다. 내부에 실린더가 없을 때 중앙부에 vortex 가 형성되고 secondary vortex 가 바닥 면의 양끝 단에 생기던 결과가 실린더의 영향으로 바닥 면의 secondary vortex 가 사라진 것을 볼 수 있다. Fig. 5 는 상용 code 와의 계산 결과를 비교한 것이다. Y 좌표 0.2 ~ 0.8 사이의 값은 비 물리적인 내부 유동 값이며 의미 없는 값이다.

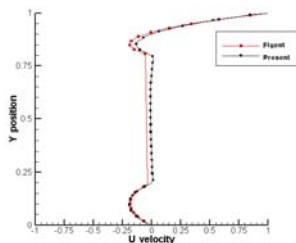


Fig. 5 Comparison of U component with the cylinder at $x = 0.5$

3.3 회전하는 실린더

일반적인 물체의 운동은 두 가지 성분으로 구성되는데 하나는 회전 성분이고 다른 하나는 병진 성분이다. 따라서, 일반적인 물체의 운동을 모사하기 위해서는 이 두 가지를 구현할 수

있어야 한다. 가상 경계 방법을 이용하게 되면 이 두 가지를 구현할 수 있는데 그 방법에 대해 간략히 언급하면 다음과 같다. 앞서 feedback forcing 을 설명할 때 식(5)에서 물체가 정지해 있을 때 즉, 회전과 움직임이 없으면 $V(X_s, t) = V(X_s, t) = 0$ 이 된다고 하였다. 하지만, 회전이나 움직임이 있으면 $V(X_s, t)$, $V(X_s, t)$ 가 적절한 값을 가지며, 그 값은 Saiki, E. M., and Biringen⁽⁵⁾ 에서 밝힌 바와 같다. 이상과 같은 방법으로 가상 경계 방법을 이용해 실린더의 회전을 모사하였으며, 그 결과는 Fig. 6 과 같다.

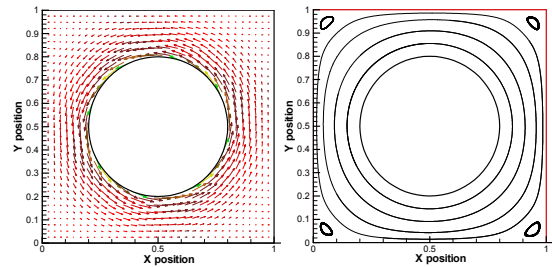


Fig. 6 Velocity vectors and Streamline for the rotation of the circular cylinder at $Re=100$

Fig. 6 에서 회전하는 실린더 주위를 따라 주위 유체가 같이 회전하는 모습을 볼 수 있으며 사각 벽면 모서리 부분에 secondary vortex 가 대칭적으로 형성되는 것을 볼 수 있다. Fig 12 는 실린더가 회전할 때의 속도성분 U 의 probe 를 찍은 것으로 벽과 회전하는 실린더 사이에 선형적인 속도분포를 확인 할 수 있다.

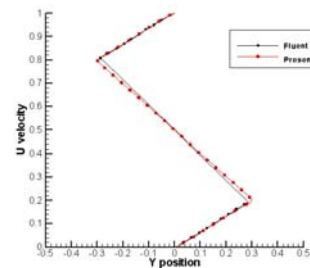


Fig. 7 Comparison of U component for the rotation of the circular cylinder

3.4 진동하는 실린더

본 논문에서는 사각 벽면 내부의 실린더가 진동(Oscillation)하는 문제를 다루었다. 구현 방법은 회전에서와 같은 방식이며, 그 결과는 Fig. 8 ~ Fig. 13 에서 보는 바와 같다. 이해를 돕기 위해 각 순간 순간의 속도 벡터와 압력 contour 를 나타내었으며, 실린더의 위치를 보조적으로 그려 놓았다. 실린더 운동은 좌우로 진동하는 형태이다.

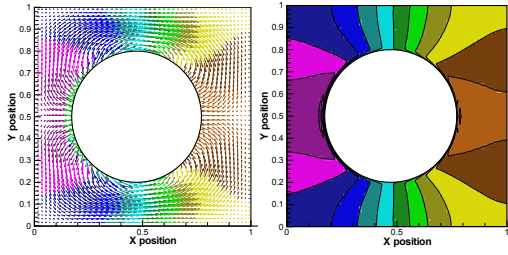


Fig. 8 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-1

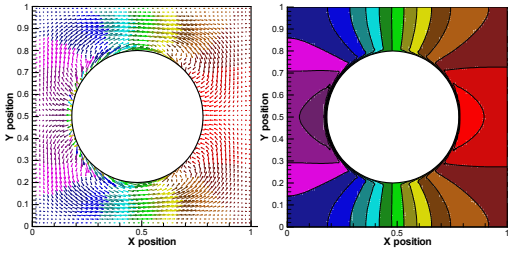


Fig. 9 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-2

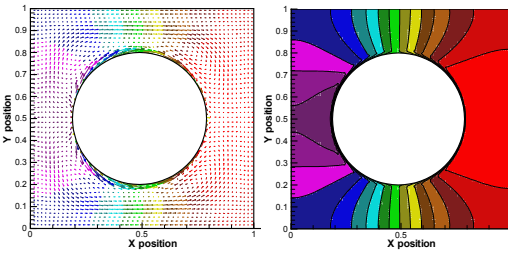


Fig. 10 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-3

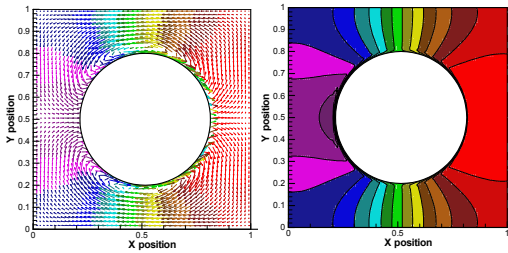


Fig. 11 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-4

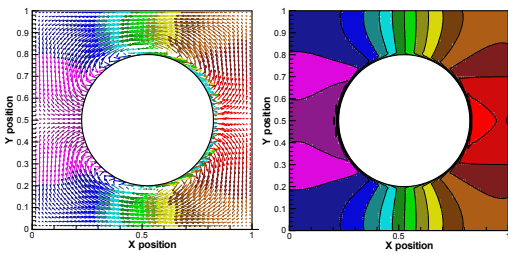


Fig. 12 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-5

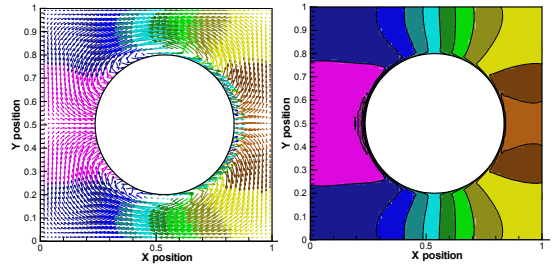


Fig. 13 Velocity vectors and pressure contours for the oscillation of the circular cylinder-6

Fig. 8 은 일정 시간이 지난 후에 실린더가 오른쪽에서 왼쪽으로 이동하고 있는 상태로 공동 내부의 중심을 막 통과하였을 때이다. 실린더 좌측의 유체는 실린더에 의해 밀려나 벽에 부딪힌 후 아래위로 갈라져 반대쪽의 비워지는 공간을 메우기 위해 상측 벽을 타고 이동하게 된다. 밀려된 사각 벽면 내부의 실린더가 왼쪽으로 이동하고 있기 때문에 이동해 가는 쪽의 압력은 상승하게 되고 그 반대쪽은 당연히 하강하게 된다. Fig. 9 는 일정 시간 경과 후 ($\Delta t = 0.25s$) 의 속도 벡터와 압력 contour 이며, Fig. 10 을 보면 실린더가 최대 좌측으로 이동 후 방향을 바꾸기 시작하는 시점으로 압력의 반전을 확연히 볼 수 있다.

실린더의 이동이 유체에 영향을 미치기 시작하여 관성력에 의해 좌측으로 이동하고 있던 유체의 이동 속도가 다소 줄어들었음을 볼 수 있다. 이때 특이한 점은 실린더 벽면 부근에서 circulation 이 발생하였음을 볼 수 있는데 이는 유동 방향의 변화에 따른 밀려된 공간에서의 유동특성으로 볼 수 있다. Fig. 11 은 실린더의 이동에 의해 유체가 좌측에서 우측으로 밀려가는 현상을 볼 수 있다 또한, 이동해 가고 있는 우측에서 압력 상승이 나타난다. Fig. 12 를 보면 유체들이 완전히 우측으로 이동하는 모습이 지배적인 것을 볼 수 있고 초기와 정반대 현상이 나타난다. Fig. 13 을 보면 실린더가 우측으로 완전히 이동했다가 다시 반대 방향으로 방향을 바꾸어 이동해 가기 시작하는 순간을 나타낸다. 유체는 이동하던 실린더의 영향으로 그대로 우측 벽면에 부딪힌 후 벽면을 타고 상하로 갈라져 이동하고 있으나 압력을 보면 좌측이 다시 압력이 상승한 것을 볼 수 있다. 이상과 같이 진동하는 실린더의 물리적 현상을 가상 경계 방법을 이용하여 모사해 보았다.

3.5 임의 형상에의 적용

가상 경계 방법의 최대 장점 중의 하나가 임의 형상을 모사할 수 있다는 것이다. 본 논문에서는 이것을 보여주기 위해 수평으로 놓인 타원 형상과 수직으로 놓인 타원 형상을 cavity 유동 내부에

실린더 대신 삼입하여 보았다. Fig. 14 와 Fig. 15 를 보면, 타원 형상이 수평일 때는 공동 내부의 vortex 가 하나지만 타원 형상을 수직으로 세웠을 때는 공동 내부에 타원 형상을 중심으로, 좌우에 두 개의 vortex 가 생기는 것을 볼 수 있다.

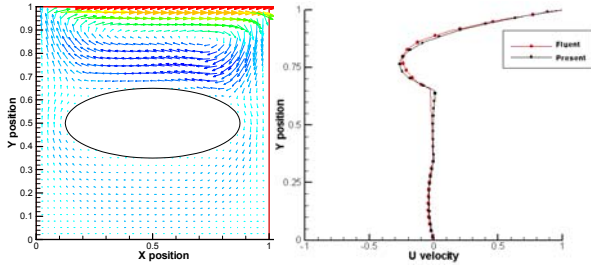


Fig. 14 Velocity vectors and comparison of U component for the horizontal ellipse

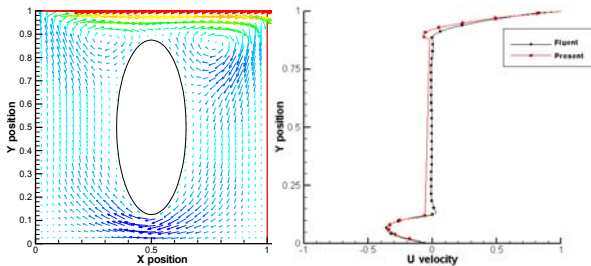


Fig. 15 Velocity vectors and comparison of U component for the vertical ellipse

3.6 입출구가 있는 유동에의 적용

앞서 수행해 본 여러 가지 응용들은 되도록 문제를 단순화 시키기 위해 해석 영역을 제한한 것들이고 실질적으로 적용되어야 할 곳은 입출구가 있는 유동에의 적용이라 할 수 있다. 가상 경계 면에서의 충분한 accuracy 을 보장해 주기 위해 격자의 수를 400×200 으로 하였고, interpolation 에서의 오류를 방지해 주기 위해 정렬 격자를 사용하였다. Fig. 16 은 Re 25 에서의 각각의 Probe 를 나타낸 것이다.

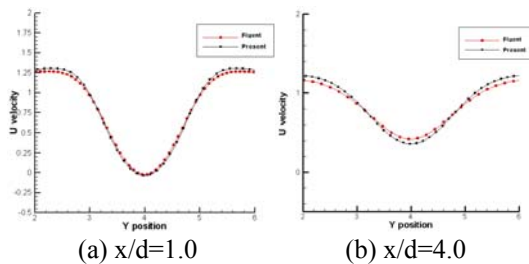


Fig. 16 Comparison of spanwise U component in the downstream at x/d=1.0 and x/d=4.0

Table 1. Comparison with the experiment for Re=25

Properties of the wake behind a stationary cylinder	Re =25			
	Present results	Saiki & Biringen	Gresho et al.	Coutanceau & Bourd
Length of separation bubble	1.22	1.41	1.15	1.22
X-coordinate of the center of the vortex cores	0.4723	0.53	0.38	0.44
Y-distance between the vortex cores	0.4748	0.5	0.47	0.51
Minimum streamwise velocity on the axis of symmetry	-0.058	-0.064	-0.057	-0.057
X-coordinate of minimum streamwise velocity on the axis of symmetry	0.53	0.59	0.49	0.5
Separation angle		45°	45°	48°
Drag coefficient		1.54	2.26	-

3. 결론

- (1) 본 연구에서는 최근 주목 받고 있는 가상 경계 방법을 이용하여 여러 다양한 유동 문제에 적용해 보고 그 유용성을 검증해 보았다.
- (2) 운동량 방정식에 momentum forcing 을 추가하여 경계에서의 no-slip 조건을 구현하는 방식을 택하였으며, 시뮬레이션의 결과는 이전의 전산 해석 및 실험 결과와 대체로 잘 일치하였다.
- (3) 가상 경계 방법을 이용하면 어떠한 복잡한 형상이라도 가능하며 본 연구에서 구현해본 회전, 진동 외에 일반적인 물체의 운동 즉, 회전과 병진 요소를 갖는 물체를 모사 할 수 있으며, 더욱이 변형을 동반한 물체의 운동을 모사할 수 있다.

참고 문헌

- (1) I.R. Park and H.H. Chun, 2001, "A Study of Accuracy Improvement of an Analysis of Flow around Arbitrary Bodies by Using an Eulerian-Lagrangian Method", Journal of Computational Fluids Engineering, Vol.6, No.3
- (2) Goldstein, D., Handler, R., and Sirovich, L., 1993, "Modeling a No-Slip Boundary with an External Force Field", Journal of Computational Physics, 105
- (3) C.S. Peskin, 1982, "The fluid dynamics of heart valves: Experimental, theoretical, and computational methods", Annu. Rev. Fluid Mech. 14, 235
- (4) U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin, 1982, "High-Re resolution for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and multigrid method", J. Comput. Phys. 48, 387.
- (5) E. M. Saiki, and S. Biringen, 1996, "Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow; Application of a Virtual Boundary Method", Journal of Computational Physics, 123, pp. 450-465